



Control 3

11 de Noviembre de 2005

Problema 1

Una empresa que presta el servicio de almacenamiento de páginas de internet cuenta con dos servidores que funcionan de manera independiente, a los cuales denominaremos “servidor 1” y “servidor 2”.

Estos servidores, cuando están en buen estado operan continuamente, pero están sujetos a fallas. El tiempo que pasa desde que el servidor i vuelve a operar luego de una reparación hasta que falla y debe ser reparado nuevamente es aleatorio con distribución exponencial de media $1/\lambda_i$ [horas], $i \in \{1, 2\}$. El técnico encargado de la reparación toma un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_i$ [horas], $i \in \{1, 2\}$, en reparar el servidor i , lapso en el cual el servidor respectivo se encuentra fuera de servicio. Sin embargo, si al momento de que un servidor requiere reparación el técnico se encuentra ocupado trabajando en el otro servidor, el servidor que acaba de fallar deberá esperar fuera de servicio para ser reparado una vez que termine el trabajo en curso. Luego de una reparación del técnico, el servidor 1 vuelve a operar correctamente. Por su parte, el servidor 2, luego de una reparación del técnico, vuelve a operar correctamente con probabilidad q y con probabilidad $(1 - q)$ pasa a ser revisado por un ingeniero especialista. Este ingeniero demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\gamma$ [horas] en realizar dicha revisión, después de lo cual vuelve a operar correctamente.

1. (2,0 pts.) Modele el estado de los servidores como una cadena de Markov en tiempo continuo. Indique la condición para la existencia de régimen estacionario.

Las siguientes preguntas tratan sobre el comportamiento del sistema en el largo plazo. Suponga conocidas las probabilidades estacionarias, si necesita utilizarlas en las respuestas.

2. (1,0 pto.) Si el servidor 1 está funcionando correctamente hace t_1 horas desde su última reparación y el servidor 2 lleva t_2 horas en reparación con el técnico ($t_1 > t_2$). ¿Cuál es la probabilidad que el servidor 2 esté funcionando nuevamente, sin pasar por el ingeniero especialista, antes de que el servidor 1 falle otra vez?
3. (1,5 pts.) Para cada servidor se define un *ciclo de reparación* como el tiempo que transcurre desde que un servidor falla hasta que está operando nuevamente. ¿Cuál es la duración promedio de un ciclo de reparación para el servidor 1? ¿y para el servidor 2?
4. (1,5 pts.) Los pagos que reciben el técnico y el ingeniero no son fijos, sino que dependen de las reparaciones que realizan. El técnico recibe $\$K_{A_i}$ por cada vez que el servidor i pasa por su revisión, mientras que el ingeniero recibe $\$K_B$ por hora que se encuentra ocupado reparando el servidor 2. ¿Cuál es el costo promedio, por hora, que deberá enfrentar la empresa por concepto de remuneraciones a estos dos funcionarios?

Problema 2

La oficina de Atención al Cliente de una conocida multitienda es la encargada de atender a las personas que poseen la tarjeta de crédito de la casa comercial. Esta oficina cuenta con dos funcionarios en atención con colas independientes, cada una de ellas con capacidad para K personas incluyendo el cliente en servicio. El tiempo que demora el funcionario del subsistema i en atender a un cliente es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\mu_i$ [horas], $i \in \{1, 2\}$. La cartera de la multitienda es de N clientes ($N > 2K$), cada uno de los cuales visita la oficina a intervalos de tiempo i.i.d. exponenciales de media $1/\alpha$ [horas].

Si en el momento que arriba un cliente hay j personas en el sistema, éste intentará entrar con una probabilidad decreciente en j , igual a $q_j = (j + 1)^{-1}$, y en caso contrario se retira ya que no está dispuesto a esperar. Los clientes que deciden ingresar lo hacen a la cola más corta y ante empates en el largo de las colas eligen equiprobablemente. Cada cliente que quiere entrar pero encuentra el sistema lleno se retira indignado e intentará ingresar de nuevo en un tiempo exponencial de media $1/\alpha$ [horas].

Una vez dentro de la oficina, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que entra al local hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $1/\beta$ [horas]. Consciente de lo anterior, la tienda ha dispuesto varias pantallas de televisión en la cual se exhiben comerciales y ofertas para los clientes. Sin embargo, dada la infraestructura del local sólo las primeras R personas de cada cola ($R < K$), incluyendo a los clientes en atención, están en condiciones de ver dichos videos. Si una persona está esperando en la posición i ($i \leq R$) y se agota su paciencia, decidirá irse con probabilidad p y con probabilidad $(1 - p)$ seguirá esperando; en este caso, su paciencia volverá a agotarse luego de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\beta$ [horas]. Por otro lado, cuando a un cliente que está en una posición i ($i > R$) en su respectiva cola se le agota la paciencia, su decisión de dejar el sistema es indeclinable.

Además, los clientes que se encuentran al final de cada cola se cambian instantáneamente a la cola del otro servidor si es que al cambiarse la cantidad de personas delante de él en la cola en que se encuentra es mayor que la cantidad de personas que quedarían delante de él en la otra cola.

1. (2,0 pts.) Modele el número de personas en cada subsistema como una cadena de Markov en tiempo continuo. En particular, explicita claramente todas las tasas de transición para los casos generales del Anexo, donde en el estado (x_t, y_t) , x_t representa la cantidad de clientes en el subsistema del servidor 1 e y_t representa la cantidad de clientes en el subsistema del servidor 2. Ambas cantidades incluyen los clientes en atención. ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario?

Suponga conocidas las probabilidades estacionarias y responda las siguientes preguntas sobre el comportamiento del sistema en régimen estacionario.

2. (1,0 pto.) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?
3. (1,0 pto.) ¿Cuál es el tiempo promedio de permanencia de una persona que entra a la oficina?
4. El supervisor de la casa comercial realiza visitas a la Oficina de Atención al Cliente cada intervalos de tiempo exponenciales de media $1/\gamma$ [horas]. En cada visita, el supervisor permanece en el local durante exactamente T [horas].
 - a) (1,0 pto.) En una visita cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguna llegada ni ninguna salida de clientes durante la permanencia del supervisor en la oficina?
 - b) (1,0 pto.) Dado que durante la permanencia del supervisor, en una visita cualquiera, se ha producido al menos un evento (una llegada o una salida de clientes), ¿cuál es la probabilidad de que el primer evento que el supervisor vio, luego de llegar a la oficina, haya sido la salida de una persona que se aburrió esperando?.

Problema 3

Una empresa está considerando la instalación de una central telefónica para atender sus necesidades de llamadas. Se evalúa instalar una central con L líneas, que puedan ser usadas simultáneamente, para atender a los E empleados de la empresa. Se considera que un empleado no realiza dos llamadas al mismo tiempo por lo que la cantidad de líneas a contratar es menor o igual al número de empleados, es decir, $L \leq E$.

Se sabe que cada empleado que no esté usando el teléfono intentará hacer una llamada dentro de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$ [horas]. Si en ese instante todas las líneas están ocupadas, el empleado desiste de realizar la llamada e intentará hacerla nuevamente luego de un tiempo exponencialmente distribuido

de media $1/\lambda$ [horas]. En caso de conseguir una línea desocupada realiza la llamada, la cual dura un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [horas].

1. (1,5 ptos.) Modele el número de líneas en uso como un proceso de nacimiento y muerte. Especifique claramente los estados posibles y las tasas de transición. Utilizando la notación de Kendall, indique de qué tipo de sistema de espera se trata. Indique la condición para la existencia de régimen estacionario.
2. Suponga que el sistema está operando en régimen estacionario y considere conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena del punto anterior. Con estos antecedentes, responda las siguientes preguntas.
 - a) (1,0 pto.) En promedio, ¿cuál es la fracción del tiempo que una línea cualquiera se encuentra desocupada?
 - b) (1,0 pto.) En promedio, ¿cuántas llamadas no se pueden realizar, en el lapso de una hora, porque todas las líneas se encuentran ocupadas?
 - c) (1,0 pto.) Para analizar el costo por hora que tendrá la central para la empresa se considera que: por cada línea contratada se debe pagar un costo fijo de \$ C por hora; por las llamadas realizadas se deberá pagar un costo de \$ Y por hora de duración y por cada llamada que no se pueda realizar se incurrirá en un costo interno de valor \$ K .
Plantee un problema de optimización que le permita calcular el número de líneas a contratar de modo de minimizar el costo esperado por hora del sistema de telefonía.
3. (1,0 pto.) Calcule las probabilidades estacionarias para la cadena de la parte 1 para el caso particular $L = E$.
4. (0,5 ptos.) Suponga que ahora se está evaluando usar la central telefónica tanto para realizar llamadas desde la empresa como para recibirlas. Es decir, las L líneas de la central, además de ser usadas para llamadas realizadas por los empleados, serán utilizadas para recibir las llamadas “entrantes” de los clientes a la empresa. Estas llamadas llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa δ [llamadas/hora]. Si hay una línea disponible, la llamada es atendida por uno de los empleados que en ese instante no esté hablando por teléfono. En el caso que todas las líneas estén en uso, la central da la señal de ocupado y la llamada se pierde. Las llamadas entrantes que son atendidas tienen una duración exponencialmente distribuida con media $1/\mu$ [horas]¹.
¿Cómo cambian las respuestas de la parte 1 bajo esta nueva situación?

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones

$$\begin{aligned}
 X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda) : \quad f_X(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\
 X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda) : \quad \Pr[X = k] &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda \\
 X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p) : \quad \Pr[X = k] &= (1-p) \cdot p^k \quad E(X) = \frac{p}{1-p} \quad \text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

- Algunas sumas

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} a^k &= \frac{1}{1-a} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \text{si } |a| < 1 \\
 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} &= e^a \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n \quad \text{si } a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

- Sistemas elementales de espera en estado estacionario

$M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \pi_0 = 1-\rho \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

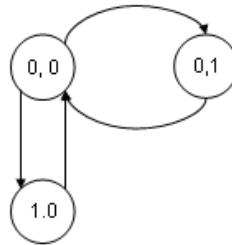
$M/M/2$

$$L = \frac{2 \cdot \rho}{1-\rho^2} \quad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

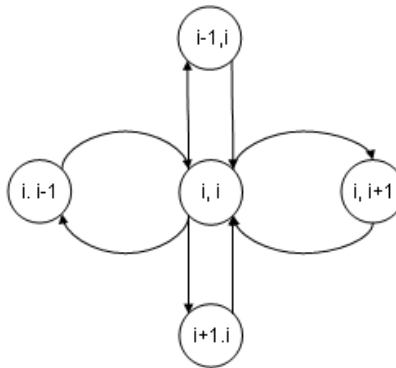
¹Es decir, la duración de los dos tipos de llamadas que usarán la central, tienen la misma distribución

ANEXO: Casos generales – Problema 2

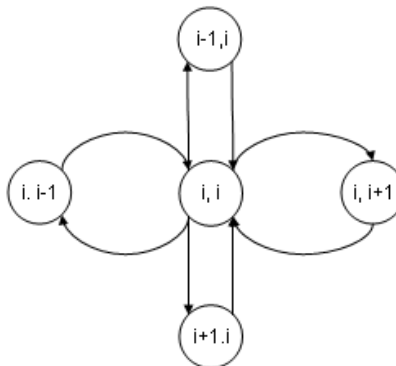
■ Caso 1:



■ Caso 2: $i < R$



■ Caso 3: $R \leq i < K$



■ Caso 4:

