IN759
Auxiliar 2 de octubre

Porfesor: Benjamín Villena

Auxiliares: Andrés Barrera, Sergio Salgado.

Considere una economía representada por un individuo representativo inmortal, quien maximiza su utilidad esperada, y que tiene un factor de descuento β.

En esta economía sólo existen dos tipos de activos, uno libre de riesgo que renta a una tasa bruta R_t^f y otro riesgoso cuyo precio es p_t y genera dividendos y_t.

a) Caracterice las ecuaciones de Euler, y encuentre el precio del activo riesgoso en función del consumo de hoy, los consumos futuros y los dividendos futuros.
b) Encuentre el precio de hoy en función del precio y el dividendo de mañana, interprete.

Suponga ahora que el agente representativo tiene la siguiente función de utilidad

$$U = \mathbb{E}_0\left[\sum_0^\infty \beta^j \frac{{c_j}^{1-\eta}}{1-\eta}\right]$$

c) Considere que la producción en esta economía viene dada por firmas que son árboles que dan fruta según un proceso AR(1). Encuentre el precio del activo riesgoso si el agente es neutro al riesgo.
d) Ahora considere que la fruta tiene pequeñas desviaciones de su media $\bar{y}$ y con una varianza de σ^2, y el agente tiene un coeficiente de aversión al riesgo de Arrow-Pratt menor que 1.

Solución.

a) Una ecuación de Euler de una economía clásica, nos dice que, en equilibrio, una unidad más consumida hoy tiene que valer lo mismo que una unidad consumida mañana, la que renta a una tasa bruta R y se descuenta con un factor β, pero el problema es que tenemos dos tasas, por lo que tendremos 2 ecuaciones de Euler.

   Para la renta fija:

$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t\left[R_t^f \beta \cdot u'(c_{t+1})\right]$$

Para la el activo riesgoso

$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t[R_t^v \beta \cdot u'(c_{t+1})]$$

Notemos que

$$R_t^v = \left[\frac{p_{t+1} - p_t}{p_t} + \frac{y_{t+1}}{p_t}\right] + 1$$

En donde el primer término es la rentabilidad debida al cambio del precio, y el segundo es la rentabilidad debida a los dividendos de la acción, así la ecuación de Euler para el activo riesgoso queda

$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t\left[\beta \cdot u'(c_{t+1}) \frac{p_{t+1} + y_{t+1}}{p_t}\right]$$

Es decir

$$p_t = \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \left(p_{t+1} + y_{t+1}\right)\right]$$

Ahora podemos resolverlo de dos maneras diferentes

Sabemos que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}_Y\big(\mathbb{E}_X(X|Y)\big)$, o bien $\mathbb{E}_t\mathbb{E}_{t+j}x = \mathbb{E}_t x, j \geq 1$

$$p_t = \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\; p_{t+1}\right] + \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\; y_{t+1}\right]$$

$$\begin{aligned} p_t = \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \left\{\mathbb{E}_{t+1}\left[\beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t+1)}\; p_{t+2}\right] + \mathbb{E}_{t+1}\left[\beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})}\; y_{t+2}\right]\right\}\right] \\ + \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\; y_{t+1}\right] \end{aligned}$$

$$p_t = \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \left\{\left[\beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t+1)}\; p_{t+2}\right]\right\}\right] + \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\; y_{t+1} + \beta^2 \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})}\; y_{t+2}\right]$$

Recursivamente llegamos a

$$p_t = \mathbb{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'\big(c_{t+j}\big)}{u'(c_t)}\; y_{t+j}\right] + \mathbb{E}_t \lim_{T\to\infty} \beta^T \frac{u'(c_{t+T})}{u'(c_t)} p_T$$

En donde el segundo término tiene que ser cero en equilibrio, así

$$p_t = \mathbb{E}_t\left[\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{u'\big(c_{t+j}\big)}{u'(c_t)}\; y_{t+j}\right]$$

b)

Sabemos que $\mathbb{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Leftrightarrow \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{C}ov(X,Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$$p_t = \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right] \cdot \mathbb{E}_t[\,(p_{t+1} + y_{t+1})] + \mathbb{C}ov_t\left(\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, (p_{t+1} + y_{t+1})\right)$$

Pero como $\frac{1}{R_t^f} = \mathbb{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right]$

$$p_t = \frac{\mathbb{E}_t[\,(p_{t+1} + y_{t+1})]}{R_t^f} + \mathbb{C}ov_t\left(\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, (p_{t+1} + y_{t+1})\right)$$

El primer término es el precio futuro más el dividendo descontado por la tasa libre de riesgo, que la teoría de finanzas nos dice que es el precio. ¿de dónde viene el segundo término?

c)

Primero notemos que si las firmas ofrecen y_t en t, en equilibrio los consumidores tendrán que consumir y_t dado que son los únicos agentes en la economía. Con esto

$$u'(c)|_y = y^{-\eta}$$

Así con el precio encontrado en la parte a)

$$p_t = \mathbb{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{y_t^{\eta}}{y_{t+j}^{\eta}} \cdot y_{t+j}\right)$$

$$p_t = y_t^{\eta}\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t+j}^{1-\eta}\right)$$

Esta condición nos va a servir tanto para la parte c) como d)

Consideremos primero que los dividendos siguen un proceso AR(1), esto es

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon) \;\; \forall t$$

Así

$$y_{t+j} = \phi y_{t+j-1} + \varepsilon_{t+j}$$

$$y_{t+j} = \phi\left(\phi y_{t+j-2} + \varepsilon_{t+j-1}\right) + \varepsilon_{t+j}$$

Recursivamente

$$y_{t+j} = \phi^j y_t + \sum_{l=0}^{j} \phi^{j-l} \varepsilon_{t+l}$$

Entonces el precio es igual a

$$p_t = y_t^{\eta} \mathbb{E}_t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \left(\phi^j y_t + \sum_{l=0}^{j} \phi^{j-l} \varepsilon_{t+l} \right)^{1-\eta} \right)$$

Si tiene preferencias lineales, entones el precio será

$$p_t = \mathbb{E}_t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \left(\phi^j y_t + \sum_{l=0}^{j} \phi^{j-l} \varepsilon_{t+l} \right) \right)$$

Con esto si $\beta\phi < 1$

$$p_t = y_t \frac{\beta\phi}{1 - \beta\phi}$$

Si $\beta\phi \geq 1$

$$p_t \to \infty$$

d)

Si los dividendos están alrededor de una media, entonces se puede escribir el precio en cualquier tiempo con una expansión de Taylor

$$y_{t+j}^{1-\eta} = \bar{y}^{1-\eta} + (1-\eta)\bar{y}^{-\eta}\left(y_{t+j} - \bar{y}\right) - \frac{1}{2}(1-\eta)\eta\bar{y}^{-\eta-1}\left(y_{t+j} - \bar{y}\right)^2$$

Por lo que su esperanza será

$$\mathbb{E}\left(y_{t+j}^{1-\eta}\right) = \bar{y}^{1-\eta} + (1-\eta)\bar{y}^{-\eta}(\bar{y} - \bar{y}) - \frac{1}{2}(1-\eta)\eta\bar{y}^{-\eta-1}\mathbb{E}\left(y_{t+j} - \bar{y}\right)^2$$

$$\mathbb{E}\left(y_{t+j}^{1-\eta}\right) = \bar{y}^{1-\eta} - \frac{1}{2}(1-\eta)\eta\bar{y}^{-\eta-1}\sigma^2$$

Así el precio quedará

$$p_t = y_t^\eta \left(\bar{y}^{1-\eta} - \frac{1}{2}(1-\eta)\eta\bar{y}^{-\eta-1}\sigma^2\right)\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta^j\right)$$

$$p_t = y_t^\eta \left(\bar{y}^{1-\eta} - \frac{1}{2}(1-\eta)\eta\bar{y}^{-\eta-1}\sigma^2\right)\frac{\beta}{1-\beta}$$

$$p_t = \bar{y}\left(\frac{y_t}{\bar{y}}\right)^\eta \frac{\beta}{1-\beta} - \frac{1}{2}(1-\eta)\eta\frac{1}{\bar{y}}\left(\frac{y_t}{\bar{y}}\right)^\eta \sigma^2\frac{\beta}{1-\beta}$$

Si el agente tiene un coeficiente menor que 1, vemos que el precio decrece a medida que crece la varianza de los dividendos, lo cual es consistente con la medida de aversión al riesgo, es decir, que el agente no le gusta el riesgo por lo que castigará al precio del activo si este es muy riesgoso.