

Pauta Control 3

Martes 10 de Noviembre de 2009

Problema 1

- a) [4.0 puntos] Escriba la ecuación que permita calcular la capacidad de descarga que optimiza los costos involucrados considerando el comportamiento del sistema en el largo plazo.

El sistema es una $M/M/1$.

Se tiene que la estructura de costos que se enfrenta en el largo plazo **por hora** es la siguiente:

- Un costo $B_1\mu$ por el costo de arriendo por hora por la capacidad de descarga de la grúa.
- Un costo de A_1L_q asociado a la compensación por la espera de los camiones en la cola.
- Un costo de A_2L_s asociado a la compensación por el tiempo de descarga de los camiones.

Calculemos L_q y L_s , calculando primero las probabilidades estacionarias:

$$\pi_k = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 = \rho^k \pi_0$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$$
$$\pi_k = \rho^k (1 - \rho)$$

con $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Luego:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k (k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-\rho) (k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-\rho) k - \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-\rho) \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \\ &= \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_s &= 1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k + 0 \cdot \pi_0 \\ &= 1 - \pi_0 \\ &= \rho \end{aligned}$$

También hay otras formas posibles de calcular los L_s, L_q , como calculando L y usar que $L = L_q + L_s$. Bien si alguien se sabía de memoria los valores de L_s, L_q , también es válido.

Luego, se debe minimizar el costo total:

$$\min_{\mu > 0} B_1\mu + A_1L_q + A_2L_s$$

$$\min_{\mu > 0} B_1\mu + A_1 \frac{\rho^2}{1-\rho} + A_2\rho$$

$$\min_{\mu > 0} B_1\mu + A_1 \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} + A_2 \frac{\lambda}{\mu}$$

Derivando con respecto a μ e igualando a cero (hay mínimo dado que la función es convexa), se llega a la ecuación de la tasa óptima (μ^*) de capacidad de descarga:

$$B_1 - A_1 \frac{\lambda^2(2\mu - \lambda)}{\mu^2(\mu - \lambda)^2} - A_2 \frac{\lambda}{\mu^2} = 0$$

- 1 punto por el cálculo de L_s .
- 1 punto por el cálculo de L_q .
- 1 punto por plantear la función de costos (a minimizar).
- 1 punto por el despeje de la ecuación que debe satisfacer μ^* (derivar).

Si alguien se sabe las probabilidades estacionarias, o los L , está correcto. Ojo que es equivalente poner en vez de L , poner $W \cdot \lambda$.

Si alguien pone directamente la fórmula de L por su definición con sumatorias (pero correcta) y no reduce término, igualmente dar todo el puntaje respectivo.

- b) [2.0 puntos] La empresa que arrienda las grúas le ofrece a la planta agroindustrial un servicio alternativo para descargar los camiones. Le ofrece destinar tantas grúas como camiones estén en el sistema, una grúa a cada camión y cada una de estas grúas con la capacidad μ , según se calculó en el punto anterior. La empresa que arrienda las grúas cobraría un arriendo de $B_2 \cdot \mu$ pesos/hora por cada grúa pero sólo durante el tiempo que cada grúa esté trabajando. Cuando la grúa está ociosa no significa costo para la empresa agroindustrial. Calcule cuanto es el máximo para el parámetro B_2 para que la empresa agroindustrial esté indiferente entre ambas alternativas. ¿Es B_2 mayor o menor a B_1 ?

En este caso se está en un sistema de cola $M/M/\infty$. Con el servicio alternativo, el costo por cada hora será de $B_2\mu L + A_2L$, donde L es la cantidad de camiones en el sistema. Claramente $L = \rho$, pues $W = \frac{1}{\mu}$ y por Little, $L = \lambda W = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Luego el máximo costo B_2 que hace indiferente la elección del sistema, es tal que los costos se igualen:

$$B_2\mu \frac{\lambda}{\mu} + A_2 \frac{\lambda}{\mu} = B_1\mu + A_1 \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} + A_2 \frac{\lambda}{\mu}$$

$$B_2 = B_1 \frac{\mu}{\lambda} + A_1 \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Claramente $B_2 > B_1$, ya que no hay costo por compensación por espera en cola, y porque sólo se paga por tiempo trabajado a las grúas.

- 0,2 puntos por mencionar que este sistema es una $M/M/\infty$
- 0,5 puntos por el cálculo de L .
- 0,2 por plantear la función de costos de la nueva situación
- 0,3 por plantear la relación de igualdad entre costos para determinar B_2 .
- 0,3 por despejar B_2 .
- 0,5 puntos por mencionar la relación de que: $B_2 > B_1$.

Problema 2

- a) [2.0 puntos] ¿Cuántos clientes por minuto desisten de llamar por este teléfono, en el largo plazo, en valor esperado?

Este es un sistema $M/M/1/2$, calculamos las probabilidades estacionarias con la fórmula de probabilidades estacionarias de nacimiento y muerte.

$$\pi_k = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 = \rho^k \pi_0$$

$$\sum_{k=0}^2 \pi_k = 1$$

$$\pi_k = \frac{\rho^k}{1 + \rho + \rho^2}$$

con $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2}, \pi_1 = \frac{\rho}{1 + \rho + \rho^2}, \pi_2 = \frac{\rho^2}{1 + \rho + \rho^2}$$

o bien

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}, \pi_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}, \pi_2 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$\pi_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}, \pi_1 = \frac{\mu\lambda}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}, \pi_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}$$

Si alguien se sabía de memoria los valores de las probabilidades estacionarias de un sistema $M/M/1/2$, es válido también.

El número esperado de clientes que desisten por hora es:

$$E[\text{desisten}] = \lambda \pi_2 = \lambda \frac{\rho^2}{1 + \rho + \rho^2} = \frac{\lambda^3}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}$$

- 1 punto por calcular las probabilidades estacionarias, basta con tener el resultado de π_2 . De este punto, en caso de tener malo, dar 0,3 por plantear bien la cadena, y 0,4 por plantear el sistema de ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias.
- 1 punto por plantear que $E[\text{desisten}] = \lambda \pi_2$.

Si alguien calculo por hora, debería haber resultado: $E[\text{desisten}] = 60\lambda\pi_2$, en este caso, también tomar como correcto, aplicando el mismo criterio.

- b) [2.0 puntos] ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar (por minuto) la empresa concesionaria por una segunda cabina? En este caso los clientes siguen el mismo comportamiento, si ven que los 2 teléfonos están ocupados y hay una persona esperando por alguno de los 2 teléfonos, el nuevo cliente desiste de llamar y se retira. Si los 2 teléfonos están ocupados pero no hay un cliente esperando, el cliente decide esperar. Demás está decir que si hay un teléfono libre el cliente inmediatamente lo ocupa.

En este caso se esta en un sistema $M/M/2/3$.

Los costos por hora que se tienen en la parte anterior son de $A\lambda \frac{\rho^2}{1+\rho+\rho^2}$ (con $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$). Ahora si se instala la cabina, suponiendo que el costo por minuto es de $\$K$, entonces el costo total por minuto ahora será de: $K + A\lambda\pi_3$.

Calculemos esta nueva probabilidad estacionaria (con la fórmula de nacimiento y muerte):

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0, \pi_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0, \pi_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} \pi_0$$

llamando $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, para poder despejar el valor de K

$$\pi_1 = \rho \pi_0, \pi_2 = \frac{\rho^2}{2} \pi_0, \pi_3 = \frac{\rho^3}{4} \pi_0$$

$$\pi_0' = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{4\mu^3}{4 + 4\mu^2\lambda + 2\lambda^2\mu + \lambda^3}$$

$$\pi_3' = \frac{\frac{\rho^3}{4}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3} = \frac{\lambda^3}{4 + 4\mu^2\lambda + 2\lambda^2\mu + \lambda^3}$$

Luego lo máximo que se estaría dispuesto a pagar por minuto por la segunda caseta es $\$K$ tal que:

$$A\lambda\pi_2 = K + A\lambda\pi_3'$$

$$K = A\lambda\pi_2 - A\lambda\pi_3'$$

$$K = A\lambda \frac{\rho^2}{1 + \rho + \rho^2} - A\lambda \frac{\frac{\rho^3}{4}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4}}$$

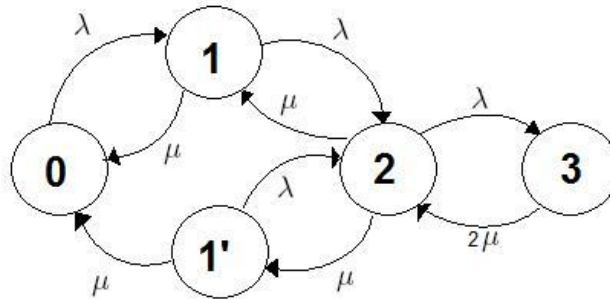
, con $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
o bien

$$K = A \frac{\lambda^3}{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2} - A \frac{\lambda^4}{4 + 4\mu^2\lambda + 2\lambda^2\mu + \lambda^3}$$

- 1 punto por calcular las probabilidades estacionarias, basta con tener el resultado de π_3 (y π_0 que es necesario para ese cálculo, ya sea con ρ o μ y λ). De este punto, en caso de tener malo, dar 0,3 por plantear bien la cadena, y 0,4 por plantear el sistema de ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias.
 - 1 punto por plantear la relación de $\$K$ con los costos, y el despeje, OJO que en esta ecuación se debe hacer la distinción entre π_2 (que es de la parte a)) y el π_3' que de esa parte b)). Otra forma posible de plantear el problema, es con los ingresos, donde los ingresos de la parte a) por hora serían: $A\lambda(\pi_0 + \pi_1)$ (con prob. est. de la cadena de la parte a), y los ingresos netos de la parte b) por hora que serían: $A\lambda(\pi_0' + \pi_1' + \pi_2') - K$ (con prob. est. de la cadena de la parte b)). Y después resolver.
- c) [2.0 puntos] Considere que el concesionario tiene la operación sobre los 2 teléfonos y que los clientes se comportan según se explicó en la parte b), con la salvedad que cuando un cliente llega y ambas cabinas están vacías, con certeza elige ocupar la cabina 1. Calcule la fracción del tiempo que la cabina 2 esté vacía, en el largo plazo.

Forma 1:

La cadena de markov que representa la situación descrita es:



Donde 1' es el estado de la cadena en donde está ocupada solamente la caseta que no es preferida.

Luego, para calcular las probabilidades estacionarias (que claramente existen pues la cadena es irreducible y finita) se debe resolver el sistema (llamamos π_k a las probabilidades estacionarias):

$$\begin{aligned}\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 + \mu\pi_{1'} \\ (\lambda + \mu)\pi_1 &= \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ (\lambda + \mu)\pi_{1'} &= \mu\pi_2 \\ (\lambda + 2\mu)\pi_2 &= \lambda\pi_1 + \lambda\pi_{1'} + 2\mu\pi_3 \\ 2\mu\pi_3 &= \lambda\pi_2 \\ \sum_{i \in \{0,1,1',2,3\}} \pi_i &= 1\end{aligned}$$

La fracción del tiempo que la cabina está vacía es:

$$f = \pi_0 + \pi_1$$

En este caso no es necesario despejar el sistema, pero **si** plantearlo.

- 0,5 puntos por describir los estados de la cadena de markov del problema, exclusivamente darse cuenta de los estados π_1 y $\pi_{1'}$.
- 0,5 puntos por plantear el sistema de ecuaciones.
- 1,0 punto por plantear que el resultado da: $f = \pi_0 + \pi_1$ (siempre y cuando se mencione previamente la existencia del otro estado $\pi_{1'}$, pues bien este π_1 no es el mismo que el obtenido en la parte b)).

Forma 2:

Otra forma de abordar el problema, es darse cuenta que las probabilidades estacionarias π_0 , π_2 y π_3 de un sistema con prioridad, son las mismas que las de un sistema $M/M/2/3$ sin prioridad. Llamemos $\pi_1^{M/M/2/3}$ a la probabilidad estacionaria de que haya una persona en un sistema $M/M/2/3$ sin prioridad (como de la parte b)). Claramente se tiene entonces que: $\pi_1^{M/M/2/3} = \pi_1 + \pi_{1'}$.

Para el sistema $M/M/2/3$ con prioridad, se tiene que:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\pi_1 &= \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ (\lambda + \mu)\pi_{1'} &= \mu\pi_2\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\pi_{1'} &= \frac{\mu}{\mu + \lambda}\pi_2 \\ \pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\pi_0 + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\pi_2\end{aligned}$$

La fracción del tiempo que la cabina está vacía es:

$$\begin{aligned}f &= \pi_0 + \pi_1 \\ &= \pi_0 + \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\pi_0 + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\pi_2 \\ &= \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu}\pi_0 + \frac{\mu}{\mu + \lambda}\pi_2 \\ &= \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4}} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} \frac{\frac{\rho^2}{2}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4}} \\ &= \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{4\mu^3}{4 + 4\mu^2\lambda + 2\lambda^2\mu + \lambda^3} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} \cdot \frac{2\mu\lambda^2}{4 + 4\mu^2\lambda + 2\lambda^2\mu + \lambda^3}\end{aligned}$$

No es necesario todo el cálculo bajo esta forma, pero si despejar la probabilidad estacionaria π_1 (o $\pi_{1'}$) de el sistema con prioridad, en función de π_0 y π_2 , o bien describir alguna forma en que se pueda calcular las probabilidades estacionarias.

- 0,5 puntos por describir los estados de la cadena de markov del problema, exclusivamente darse cuenta de los estados π_1 y $\pi_{1'}$.
- 0,5 puntos por planter el sistema de ecuaciones π_1 y $\pi_{1'}$.
- 1,0 punto por plantear que el resultado da: $f = \pi_0 + \pi_1$ (siempre y cuando se mencione previamente la existencia del otro estado $\pi_{1'}$, pues bien este π_1 no es el mismo que el obtenido en la parte b)), no es necesario el despeje.