Competencia Espacial

Noviembre de 2009

Consideramos un juego electoral de tres etapas. Sólo hay dos candidatos, I, D. Las elecciones son por mayoría simple.

1. Los candidatos anuncian una política.

2. Los ciudadanos escuchan el anuncio electoral y votan.

3. El ganador implementa una política.

Haremos dos asunciones suplementarias:

1. Los ciudadanos votan de forma honesta o sea por la política que prefieren.

2. Los póliticos mantienen sus promesas electorales.

Empezamos a comentar la segunda asunción. Es razonable, aunque simplista, si asumimos que en el futuro hayan otras elecciones y que los ciudadanos castigan los candidatos que no han mantienido sus promesas (por ejemplo votando por otro candidato). Y si los candidato mantienen sup promesas electorales, entonces es estrategia (debilmente) dominante que los ciudadanos voten por la alternaticva que prefieran.

Si los candidatos reciben los mismos votos, cada uno es elegido con probabilidad $\frac{1}{2}$. Entonces, si q_I y q_D son dos póliticas la probabilidad que el candidato I resulte elegido es:

- $\pi_I(q_I, q_D) = 1$, si la mayoría estricta de los electores prefiere q_I a q_D.

- $\pi_I(q_I, q_D) = \frac{1}{2}$, si la candidad de electores que prefieren q_I a q_D y la cantidad de electores que prefieren q_D a q_I son las mismas.

- $\pi_I(q_I, q_D) = 1$, si la mayoría estricta de los electores prefiere q_D a q_I.

La probabilidad que el candidato D resulte elegido es $1 - \pi_I(q_I, q_D)$.

Noten que las probabilidades de elección son discontinuas en los anuncios electorales.

Theorem 1 ***El Teorema del Votante Mediano*** *(Downs 1957, Hotelling 1929). Se asuma que las preferencias de los votantes sean unimodales (y que exista un sólo ganador de Condorcet). Si a los candidatos sólo le importa ganar el juego electoral sólo tienes un equilibrio de Nash, donde los candidatos se posicionan en la política preferida por el votante mediano.*

Proof. Sea q^m la política preferida por el votante mediano. En este caso, q^m es el ganador de Condorcet. Primero demostramos que (q^m, q^m) es un equilibrio de Nash. Si ambos jugadores utilizan esta estrategia resultano elegidos con probabilidad $\frac{1}{2}$. Si alguien se desvía entonces pierde la elecciones. Sigue que nadie tiene interés a desviarse.
Consideramos un perfil de estrategias (q_I, q_D) distinto de (q^m, q^m). Primero consideramos el caso donde uno de los dos candidatos pierde. Sea I (resp. D), el perdedor. I (resp. D) puede desviarse y anunciar la misma política del otro candidato. Entonces sería elegido con probabilidad positiva. Si los dos candidatos empatan, cualquier de los dos, podría desviarse y anunciar q^m. Sería elegido con probabilidad 1. ■

El teorema del votante mediano es probablemente el resultado más conocido de todas la Economía Política. Es sencillo, elegante, ha sido aplicado con mucha al estudio de elecciones y gobiernos. Por cierto...es falso. La situacciones que más se paracen a los supuestos del teorema son las elecciones parlamentarias de Reino Unido y Estados Unidos: en todos los estudios que utilizan datos britanicos y estadundenses se ha encontado que los candidatos de los distintos partidos asumen posiciones políticas distintas.
A pesar de esto, si la competición es unidimensional el resultado es bastante robusto.

Theorem 2 ***El Teorema del Votante Mediano II*** *(Wittman 1983, Calvert 1985, Roemer 1994). Se asuma que las preferencias de los votantes sean unimodales (y que exista un sólo ganador de Condorcet). A los candidatos le importa también la política que se va a implementar. Si la política prefereida por el votante mediano se encuantra entre las políticas prefereidas por los dos candidatos, entonces el juego electoral sólo tiene un equilibrio de Nash, donde los candidatos se posicionan en la política preferida por el votante mediano.*

Si la competición electoral es multidimensional, entonces el juego electoral puede no tener equilibrio.

Example 1 *Consideramos el caso donde el espacio de las políticas es* $\mathbf{R}^2$*. Supongamos que hayan tres ciudadanos con preferencias* $\left\|x - \alpha^i\right\|^2$ $i = 1, 2, 3$ *donde* α^i *es la política preferida por el ciudadano* i*. Si los tres puntos no están alineados no existe un ganador de Condorcet ni un equilibrio de Nash del juego elctoral. Eso se debe al hecho que las probabilidades de ser elegidos no son continua: saltan desde* 0 *a* 1 *por un cambio infintesimo en las estargias. Es facil ver que si los puntos están alineados sí existe un ganador de Condorcet.*

De hecho el un equilibrio existe sólo bajo condiciones muy restrictivas: debe haber un ganador de Condorcet en todas las direcciones.

Theorem 3 ***El Teorema del Votante Mediano III*** *(Plott 1967). Se asuma que las preferencias de los votantes sean unimodales. A los candidatos le importa sólo resultar elegidos. El juego electoral tiene al máximo un equlibrio. Una plataforma electoral* (q_I, q_D) *es un equilibrio electoral si y sólo si: (i)* $q_I = q_D = q$ *y* q *es la política preferida por un ciudadano (i) las póliticas preferida por los otros votantes tiene que ser distribuidas de forma radial y simetrica alrededor de* q.

Ahora vamos a ver algunas aplicaciones.

Example 2 *(Ineficiencia del votante mediano). Hay* $2N + 1$ *votantes con rentas* $y^1 < ... < y^{2N+1}$*, respectivamente. Los votantes tienen las mismas preferencias* $U(c, G) = c + \ln G$ *donde* c *es el consumo rivado y* G *es un bien público que se financia con un impuesto proporcional sobre la renta:* $G = t\sum_{i=1}^{2N+1} y^i$*, donde* $0 \leq t \leq 1$*. La función de utilidad indirecta del ciudadano* k *es* $V\left(t, y^k\right) = (1-t)\, y^k + \ln\left(t\sum_{i=1}^{2N+1} y^i\right)$*. La derivada de* V *con respecto a* t *es* $V_t\left(t, y^k\right) = -y^k + \frac{1}{t}$*. Es facil verificar que la política preferida por* k *es* $t\left(y^k\right) = \min\left\{\frac{1}{y^k}, 1\right\}$*. Como* $t(y)$ *es decreciente en* y *los más pobres prefieren impuestos más elevados. Además* $V_t\left(t, y^k\right) > 0$ *por* $t < t\left(y^k\right)$ *y* $V_t\left(t, y^k\right) < 0$ *por* $t > t\left(y^k\right)$ *entonces las preferencias son unimodales. Como* $t(y)$ *es decreciente en* y *el votante mediano es el votante de renta mediana* y^{N+1}*.*
La imposición socialmente optima maximiza $(1-t)\left(\sum_{i=1}^{2N+1} y^i\right) + (2N+1)\ln\left(t\sum_{i=1}^{2N+1} y^i\right)$*, que da un impuesto optimo de* $t^O = \min\left\{\frac{1}{\bar{y}}, 1\right\}$ *donde* $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{2N+1} y^i}{2N+1}$ *es la renta media. Entonces si la renta mediana es menor de la renta media como en la mayoría de los lugares del mundo (y si la renta media es estrictamente mayor de 1) entonces el resultado electoral (y el ganador de Condorcet) es ineficiente. y la imposición es excesiva con respecto al optimo social.*

El efecto de un impuesto progesivo puede ser todavía mayor. En este caso puede haber un problema de existencia: la elección es multidimensional: hay que decidir los tramos de renta y los impuestos de los distintos tramos.

Example 3 *Consideremos preferencias como las del Ejemplo 2. Hay un continuo de votantes esta vez. Las rentas tiene una distribucción continua* F *con* $y^m = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ *como mediana y* $\bar{y} = \int y dF(y) < \infty$ *como media. Ahora* $G = t\bar{y}$*. La función de utilidad indirecta del ciudadano con renta* y *es* $V(t, y) = (1-t)\, y + \ln(t\bar{y})$*. Es facil verificar que las preferencias son unimodales y la política preferida por* y *es* $t(y) = \min\left\{\frac{1}{y}, 1\right\}$*. Como* $t(y)$ *es decreciente en* y *el votante mediano es el votante de renta mediana* y^m*.*
La imposición socialmente optima maximiza $(1-t)\,\bar{y} + \ln(t\bar{y})$*, que da un impuesto optimo de* $t^O = \min\left\{\frac{1}{\bar{y}}, 1\right\}$*. Entonces si la renta mediana es menor de*

la renta media como en la mayoría de los lugares del mundo (y si la renta media es estrictamente mayor de 1*) entonces el resultado electoral (y el ganador de Condorcet) es ineficiente. y la imposición es excesiva con respecto al optimo social.*

0.1 El voto probabilistico.

Hemos visto que si las políticas son multidimensionales el juego electoral, tipicamente no tine un equilibrio de Nash. La razón es que la probabilidad de ser elegidos no es continua en las políticas elegidas. La idea es de suavizar el salto...de alguna forma.
Los supuesto que hicmos sbre las preferencias son bastante simplista. En realidad hay componentes de las políticas (por ejemplo posición sobre el aborto), o tratos personales de los candidatos que no pueden cambiarse y, al mismo tiempo afectan la eleccón de los electores.

Asumimos que las preferencias de los votantes sean de la forma $U_k(q_k, \alpha) = \varepsilon_k + W(q_k, \alpha)$ si el candidato k es elegido y implementa la política q_k. Aquí ε_k es una variable aleatoria que suponemos ser independiente de α

Entonces, un ciudadano vota por I, si y sólo si $W(q_I, \alpha) - W(q_D, \alpha) > \delta$, donde $\delta = \varepsilon_I - \varepsilon_D$. Sea F^α la distribucción de δ por el ciudadano de tipo α. Sea f^α la densidad de F^α Entonces, la probabilidad queα vote por I es $F^\alpha(W(q_I, \alpha) - W(q_D, \alpha))$. Hay N ciudadanos y que votan de forma independiente. El percentaje de votos que el candidato I espera recibir es

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F^{\alpha^i}\left(W\left(q_I, \alpha^i\right) - W\left(q_D, \alpha^i\right)\right).$$

Asumimos que los candidatos maximizen el percentaje de votos que reciben. Si todas las F son diferenciables y bajo normales condiciones de regualridad existe un equilibrio simetrico. Este equilibrio satisface las clasica condiciones del primer orden.

$$\sum_{i=1}^{N} f^{\alpha^i}(0)\frac{\partial W(q, \alpha)}{\partial q_t} = 0.$$

por todos los t. Se observe que el resultado es un optimo social, se pesan los ciudadanos según la densidad del punto 0. Los votantes con $f^{\alpha^i}(0)$ grande pesan más porqué, alrededor del equilibrio funcionan como pivotes. Esta explicación no tiene mucho significado normativo.

Un caso particular es cuando todos los agentes tienen las mismas preferencias sobre las políticas $W(q)$ y la misma distribucción sobre δ, F. Un agente vota por I solo si $W(q_I) - W(q_D) > \delta$. Entonces la probabilidad que I sea elegido se simplifica a

$$\pi_I(q_I, q_D) = F(W(q_I) - W(q_D)).$$

Observen que el votante de tipo $\delta(q_I, q_D) = W(q_I) - W(q_D)$ se porta como votante mediano (o decisivo): todos los $\delta < \delta(q_I, q_D)$ votan por I, todos los

$\delta > \delta(q_I, q_D)$ votan por D. Esta hipotesis es equivalente a decir que existe un votante mediano con preferencias $W(q)$ pero que los candidatos no conocen su identidad. Por esto este modelo se llama "random median voter model". Si existe un equilibrio simetrico interior al conjunto de las políticas satisface

$$f(0)\frac{\partial W(q)}{\partial q_t} = 0$$

entonces la politica escogida es la optimal.

En mucho modelos se asume simplemente que existe un votante mediano pero sus preferencias son desconocidas y se portan como una variable aleatoria dada. Un caso bastante utilizado es $U(q, \alpha) = -\|q - \alpha\|^2$ donde α es la política preferida por el votante mediano y se distribuye según alguna distribucción F. La probabilidad que el candidato I gane las elecciones es

$$P\left(\|q_I - \alpha\|^2 < \|q_D - \alpha\|^2\right).$$

Si las políticas son unidimensionales corresponde a

$$F\left(\frac{q_I + q_D}{2}\right)$$

Observen que es facil demostrar sólo un resultado de convergencia, o sea demostrar la existancia de un equilibrio donde los candidatos proponen la misma poítica, hecho que tiene el mismo valor empirico del Teorema del Votante Mediano.

1 Escapando de la convergencia

Cuales razones pueden explicar la divergencia que se observa entre los candiadtos en el mundo real?

1.1 Random median voter y Candidato con preocupaciones políticas

Asumimos que a los condidatos sólo les importan las pólitica que van a ser executadas por el ganador y (obviamente) asumimos que tengan preferencias distintas. Asumimos que haya un votante mediano como arriba.
La utilidad esperada del candidato I puede escribirse como

$$F(W(q_I) - W(q_D))\,U_I(q_I) + [1 - F(W(q_I) - W(q_D))]\,U_I(q_D).$$

La utilidad esperada del candidato D puede escribirse como

$$[1 - F(W(q_I) - W(q_D))]\,U_D(q_D) + F(W(q_I) - W(q_D))\,U_D(q_I).$$

Bajo apropiadas condicines de regularidad, la función de mejor respuesta de I está caracterizada por las siguientes condición del primer orden:

$$f\left(W\left(q_I\right)-W\left(q_D\right)\right)W'\left(q_I\right)\left[U_I\left(q_I\right)-U_I\left(q_D\right)\right]+F\left(W\left(q_I\right)-W\left(q_D\right)\right)U_I'\left(q_I\right)=0.$$

La función de mejor respuesta de D está caracterizada por las siguientes condición del primer orden:

$$f\left(W\left(q_I\right)-W\left(q_D\right)\right)W'\left(q_I\right)\left[U_D\left(q_D\right)-U_D\left(q_I\right)\right]+F\left(W\left(q_I\right)-W\left(q_D\right)\right)U_D'\left(q_D\right)=0.$$

Como $U_I \neq U_D$, en general no existe $q_I = q_D = q$ que satisfazca ambas equacciones a menos que $F(0) = 0$ o $U_I'(q) = U_D'(q) = 0$.
El mismo razonamientos vale con random median voter de la otra forma:

Example 4 *Asuman sean de los votantes sean* $U(q,\alpha) = -|q-\alpha|^2$ *donde* $q \in [0,1]$ *y* $\alpha \in [0,1]$ *es la política preferida por el votante mediano y se distribuye uniformemente. El candidato Las preferencias de los candidatos son* $U_I = -q$ *y* $U_D = q-1$. *La utilidad esperada del candidato* I *puede escribirse como*

$$-\frac{q_I+q_D}{2}q_I-\left(1-\frac{q_I+q_D}{2}\right)q_D.$$

La utilidad esperada del candidato I *puede escribirse como*

$$-\frac{q_I+q_D}{2}\left(1-q_I\right)-\left(1-\frac{q_I+q_D}{2}\right)\left(1-q_D\right).$$

Sin hacer cuentas, es facil ver que la estrategia estrictamente dominante por I *es declarar* $q_I = 0$ *y la estrategia estrictamente dominante por* D *es declarar* $q_D = D$. *Esto da lugar a un sólo equilibri de Nash donde* I *declara* 0, D, *declara* 1 *y ambos vienen elegidos con probabilidad* $\frac{1}{2}$.