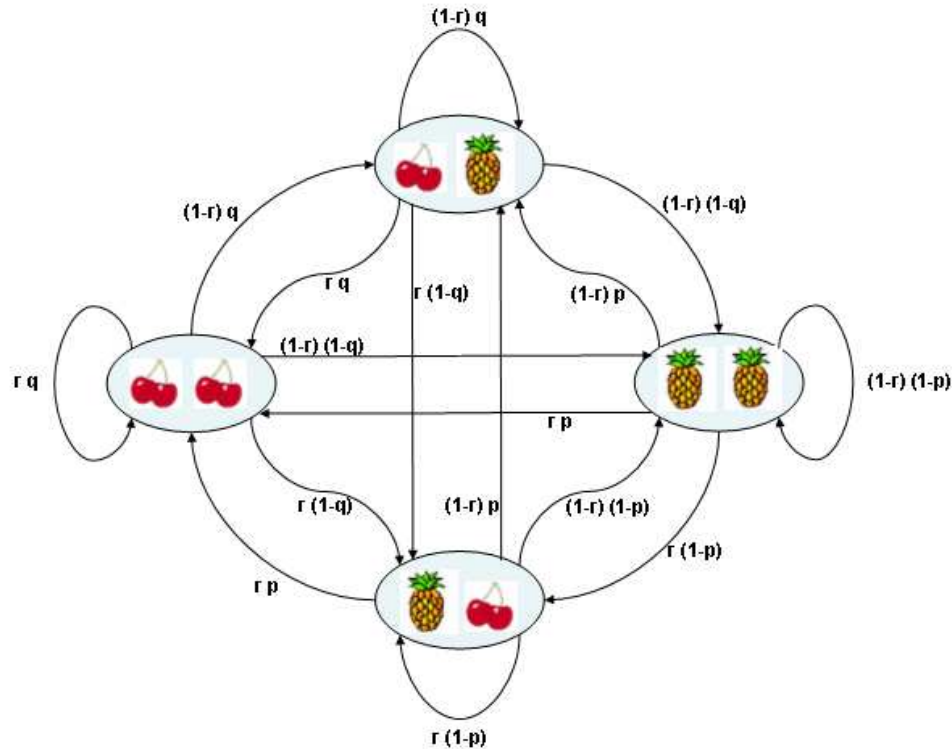


Pauta Auxiliar 7: Cadenas de Markov Discretas y con beneficios

Martes 6 de Septiembre de 2009

Problema 1

- Los estados y las probabilidades de transición entre ellos son los que se indican en el siguiente grafo:



Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Las probabilidades de transición deben ser justificadas por separado.

- Existe una única clase recurrente, aperiódica, por lo tanto existirá una ley de probabilidades estacionarias. Para encontrar el valor de estas probabilidades simplemente calculamos una ley estable (la única):

$$P_{GG} = r \cdot q \cdot P_{GG} + r \cdot q \cdot P_{GP} + r \cdot p \cdot P_{PG} + r \cdot p \cdot P_{PP}$$

$$P_{GP} = (1-r) \cdot q \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot q \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PP}$$

$$P_{PG} = r \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + r \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PP}$$

$$P_{PP} = (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PP}$$

$$1 = P_{GG} + P_{GP} + P_{PG} + P_{PP}$$

- Dado que la máquina ha sido utilizada por mucho tiempo podemos suponer que hemos alcanzado el estado estacionario (recuerden que no miramos la situación actual del traga monedas). De esta manera la distribución de probabilidades del resultado de mi tirada será la distribución de la ley de probabilidades estacionarias. Entonces, la probabilidad de ganar es la probabilidad de encontrar la máquina en un estado

donde ambos símbolos sean iguales y además realizar la elección correcta. Esto es:

$$\begin{aligned} P[\text{Ganar}] &= P[\text{Escoger Guinda-Guinda}] \cdot P_{GG} + P[\text{Escoger Piña-Piña}] \cdot P_{PP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[\text{Utilidades}] = \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \cdot G - [1 - \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP})] \cdot (C + T)$$

4. Nuevamente, dado que la máquina lleva mucho tiempo funcionando suponemos que el resultado de la próxima tirada se rige de acuerdo a la ley de probabilidades estacionarias. Si es así, los únicos estados que nos permiten obtener una ganancia son los estados Guinda-Piña y Piña-Guinda. Entonces:

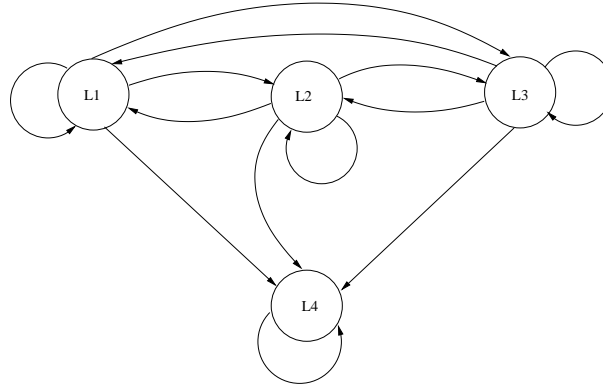
$$P[\text{ganar}] = P_{GP} + P_{PG}$$

De esta forma:

$$E[\text{Utilidades}] = P_{GP} + P_{PG} \cdot G - [1 - P_{GP} + P_{PG}] \cdot (C + T) - W$$

Problema 2

1. La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:



Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

- {L1, L2, L3}: clase transiente.
- {L4}: clase recurrente aperiódica.

La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2, L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\ \frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\ \frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo “ergódica más transiente” (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica).

Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:

$$\pi = [0, 0, 0, 1] .$$

De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Mandinga irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

Para lo que sigue hay, al menos, dos maneras de modelar los costos (y cualquiera de ellas conduce a los mismos resultados).

- Primera forma:

Asignamos a cada estado el costo de la entrada y a cada transición del tipo “quedarse en el mismo estado” el valor del descuento. Es decir, $r_i := E$ y $r_{ii} := -F$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$; $r_{ij} := 0$ para i distinto de j .

- Segunda forma:

Asignamos costos nulos a cada estado y manejamos los costos de las entradas vía las transiciones. Es decir, $r_i := 0$ y $r_{ii} := E - F$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$; $r_{ij} := E$ para i distinto de j .

En ambos casos se obtiene que:

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} E - p_1 F \\ E - p_2 F \\ E - p_3 F \\ E - F \end{bmatrix} .$$

3. $g = \pi \hat{r} = E - F$. En nuestro caso, esto nos dice que, en el estado estacionario, Mandinga pagará la entrada con descuento (esto lo podemos concluir también del hecho que sabemos que en el estado estacionario siempre irá al mismo local).
4. Para obtener W , fijamos $W_4 = 0$ (estamos basándonos en el estado recurrente) y resolvemos el sistema:

$$W + ge = \hat{r} + PW .$$

Con los datos que tenemos, esto se reduce a determinar $W_T = [W_1, W_2, W_3]^\top$, resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{bmatrix} W_T = \begin{bmatrix} 0,6F \\ 0,6F \\ 0,3F \end{bmatrix} ,$$

cuya solución es $W_T = [3F, 3F, 3F]^\top$.

Dado que impusimos $W_4 = 0$, la interpretación del vector obtenido corresponde al costo adicional de LP de empezar la evolución en el estado L1, L2 y L3, respectivamente, en vez de en L4.

A partir de esto, y sin cálculos adicionales, no podemos concluir cuánto tiempo le llevará descubrir este local (no tenemos información de cuántas veces, en media, le gustará el espectáculo de los otros locales).

5. **Bonus.** Basta verificar que el vector $W_T = [3F, 3F, 3F]^\top$, satisface

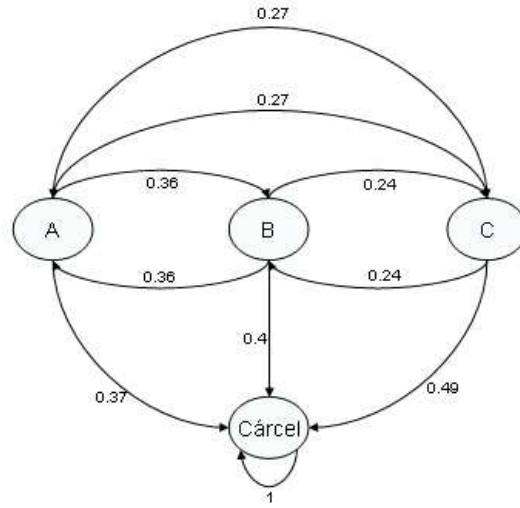
$$\begin{bmatrix} 1-p_1 & -\frac{1-p_1}{3} & -\frac{1-p_1}{3} \\ -\frac{1-p_2}{3} & 1-p_2 & -\frac{1-p_2}{3} \\ -\frac{1-p_3}{3} & -\frac{1-p_3}{3} & 1-p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3F \\ 3F \\ 3F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p_1)F \\ (1-p_2)F \\ (1-p_3)F \end{bmatrix},$$

lo que es cierto.

También se podría tratar de resolver el sistema correspondiente con la matriz genérica y ver que se obtiene el mismo vector W_T , pero esto es más difícil.

Problema 3

1. Para comenzar debemos ver cual es la forma de la cadena y especificar las probabilidades de transición. Estas son las que se ilustran en el dibujo.



La forma de calcular las probabilidades de pasar de un estado a otro es el siguiente:
La probabilidad de pasar de A a B es:

$$\begin{aligned} p_{AB} &= 0,5 \cdot P(\text{Pase } A \rightarrow B) \\ &= 0,5 \cdot 0,9 \cdot 0,8 \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

Y de la misma forma para todas las transiciones entre estados A, B y C, y hacia la cárcel es la probabilidad complementaria.

Adicionalmente debemos definir la estructura de costos asociada. Debería ser claro que:

$$\begin{aligned} r_A &= 1000 \quad , \quad r_B = 3000 \quad , \quad r_C = 7000 \\ r_{AB} &= r_{BA} = -500 \quad , \quad r_{AC} = r_{CA} = -1000 \quad , \quad r_{BC} = r_{CB} = -2000 \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\hat{r}_A = 550 \quad , \quad \hat{r}_B = 2340 \quad , \quad \hat{r}_C = 6250$$

Entonces ahora debemos resolver el sistema (ojo: notar que $g = 0$):

$$\vec{W} + \vec{0} = \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \\ 0 \end{pmatrix} + P \cdot \vec{W}$$

Eligiendo $W_{\text{Cárcel}} = 0$ tendremos que:

$$\vec{W}_T = (I - P_{TT})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \end{pmatrix}$$

Una vez conocido el valor de W utilizamos las formulas de Markov con beneficios:

$$\vec{V}_n = (n) \cdot 0 \cdot \vec{e} + \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + P^n \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

De este vector nos interesa la componente $V_n(A)$, dado que nos dicen que la condición inicial es partir en el país A.

Adicionalmente se nos pide el cálculo para $n=3$.

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0467 & 0,0936 & 0,0702 & 0,7895 \\ 0,0936 & 0,0467 & 0,0624 & 0,7973 \\ 0,0702 & 0,0624 & 0,0467 & 0,8207 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 4702,1 \\ 5789,7 \\ 8634,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la respuesta es 4702.

2. Reformulamos la pregunta: Cual es el tiempo esperado en el transiente partiendo desde B? A estas alturas sabemos que la respuesta es $W(B)$ donde \vec{W} es el vector que cumple con:

$$\vec{W} = [I - P_{TT}]^{-1} \cdot \vec{e}$$

$$\text{Con } P_{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0,36 & 0,27 \\ 0,36 & 0 & 0,24 \\ 0,27 & 0,24 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Por lo tanto :}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2,4863 \\ 2,4365 \\ 2,2561 \end{pmatrix}$$

Y la respuesta es 2.4365.

Problema 4

1. En la cadena se tiene que los estados A y B forman una clase transiente y los estados C y T una clase recurrente aperiódica. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado A y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal*, podemos descomponer esta esperanza como la suma de los siguientes 2 términos:

- El número esperado de transiciones hasta llegar al estado C , partiendo de A , lo que corresponde a W_A si utilizamos la estructura de contador de permanencia en el transiente.
- El número esperado de transiciones hasta llegar por primera vez al estado T , partiendo de C . Sea esta esperanza $E_{C,T}$.

Si denotamos a la esperanza pedida como E_A , se tiene que:

$$E_A = W_A + E_{C,T}$$

Para calcular W_A , utilizamos la siguiente estructura de costos de contador de permanencia en el transiente:

$$\hat{r}_A = 1 \quad \hat{r}_B = 1 \quad \hat{r}_C = 0 \quad \hat{r}_T = 0$$

En esta caso $g = 0$, ya que los estados transientes que tienen costos distintos de cero tienen probabilidades estacionarias nulas, por lo que debemos resolver el sistema:

$$[I - P]\vec{W} = \hat{r} \quad W_C = 0 \quad W_T = 0^1$$

Reemplazando con los valores de la cadena:

$$\begin{pmatrix} q & -q & 0 & 0 \\ -r & r+s & -s & 0 \\ 0 & 0 & u & -u \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $W_C = W_T = 0$, del sistema matricial anterior se obtiene el siguiente sistema de 2X2.

$$qW_A - qW_B = 1 \quad -rW_A + (r+s)W_B = 1$$

Donde se obtiene que:

$$W_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s}$$

Para calcular el término de $E_{C,T}$ se tiene que:

$$E_{C,T} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^{k-1} \cdot u$$

Reordenando y usando la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ entregada en el enunciado, se tiene que:

$$E_{C,T} = \frac{u}{1-u} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^k = \frac{u}{1-u} \cdot \frac{1-u}{u^2} = \frac{1}{u}$$

Este resultado también se puede obtener directamente observando que la variable aleatoria a la cual le calculamos la esperanza es una geométrica, cuya valor se entrega en el enunciado.

Finalmente:

$$E_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s} + \frac{1}{u}$$

¹Corresponde a los estados recurrentes

2. Si inicialmente se encuentra en el estado X y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar por primera vez alguno de los nodos terminales (E_{X,T_1,T_2}) , podemos separar esta esperanza en 3 partes:

- Esperanza del número de transiciones hasta salir del estado X . Este valor (E_x) se calcula de la misma forma que el segundo término de la parte 1, a través de la esperanza de la geométrica. Esto es: $E_X = \frac{1}{n+m}$.
- Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 1 (con probabilidad $\frac{n}{n+m}$), inicialmente se encuentra en el estado A_1 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_1 , lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.
- Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 2 (con probabilidad $\frac{m}{n+m}$), inicialmente se encuentra en el estado A_2 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_2 , lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.

$$E_{X,T_1,T_2} = \frac{1}{n+m} + \left[\frac{r_1 + s_1 + q_1}{q_1 \cdot s_1} + \frac{1}{u_1} \right] \cdot \frac{n}{n+m} + \left[\frac{r_2 + s_2 + q_2}{q_2 \cdot s_2} + \frac{1}{u_2} \right] \cdot \frac{m}{n+m}$$