IN702
Primavera, 2009

Tarea 1

Problema 1 Considere el modelo de competencia a lo Cournot, en el cual la función de demanda inversa es $P(Q) = 1 - Q$, y las firmas tienen costo marginal igual a cero. Muestre que es estrictamente dominante para las firmas producir cualquier cantidad mayor a $\frac{1}{2}$. Escriba el conjunto de estrategias que no son estrictamente dominadas para las firmas como un intervalo $[\underline{S}^1, \overline{S}^1]$. Encuentre el intervalo de estrategias $[\underline{S}^2, \overline{S}^2]$ que no son estrictamente dominadas cuando la firma rival elige cantidades en $[\underline{S}^1, \overline{S}^1]$. Pruebe por inducción que al continuar con la eliminación de estrategias estrictamente dominadas en la etapa $2k$, las estrategias que sobreviven están en el intervalo $[\underline{S}^{2k}, \overline{S}^{2k}]$, donde:

$$\underline{S}^{2k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{4^j}$$

$$\overline{S}^{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{4^j}$$

Concluya que este juego se puede resover ocupando la eliminación de estrategias puras estrictamente dominadas.

Problema 2 Considere los siguientes juegos vistos en clases: Juego de inversión, Competencia a la Bertrand con bienes de imperfecta sustitución, Duopolio de Cournot, Búsqueda de Diamond.

i) Muestre que en el juego de inversión, el mayor y menor equilibrio de Nash es decreciente en k. Considere $1...I$ firmas, inversiones simultaneas $s_i \in \{0, 1\}$ y pagos:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} \pi(\sum s_j) - k & \text{si } s_i = 1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Con $\pi(\cdot)$ creciente en la inversión agregada.

ii) Muestre en la Competencia a la Bertrand que, el mayor y menor equilibrio de Nash son crecientes en el vector de costos $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ...)$.

iii) Muestre en el Duopolio de Cournot que, el mayor y menor equilibrio de Nash es decreciente en el vector de costos $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ...)$.

iv) Muestre en el modelo de Búsqueda de Diamond, el mayor y menor equilibrio de Nash son decrecientes en el costo de búsqueda. Considere $1...I$ agentes que se esfuerzan en encontrar una contraparte para intercambiar. El esfuerzo del jug. i es e_i y su costo $c(e_i)$.

Problema 3 Consumidores están distribuídos uniformemente a lo largo de una línea de largo 1 kilómetro. Los precios de los helados están regulados, por lo que los 2 consumidores pueden ir a comprar únicamente al punto más cercano (asuma que independiente de la lejanía de este punto, todo agente va a consumir helados). Si existe más de un vendedor en el mismo punto, se reparten el negocio equitativamente.

(i) Considere un juego en que dos vendedores de helados deben elegir sus ubicaciones simultáneamente. Muestre que existe sólo un equilibrio. Caracterícelo.

(ii) Pruebe que si hay 3 vendedores, no existe equilibrio en estrategias puras.

Problema 4 Considere el siguiente juego:

	X	Y	Z
A	0,0	5,4	4,5
B	4,5	0,0	5,4
C	5,4	4,5	0,0

i) Verifique que existe un único NE en el cuál el pago esperado de cada jugador es 3.

ii) Encuentre un equilibrio correlacionado en el cual ambos jugadores obtienen un pago estrictamente mayor a 4.

Problema 5 Para los siguientes juegos, encuentre todos los equilibrios de Nash:

	W	X	Y	Z
A	6,1	5,3	4,0	3,2
B	4,0	4,2	4,0	4,2
C	1,6	4,5	2,8	0,2
D	3,9	3,0	4,0	3,2

	W	X	Y	Z
A	3,4	0,0	3,0	5,1
B	2,0	1,4	3,0	6,1
C	1,0	5,2	4,4	7,1

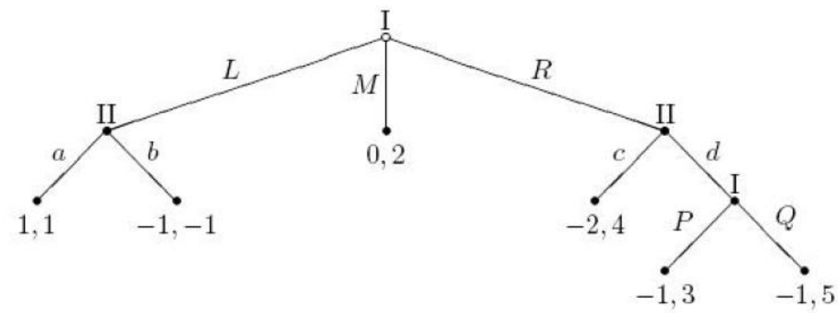
Problema 6 Considere un juego en forma normal entre dos jugadores. Diremos que una estrategia mixta para el jugador i, σ_i es *admisible* si da peso igual a cero a todas las estrategias débilmente dominadas. Diremos que un perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es *admisible* si cada componente lo es para el correspondiente jugador. Pruebe lo siguiente:

i) Una estrategia σ_i^* es admisible ssi existe una estrategia completamente mixta σ_j^* del otro jugador, a la que σ_i^* es mejor respuesta.

ii) Un equilibrio de Nash σ^* es *Trembling Hand Perfect* ssi es admisible.

Problema 7 Considere el siguiente juego de negociación: dos agentes deben repartirse una torta de tamaño 1, haciendo ofertas alternadas. En $t = 1$ el agente 1 hace una oferta $x_1 \in [0, 1]$ al jugador 2, quien la acepta o rechaza. Si la acepta, el jugador 2 recibe $1 - x_1$, dejando x_1 para el jugador 1. Si la rechaza, no hay división de la torta, y es su turno de hacer una oferta $x_2 \in [0, 1]$ en $t = 2$. Si su oferta es aceptada, recibe $1 - x_2$ mientras que 1 recibe x_2. Si es rechazada, el jugador 1 es quien debe hacer el ofrecimiento en $t = 3$, y así sucesivamente. Suponga un factor de descuento $\lambda \in (0, 1)$ y que hay T períodos de negociación. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos, es decir, encuentre una secuencia $(x_1, ..., x_T)$ SPE del juego anterior. Determine $\lim_{T\to\infty} x_1$.

Problema 8 Considere el siguiente juego en forma extensiva:



a) Determine el número de estrategias puras para el jugador, y el número de estrategias reducidas correspondiente.

b) Entregue la forma normal reducida del juego.

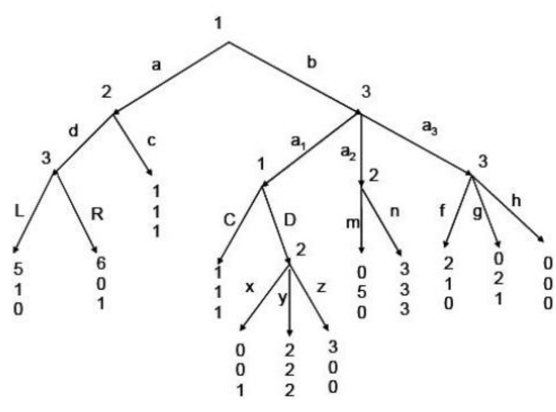
c) Determine los equilibrios en estrategias puras del mismo.

d) Cuáles son los SPE's del juego y los pagos correspondientes para cada jugador.

e) Encuentre todos los pares de estrategias reducidas en los cuales una domina débilmente a la otra.

f) Encuentre los NE en estrategias puras y mixtas.

Problema 9 Para el siguiente juego encuentre todos los SPE.



Problema 10 Suponga una economía en que existen n consumidores cada uno con función de utilidad

$$u_i \equiv t_i + g_i(a, \theta_i)$$

donde t_i es el ingreso del individuo i, a una decisión pública (por ejemplo, la cantidad de un cierto bien público) y $g_i(a, \theta_i)$ es la valoración del agente i por la decisión a, con θ_i un parámetro de utilidad, $i = 1, ..., n$. El costo monetario de la decisión a es $C(a) > 0$. Las funciones g_i son de conocimiento común.

i) Muestre que para un planificador central que conoce todos los parámetros $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, la decisión socialmente óptima $a^*(\theta_1, ..., \theta_n)$ es la solución de

$$\max_a \sum_i g_i(a, \theta_i) - c(a)$$

ii) Suponga ahora que el parámetro θ_i es sólo conocido por el agente i. El planificador intenta diseñar un mecanismo que induzca a los agentes a revelar sus verdaderas valoraciones y que lleve al ṕtimo social. Para ello, el planificador impone que los agentes anuncien simultáneamente sus valoraciones $\hat{\theta}_i$ (que eventualmente difieren de las verdaderas), con ellas implementa la decisión $a^*(\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_n)$ y entrega las siguientes transferencias:

$$t_i(\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_n) = K_i + \sum_{j \neq i} g_j(a^*, \hat{\theta}_j) - c(a^*)$$

donde K_i es una constante. Muestre que decir la verdad (es decir, $\hat{\theta}_i = \theta_i$) es una estrategia dominante. Concluya que la solución eficiente puede ser implementada.

Problema 11 Considere un juego dinámico con 2 jugadores. El jugador 1 en la primera etapa escoge entrar o salir. Si decide salir, entonces es para siempre y el pago de ambos jugadores es (2,2). Si decide entrar, el jugador 2 puede decidir si luchar o acomodarse. Si se acomoda, el juego se termina y los pagos son (1,0). Si lucha, el jugador 1 puede decidir si quedarse o salir. Si sale, el juego se termina y los pagos son (0,-5). Si lucha, el jugador 2 no hace nada y los pagos son (3,1).

i) Encuentre el set de equilibrios de Nash. Encuentre el set de equilibrios perfecto en subjuego.

ii) Encuentre los equilibrios que son *Trembling Hand Perfect*.

iii) Explique sus resultados obtenidos.