



Problemas de Control a'nos anteriores

1. Problema 3, Control 2 Primavera 2004

Un ingeniero que trabaja en la mesa de dinero de la Bolsa de Santiago se enfrenta a la siguiente situación. Estudiando el comportamiento del precio de las acciones de la empresa X ha descubierto que diariamente esta acción puede aumentar su valor en una unidad, lo que ocurre con probabilidad p , disminuir en una unidad, con probabilidad q , o mantenerse, con probabilidad r ($r + p + q = 1$). Además cuando el precio de la acción llega al nivel de $\$L$ la probabilidad de bajar es 0 y la probabilidad de mantenerse es $r + q$. De la misma forma, cuando el precio de la acción llega al nivel de $\$U$ la probabilidad de subir es 0 y la probabilidad de mantenerse es $r + p$.

Gracias a esta información privilegiada el ingeniero planea construir una estrategia de inversiones que le permita ganar dinero rápidamente. Suponga que el ingeniero es libre de comprar o vender acciones a cualquier precio y que inicialmente el precio de la acción es $\$i$ ($L < i < U$).

- (2.0 pts) Modele el precio diario de la acción de la empresa X como una cadena de Markov en tiempo discreto. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionaria. Encuentre una expresión para dichas probabilidades (considere $q \neq p$).
- (1.5 pts) Suponiendo una fortuna inicial de $\$M$, formule el problema de decisión que enfrenta el ingeniero si desea maximizar sus utilidades cuando quedan T días para su jubilación (día a partir del cual no podrá seguir tranzando en la bolsa).

Dado que el ingeniero es aún muy joven, suponga que el número de días que quedan para su jubilación es infinito. Además suponga que la estrategia del ingeniero es comprar cuando el precio es w y vender cuando el precio es y .

- (0.0 pts) ¿Qué valor debería ser mayor, w o y ?
- (1.5 pts) Modifique la cadena de forma de incluir información acerca de la posesión de acciones.
- (0.5 pts) Cual es la rentabilidad diaria esperada en el largo plazo? (Considere conocida la ley de probabilidades estacionarias)
- (0.5 pts) Explique como encontraría (que criterios usaría y como procedería) los valores de w e y "óptimos".

Solución:

- La cadena se muestra en la siguiente figura.

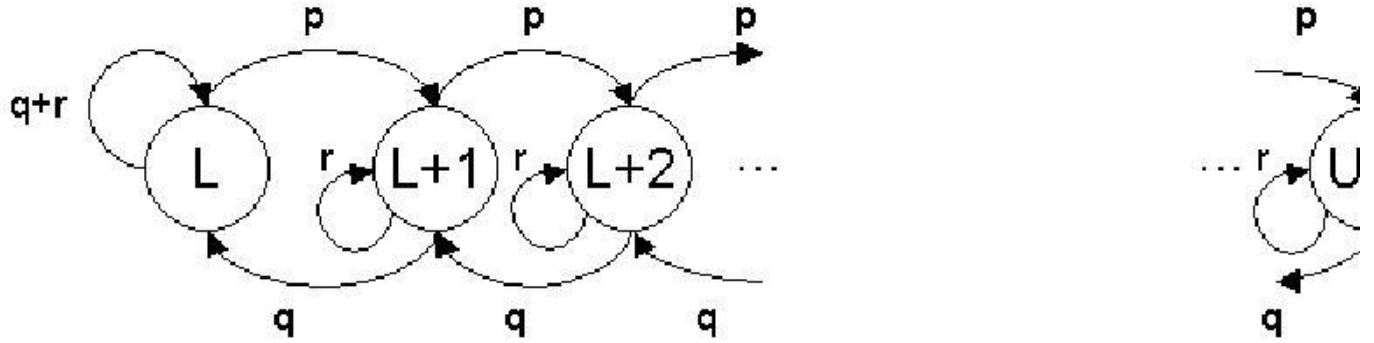
Existirá una ley estacionaria debido a que todos sus estados están comunicados entre sí (una sola clase), la cadena es finita (la clase es recurrente) y existen estados que pueden ciclar sobre sí mismos (la clase es aperiódica), es decir, la cadena es ergódica.

Considerando $q \neq p$ vemos que la ley de prob. estacionarias debe cumplir con lo siguiente (dado que es la única ley estable).

$$\pi_L \cdot p = \pi_{L+1} \cdot q$$

$$\pi_U \cdot q = \pi_{U-1} \cdot p$$

$$\pi_i \cdot (p + q) = \pi_{i-1} \cdot p + \pi_{i+1} \cdot q \quad \forall i \in \{L+1, \dots, U-1\}$$



Sea $\rho = \frac{p}{q}$. Con un poco de algebra vemos que:

$$\begin{aligned}\pi_L \cdot \rho &= \pi_{L+1} \\ \pi_L \cdot \rho^2 &= \pi_{L+2} \\ &\vdots \\ \pi_L \cdot \rho^{i-L} &= \pi_i \\ &\vdots \\ \pi_L \cdot \rho^{U-L} &= \pi_U\end{aligned}$$

Así podemos determinar el valor de π_L , puesto que estos números corresponden a una ley de probabilidades.

$$\pi_L = \left[\sum_{i=L}^U \rho^{i-L} \right]^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{U-L} \rho^i \right]^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{U-L+1}}$$

Entonces:

$$\pi_i = \rho^{i-L} \cdot \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{U-L+1}}$$

- b) Debemos formular un problema de programación dinámica que nos entregue la estrategia óptima de inversion en acciones. La información relevante para la variable de estado será el precio de la acción, el dinero acumulado. La variable de decisión será vender o no en el caso de poseer el dinero como acciones y comprar o no en el caso en que no se tenga el dinero en forma de acciones, es decir, si el dinero pasará al próximo período en forma de acciones o no.

El modelo es el siguiente:

- Periodos: Cada uno de los días $(1, \dots, T)$
- Estado:

P_t = Precio de la acción en el día t .

M_t = Cantidad de dinero que se posee en el periodo t .

- Decisiones:

$$E_t = \begin{cases} 1 & \text{El dinero estará en acciones} \\ 0 & \text{El dinero no estará en acciones} \end{cases}$$

- Recurrencia:

$$\begin{aligned} V^*(P_t, M_t) &= \max\{V(P_t, M_t, E_t = 1), V(p_t, M_t, E_t = 0)\} \\ &= \max\{E_{P_{t+1}}[V^*(P_{t+1}, \frac{P_{t+1}}{P_t} \cdot M_t)], E_{P_{t+1}}[V^*(P_{t+1}, M_t)]\} \end{aligned}$$

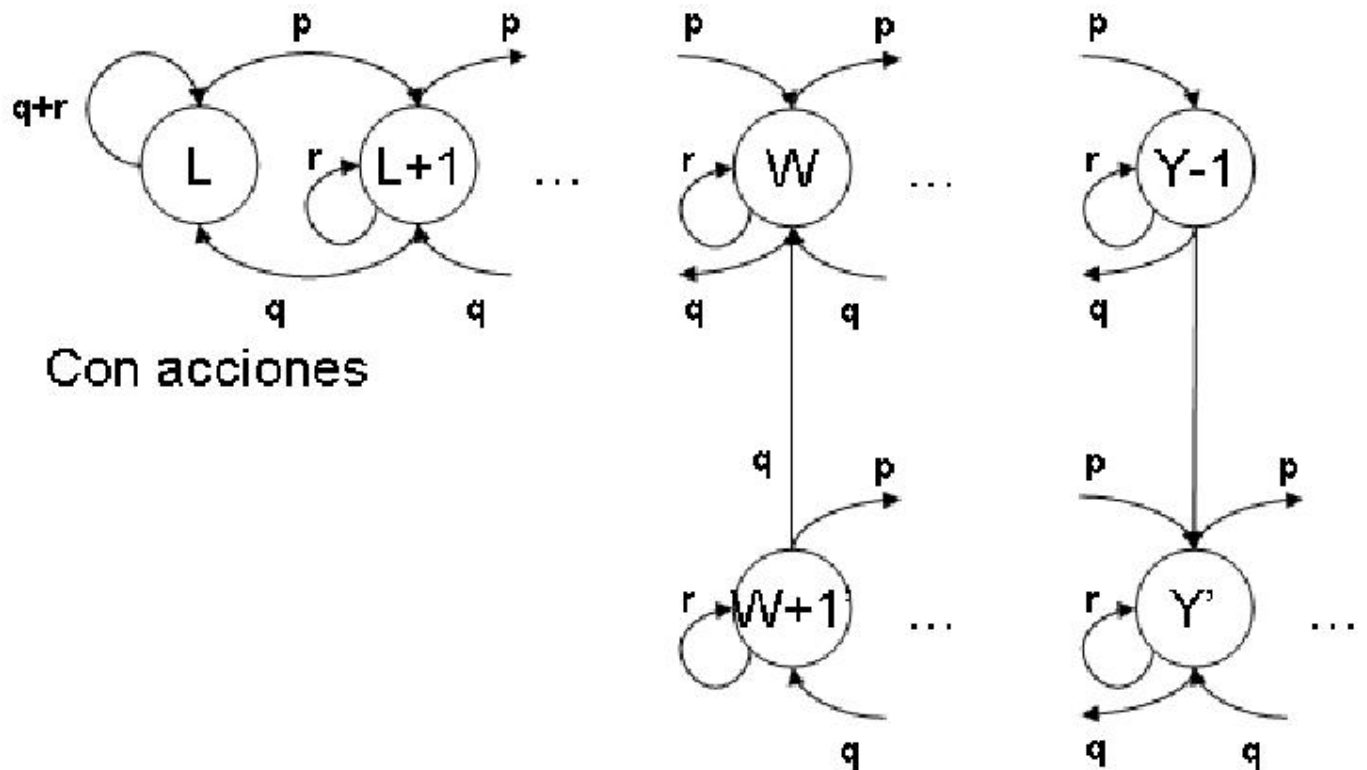
- Condiciones de borde.

$$V_{T+1}^*(P_{T+1}, M_{T+1}) = M_{T+1}$$

$$M_1 = M$$

$$P_1 = i$$

- c) (0.0 pts) La idea es comprar barato y vender caro. Entonces w debería ser menor que y .
- d) (1.5 pts) La cadena modificada se muestra a continuación.



- e) (0.5 pts) La rentabilidad de largo plazo se puede calcular a partir de las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte anterior. Claramente en la cadena donde no tengo acciones la rentabilidad es 0. En estados donde sí tengo acciones, si el precio de la acción es i , entonces la rentabilidad esperada en ese estado es $r_i = \frac{(i-1) \cdot q + i \cdot r + (i+1) \cdot p}{i}$. El estado L representa una excepción, su rentabilidad es $r_L = \frac{L \cdot (r+q) + (L+1) \cdot p}{L}$. Así, la rentabilidad esperada de largo plazo es:

$$R = \sum_{i=L}^{W-1} r_i \cdot \pi_i$$

- f) (0.5 pts) Dado que las ganancias estan siempre aumentando, en el largo plazo la ganancia acumulada debiese divergir para toda política de inversiones razonable ($w < y$). Por esto lo lógico es comparar rentabilidades diarias de largo plazo más que ganancias acumuladas (ojo que comparar ganancias diarias de largo plazo tampoco tiene sentido puesto que la ganancia diaria debería ser proporcional al beneficio acumulado y por lo tanto también diverge).

Como encontrarlo... en la parte anterior se calculo la rentabilidad diaria para una política en particular. Los alumnos debieran basarse en ese resultado para idear un método. Ej: Si se pueden determinar las prob. estacionarias en función de w e y entonces se puede expresar la rentabilidad diaria de largo plazo como función de w e y y por lo tanto tan solo se debe maximizar esa función dentro de los valores coherentes para w e y .

3. Problema 1, Control 2 Primavera 2002

En un laboratorio existe un sofisticado equipo electrónico con 2 componentes, las que llamaremos A y B , las que pueden estar *encendidas* (ON) o *apagadas* (OFF). Para que este equipo funcione correctamente es necesario que **una y sólo una** de las componentes se encuentre encendida (si se encienden ambas se produce un alza de voltaje que destruye el equipo, mientras que si ambas están apagadas el sistema suspende sus actividades).

El comportamiento de *encendido* y *apagado* es aleatorio e independiente para ambas componentes, pudiendo cambiar al comienzo de cada día. Estos, sólo han podido determinar las probabilidades de transición entre estos estados para ambas componentes, los que se muestran a continuación:

Componente A			Componente B		
	ON	OFF		ON	OFF
ON	0.4	0.6	ON	0.3	0.7
OFF	0.6	0.4	OFF	0.7	0.3

- a) (2,0 pts) Modele el estado del equipo como una Cadena de Markov de tiempo discreto. Determine si existen probabilidades de estado estacionario y escriba la matriz de transición de un período.
- b) (1,0 pts) Si la componente A está actualmente en ON y la componente B en OFF, ¿Cuál será la duración esperada del equipo antes de fallar?.

Suponga ahora que cada vez que el equipo deja de funcionar porque ambas componentes se encuentran encendidas se incurre en un costo de $\$C$ porque hay que realizar reparaciones mayores producto del alza de voltaje. Estas reparaciones demoran exactamente dos días (el día en que falla y uno adicional), luego de los cuales la máquina comenzará a operar con la componente A en ON y la B en OFF.

Sin embargo, si el equipo ha dejado de funcionar porque ambas componentes están en OFF el encargado del laboratorio al inicio del día siguiente interviene y pone en ON a la componente A , incurriendo en un costo $\$k$ con $k < C$ asociados a no tener el equipo funcionando 1 día.

En esta situación conteste las siguientes preguntas:

- a) (1,5 pts) Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de transición de un período.
- b) (1,5 pts) ¿Cuál es la fracción del tiempo en el largo plazo que la máquina no estará operativa?.
- ¿Cuál es el costo promedio diario en el largo plazo de mantener el equipo operando?.

Solución:

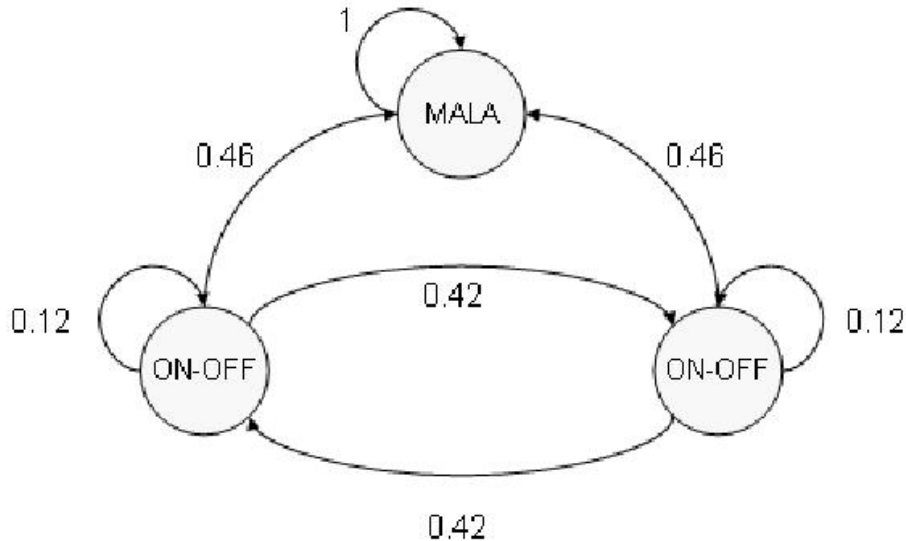
- a) Como se menciona el el control existían dos posibles interpretaciones para el estado de falla del sistema: Cuando este llegaba a los estados ON-ON ó OFF-OFF, o cuando llegaba al estado ON-ON. Para la primera de las interpretaciones el desarrollo es mucho más fácil, puesto que limitamos el número de estados transientes, lo que simplifica los cálculos. Los desarrollos en los distintos casos son los siguientes:

■ Caso ON-ON ó OFF-OFF \Rightarrow FALLA:

Para calcular las probabilidades de transición es necesario ver qué eventos son los necesarios para tener cada una de las transiciones. Por ejemplo, para pasar del estado ON-OFF al estado OFF-ON es necesario que la componente A se apague y la componente B se encienda, lo que ocurre con una probabilidad $P_{\text{ON-OFF}; \text{OFF-ON}} = 0,6 \cdot 0,7 = \frac{21}{50}$. La matriz de transición resultante, siguiendo el mismo tipo de razonamiento es:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & \text{ON-OFF} & \text{OFF-ON} & \text{Mala} \\ \hline \text{ON-OFF} & 0,4 \cdot 0,3 & 0,6 \cdot 0,7 & 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 \\ \text{OFF-ON} & 0,6 \cdot 0,7 & 0,4 \cdot 0,3 & 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 \\ \text{Mala} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

La cadena resultante es la que se muestra a continuación:



Además, podemos ver claramente que existe una única clase recurrente (la del estado “Mala”), mientras que los otros 2 estados pertenecen a una clase transiente. Así existirá una ley de probabilidades estacionarias que estará dada por: $\Pi = [0 \ 0 \ 1]$.

■ Caso ON-ON \Rightarrow FALLA:

Analogamente al caso anterior la matriz de transiciones será la siguiente:

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & \text{ON-OFF} & \text{OFF-ON} & \text{OFF-OFF} & \text{Mala} \\ \hline \text{ON-OFF} & 0,4 \cdot 0,3 & 0,6 \cdot 0,7 & 0,6 \cdot 0,3 & 0,4 \cdot 0,7 \\ \text{OFF-ON} & 0,6 \cdot 0,7 & 0,4 \cdot 0,3 & 0,4 \cdot 0,7 & 0,6 \cdot 0,3 \\ \text{OFF-OFF} & 0,6 \cdot 0,3 & 0,4 \cdot 0,7 & 0,4 \cdot 0,3 & 0,6 \cdot 0,7 \\ \text{Mala} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

La cadena resultante es la que se muestra a continuación:

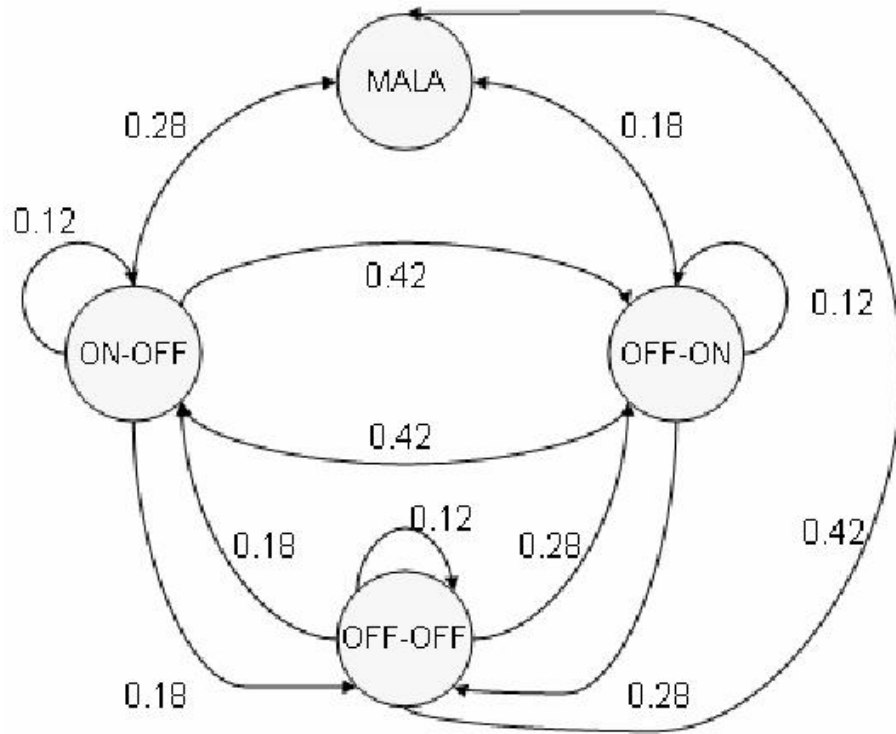
- b) Utilizaremos las herramientas de Markov con Beneficios para calcular el tiempo esperado en el transiente. De esta manera, calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n)$ se limita a encontrar el vector de relativos asintótico W y elegir la componente asociada al estado ON-OFF.

■ Caso ON-ON o OFF-OFF \Rightarrow FALLA:

De esta manera tendremos que resolver:

$$W_T = \begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot e_T$$

Para resolver este sistema NO se necesita invertir la matriz, si nos damos cuenta que comenzar en ON-OFF es equivalente a empezar en OFF-ON porque la situación es simétrica. Si multiplicamos por la matriz P_T debemos calcular:



$$\begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Así, } x = \frac{50}{23}$$

Podemos ver que el tiempo esperado antes de que la máquina falle será $\frac{50}{23}$.

■ Caso ON-ON \Rightarrow FALLA:

Nuevamente tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$W_T = \left[I - P_{TT} \right]^{-1} \cdot e_T$$

Donde P_{TT} es la submatriz de transición entre estados transientes. En este caso TAMPOCO es necesario invertir la matriz, y sólo es necesario resolver un sistema de 2x2 utilizando el mismo argumento de simetría de la parte anterior. As:

$$\begin{bmatrix} 1 - 0,12 & -0,42 & -0,18 \\ -0,42 & 1 - 0,12 & -0,28 \\ -0,18 & -0,28 & 1 - 0,12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

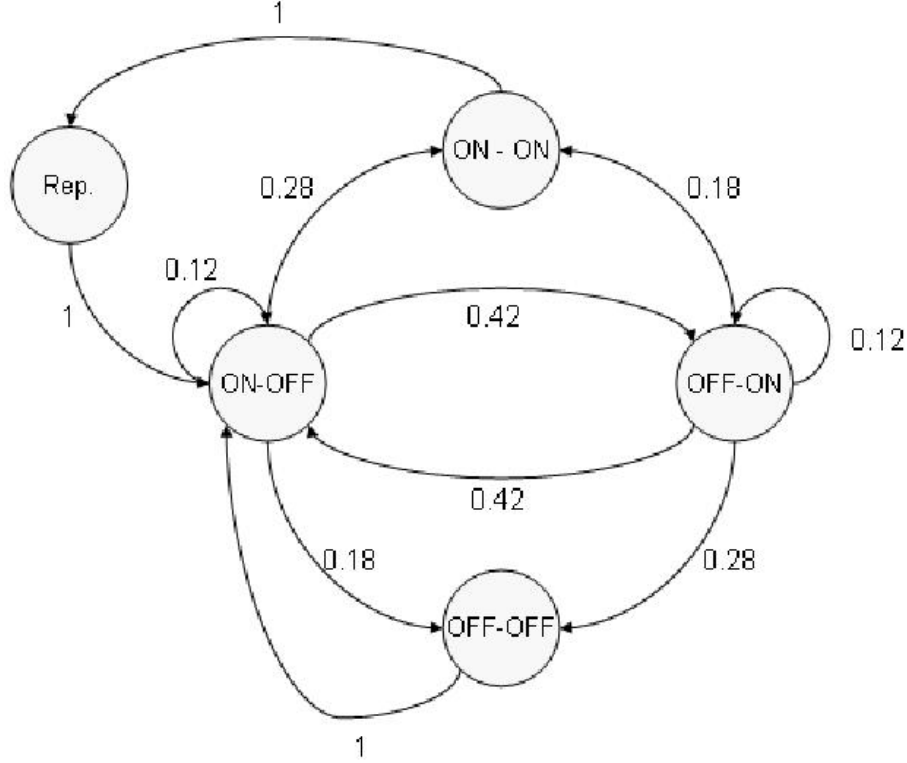
Ocupando la primera y tercera ecuación, se tiene que $y = \frac{10}{7}$ por lo que el tiempo esperado antes de fallar x será igual a

$$x = \frac{1 + 0,18 \cdot \frac{10}{7}}{0,46} = \frac{59}{23}$$

- c) En esta parte es necesario separar el motivo por el cual falla la máquina, además de introducir un estado que indique que la máquina está siendo reparada. Por esto bajo ambas interpretaciones, los desarrollos son los mismos. La matriz de transiciones en 1 etapa queda bien representada por:

	ON-OFF	OFF-ON	OFF-OFF	ON-ON	Rep
P=					
ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$	0
OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	0
OFF-OFF	1	0	0	0	0
ON-ON	0	0	0	0	1
Rep	1	0	0	0	0

La cadena toma la siguiente forma:



Podemos ver que existe una única clase recurrente aperiódica (formada por todos los estados), por lo que existirá una ley de probabilidades estacionarias.

- d) No estará operando una fracción $\pi_{\text{OFF-OFF}} + \pi_{\text{ON-ON}} + \pi_{\text{Rep}}$

Para calcular este valor es necesario resolver el sistema $\Pi = \Pi \cdot P$. Vamos a dejar todo en función de $\pi_{\text{ON-OFF}}$. Se tiene que:

$$\pi_{\text{OFF-ON}} = \frac{23}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$$

$$\pi_{\text{OFF-OFF}} = \pi_{\text{ON-ON}} = \pi_{\text{Rep}} = \frac{231}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$$

$$\pi_{\text{ON-OFF}} \left(1 + \frac{23}{50} + 3 \cdot \frac{231}{50}\right) = 1 \quad \text{donde se tiene que } \pi_{\text{ON-OFF}} = \frac{50}{766}$$

De esta manera, la fracción del tiempo que no estará operativo será $\frac{693}{766}$.

Para calcular el costo esperado de un período en el largo plazo hay que limitarse a calcular g .

Así se tendrá $g = C \cdot \pi_{\text{OFF-OFF}} + k \cdot \pi_{\text{ON-ON}}$

3. Problema 2 (parte Markov discreto), Control 2 Primavera 2002

En un cine del sector céntrico se está exhibiendo un exitoso show rotativo, con funciones de exactamente 1 hora de duración y una capacidad de N asientos.

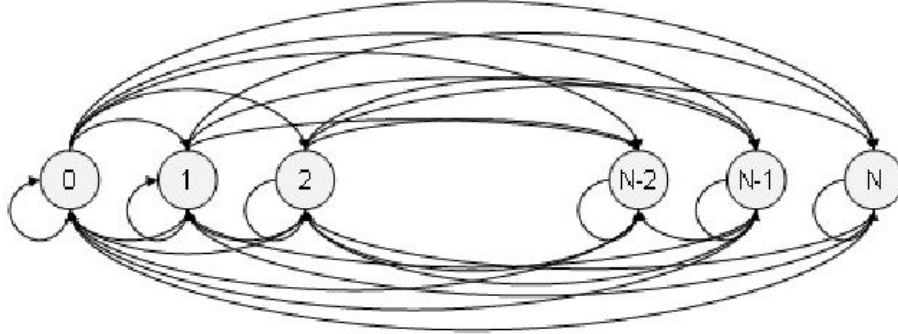
Los espectadores que están dentro de la sala pueden decidir quedarse y repetirse la función, lo que ocurre con una probabilidad r independiente de lo que hagan los demás. Cada vez que termina una

función, y se retiran los espectadores que ya se aburrieron del show, se permite la entrada de quienes están esperando afuera, mientras haya capacidad disponible. Si no hay lugar para todos, los que no pueden ingresar se retiran indignados. Los espectadores llegan a la puerta de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1 \frac{\text{espectadores}}{\text{minuto}}$.

- a) (3,0 pts) Modele el número de espectadores dentro del cine como una cadena de Markov. Explícite las probabilidades de transición de una etapa, comente la existencia de probabilidades estacionarias.

Solución:

- 1) Claramente debemos modelar la cantidad de personas al interior del cine al comienzo de una función (esto es después de que los que estaban dentro deciden irse y los que llegan por primera vez entran). La cadena asociada es la siguiente:



Del grafo asociado vemos que todos los estados están comunicados entre sí por transiciones directas.

Para definir la cadena por completo debo especificar cuáles son las probabilidades de transición entre pares de estados. Para esto utilizo probabilidades totales condicionando sobre el número de personas que está viendo la función y decide continuar:

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= \sum_{k=\max\{0, i-j\}}^i P_{ij}(\text{Dado que Se retiran } k) \cdot P[\text{Se retiran } k] \\
 &= \sum_{k=\max\{0, i-j\}}^i P_{ij}(\text{Dado que Se retiran } k) \cdot i k r^k (1-r)^{i-k}
 \end{aligned}$$

Sin embargo el termino restante dependerá de el valor de j:

$$P_{ij}(\text{Dado que Se retiran } k) = \begin{cases} \frac{\lambda_1^{(j-(i-k))} e^{-\lambda_1}}{(j-(i-k))!} & \text{si } j < N \\ \sum_{m=(j-(i-k))}^{\infty} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} & \text{si } j = N \end{cases}$$

Entonces tendremos que:

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=\max\{0, i-j\}}^i \frac{\lambda_1^{(j-(i-k))} e^{-\lambda_1}}{(j-(i-k))!} \cdot i k r^k (1-r)^{i-k} & j < N \\ \sum_{k=\max\{0, i-j\}}^i \sum_{m=(j-(i-k))}^{\infty} \frac{\lambda_1^m e^{-\lambda_1}}{m!} \cdot i k r^k (1-r)^{i-k} & j = N \end{cases}$$

2) **Problema 1, Control 2 Otoño 2003**

El lanzamiento del último modelo de una conocida marca de automóviles ha revolucionado el mercado nacional. Armijo Catalan, dueño de la franquicia de dicha marca, cuenta con un stock limitado de C de estos bólidos. Nuestro amigo, consciente del impacto de una buena política de precios en la rentabilidad del negocio ha decidido cobrar un precio de $P(i)$ [u.m.] por la venta del i -ésimo automóvil, esto es el primer auto se venderá en $P(1)$ [u.m.], el segundo se venderá en $P(2)$ [u.m.], etc.

Armijo ha estudiado largamente la demanda por automoviles de última generación y estima que la llegada de clientes con intenciones de comprar uno de estos se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa λ [Clientes/hora].

Armijo sabe que Z_k (el máximo precio que el k -ésimo cliente en llegar esta dispuesto a pagar) es una variable aleatoria de distribución común F . De esta forma el k -ésimo cliente en llegar solo comprará un bolido si el precio de venta es menor o igual a su precio de reserva Z_k .

Sea $Q(t)$ el proceso de conteo de autos vendidos hasta el instante t .

- a' (1,0 ptos.) Argumente el porque $Q(t)$ no un proceso de Poisson homogéneo ¿Cual es la esperanza de x_1 , tiempo transcurrido hasta la venta del primer automóvil?
- b' (1,0 ptos.) Si el primer automóvil se vende en el instante $x_1 = s$, ¿cual es la esperanza del número de clientes que han llegado a la automotora hasta ese instante?.
- c' (1,0 ptos.) Calcule la esperanza del tiempo transcurrido hasta que todos los autos son vendidos.
- d' (1,5 ptos.) Encuentre $P[Q(t)=1]$

Armijo Catalan desea que ninguno de sus clientes se vaya con las manos vacías por lo que les ofrece gratis un precioso bolígrafo. Un cliente que llega a la automotora (independiente de si compra o no) aceptará el lápiz con probabilidad q . Suponiendo que Armijo cuenta con muchos bolígrafos, responda:

- a' (1,5 ptos.) Si hasta t se han llevado n lápices, ¿cual es la probabilidad que el primer auto ya haya sido vendido?
- b' (Bonus, 1,5 ptos.) Encuentre la distribución de x_1 , el instante de la primera venta, condicional en que $Q(t) = 1$.¹ Con esto encuentre la esperanza del número de clientes que han visitado la automotora hasta el instante t condicional en que se ha vendido tan solo 1 automóvil.

Solución: Sea $N(t)$ el proceso de llegada de gente a la automotora.

- a' Claramente $Q(t)$ no es un proceso de Poisson homogéneo. Dado que la tasa de llegada de este proceso depende el número de unidades vendidas la propiedad de incrementos estacionarios y la de incrementos independientes no se cumplirán.
- b' Filtraremos el proceso $N(t)$ respecto a clientes que comprar el **primer** auto y clientes que no. La probabilidad que un cliente cualquiera compre el primer auto es $\bar{F}(P(1))$. Por lo tanto el proceso de llegada de clientes que compran el primer auto es Poisson de tasa $\lambda \cdot \bar{F}(P(1))$.

Notamos que este proceso de Poisson es idéntico al proceso de venta de automoviles $Q(t)$ hasta que el primer auto es vendido. En este instante nuestro proceso filtrado mantiene su tasa $\lambda \bar{F}(P(1))$ mientras que $Q(t)$ pasa a tener una tasa $\lambda \bar{F}(P(2))$. Dado que nuestros cálculos se refieren a instantes menores o iguales al instante de venta del primer auto el desarrollo es valido para $Q(t)$

Por otro lado nosotros sabemos que los tiempos entre llegadas de un proceso de poisson de tasa λ son variables aleatorias exponenciales de parámetro λ . Por esto tendremos que:

$$E[x_1] = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \bar{F}(P(1)) \cdot e^{-\lambda \bar{F}(P(1))t} dt = \frac{1}{\lambda \bar{F}(P(1))}$$

¹Utilice que $P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] = P[Q(s) = 1 | Q(t) = 1]$

c' Nuevamente filtramos $N(t)$. El proceso de personas que llegan hasta la automotora y no comprar, para t menores al instante de venta del primer auto es Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(1))$.

Entonces $N(t) - Q(t)$ hasta el instante de la primera venta se comporta como un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(1))$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[N(t)|x_1 = t] &= 1 + E[N(t) - Q(t)] \\ &= 1 + \lambda \cdot F(P(1)) \cdot t \end{aligned}$$

d' Como vimos, si filtramos el proceso de llegada de clientes hasta el instante de la venta del primer auto concluiremos que el proceso de venta hasta ese instante es poisson de tasa $\lambda \bar{F}(P(1))$. Desde ese instante en adelante (y reiniciando nuestro reloj) tendremos que el proceso de llegada de clientes que compran es Poisson de tasa $\lambda \bar{F}(P(2))$. De esta forma, desde el instante de la venta del (i-1)-ésimo automóvil el proceso de venta es Poisson de tasa $\lambda \bar{F}(P(i))$ hasta el instante de venta del i-ésimo. Ahora, dado que el tiempo entre arribos de un proceso de Poisson se distribuye exponencial tendremos que:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \sum_{i=1}^C x_i$$

Donde $x_i \rightsquigarrow \exp(\lambda \cdot \bar{F}(P(i)))$, tiempo entre llegadas del proceso. De esta forma:

$$E[\text{Tiempo total de venta}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^C \frac{1}{\bar{F}(P(i))}$$

e' Claramente de la parte 1 $x_1 \rightsquigarrow \exp(\lambda \cdot \bar{F}(P(1)))$. Condicionando sobre el instante de venta del primer auto vemos que (suponiendo que $P(1) \neq P(2)$):

$$\begin{aligned} P[Q(t) = 1] &= \int_0^t P[Q(t) = 1 | x_1 = s] \cdot \lambda \cdot \bar{F}(P(1)) e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(1))s} ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(2))(t-s)} \cdot \lambda \cdot \bar{F}(P(1)) e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(1))s} ds \\ &= \frac{\bar{F}(P(1))}{\bar{F}(P(1)) - \bar{F}(P(2))} \left[e^{-\lambda \bar{F}(P(2))t} - e^{-\lambda \bar{F}(P(1))t} \right] \end{aligned}$$

f' Calculemos primero la probabilidad de no haber vendido el auto. Sean:

$N^x(t)$ = proceso de llegada de gente que no se lleva lápices y que compra.

$N^l(t)$ = proceso de llegada de gente que se lleva lápices.

Hasta x_1 , $N^x(t)$ tiene tasa $\lambda \cdot \bar{F}(P(1)) \cdot (1-q)$ y $N^l(t)$ tiene tasa $\lambda \cdot q$. Ahora simplemente debemos imponer que ninguno de estos tipos haya llegado hasta t y además que de los n que se llevaron lápices ninguno haya comprado. Esto es:

$$\begin{aligned} P[x_1 > t | N^l(t) = n] &= P[N^x(t) = 0] \cdot F(P(1))^n \\ &= e^{-\lambda \cdot \bar{F}(P(1)) \cdot (1-q) \cdot t} \cdot F(P(1))^n \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad que buscamos es:

$$P[x_1 \leq t | N^l(t) = n] = 1 - P[x_1 > t | N^l(t) = n]$$

g' **Bonus.** Encontraremos $P[x_1 \leq s | Q(t) = 1]$, con $t \geq s$, usando el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] &= \frac{P[Q(s) = 1 | Q(t) = 1]}{P[Q(t) = 1]} \\ &= \frac{P[Q(t) = 1 | Q(s) = 1] \cdot P[Q(s) = 1]}{P[Q(t) = 1]} \end{aligned}$$

Pero

$$P[Q(t) = 1 | Q(s) = 1] = e^{-\lambda \bar{F}(P(2))(t-s)}$$

Utilizando el resultado del punto 4 vemos que:

$$P[x_1 \leq s | Q(t) = 1] = \frac{e^{-\lambda \bar{F}(P(2))(t-s)} \cdot [e^{-\lambda \bar{F}(P(2))s} - e^{-\lambda \bar{F}(P(1))s}]}{[e^{-\lambda \bar{F}(P(2))t} - e^{-\lambda \bar{F}(P(1))t}]}$$

Entonces $f(x_1 | Q(t) = 1) = \frac{d(P[x_1 \leq s | Q(t) = 1])}{ds}$

Sea $R(t)$ el número de clientes que han llegado dado que hasta t solo se ha vendido un auto. A partir del instante de la primera venta la intensidad de llegada (la tasa) varia. Entonces para responder esta parte debemos identificar el punto en el cual la tasa varia. Sin embargo nosotros sabemos la distribución de dicho punto (de parte anterior). Definiendo $N_i(t)$ como un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot F(P(i))$, tendremos que:

$$\begin{aligned} E[R(t) | x_1 = s] &= 1 + E[N_1(s)] + E[N_2(t-s)] \\ &= 1 + (\lambda \cdot F(P(1)) \cdot s) + (\lambda \cdot F(P(2)) \cdot (t-s)) \end{aligned}$$

Descondicionando:

$$\begin{aligned} E[R(t)] &= \int_0^t E[R(t) | x_1 = s] \cdot f(s | Q(t) = 1) ds \\ &= 1 + \int_0^t ((\lambda \cdot F(P(1)) \cdot s) + (\lambda \cdot F(P(2)) \cdot (t-s))) \cdot f(s | Q(t) = 1) ds \end{aligned}$$

No es necesario desarrollar más la expresión.

3) **Problema 1, Control 2 Primavera 2003**

Un Centro Médico es atendido por un único médico conocido como **Pepe**, ex-vocalista del famoso grupo **Pepe y Los Markovianos**. La sala de espera de la consulta tiene capacidad para sólo dos personas, y los pacientes que llegan y encuentran ambos espacios ocupados se retiran indignados.

Según datos históricos, **Pepe** sabe que el tiempo que transcurre desde que un paciente comienza a ser atendido hasta que se va de la consulta, es exactamente una hora para una fracción p de los clientes, y de dos horas para una fracción q , con $q = 1 - p$. Ningún paciente permanece más de dos horas siendo atendido por el médico.

Las distribuciones de probabilidad de la cantidad de pacientes que llegan al consultorio en una hora son conocidas. La probabilidad que lleguen en una hora k pacientes, dado que al comienzo de esta hora había i pacientes dentro del local es α_{ik} .

Al comienzo de cada hora, si el doctor está desocupado acude a la sala de espera del Centro. Si hay pacientes esperando, atiende al que corresponda, según orden de llegada. Si la sala de espera está vacía no atenderá pacientes durante **toda** esa hora, y se dedicará a rememorar

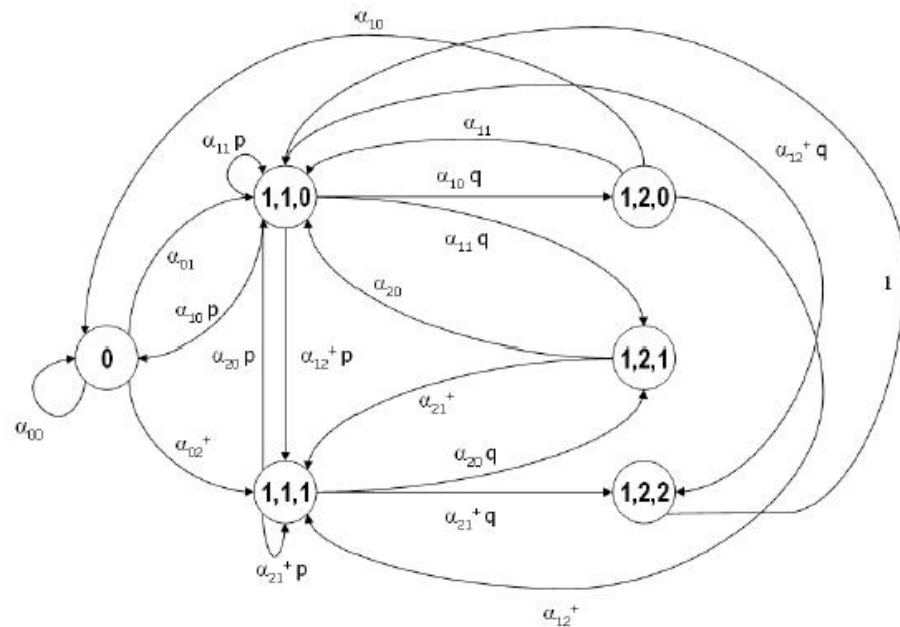
viejos tiempos desempolvando su guitarra del baúl de los recuerdos. No obstante, mientras el doctor no está atendiendo, los pacientes pueden seguir llegando al Centro Médico y entrarán en el caso que hayan lugares disponibles para esperar. En caso que un paciente entra al sistema en esta situación tendrá la fortuna de escuchar los viejos éxitos de Pepe.

Por último, suponga que inicialmente el consultorio está vacío con el doctor tocando guitarra, y que el médico atiende por suficiente tiempo tal que se alcanza el régimen estacionario.

- a'* (3,0 pts.) Modele el estado de ocupación del Centro Médico al comienzo de cada hora, como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Encuentre las probabilidades de transición en función de las probabilidades α_{ik} y del resto de los parámetros del problema. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
- b'* Considere que al médico le interesa conocer el comportamiento del sistema en el Largo Plazo, para lo cual requiere conocer las expresiones que se detallan a continuación. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias, calcule:
- c'* (1,0 pto.) La esperanza de la cantidad de pacientes que en una hora, se retiran indignados sin poder ingresar al Centro Médico.
- d'* (1,0 pto.) La probabilidad de que un paciente que logra entrar al sistema, sea atendido al comienzo del período siguiente al de su arribo. Asuma que el tiempo entre llegada de pacientes son variables aleatorias exponenciales i.i.d de parámetro λ_i si al inicio de la hora correspondiente hay i personas dentro del consultorio.
- e'* (1,0 pto.) La cantidad promedio de pacientes que en una hora, disfrutan de la música de Pepe.

Solución:

- a'* La cadena se muestra en la siguiente figura:



El estado (0) representa el consultorio vacío. Por otro lado en los estados de la forma (a,b,c) , a es el número de personas en atención, b en la hora de atención en que se encuentra y c la cantidad de personas esperando.

Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Por lo tanto, existen probabilidades estacionarias.

- b'* En esta parte consideramos conocido el vector Π de probabilidades estacionarias.
- c'* Para responder a esta pregunta debemos ver que condiciones deben darse en cada estado para que existan pacientes que se retiren indignados. Esto sucede en los siguientes casos:
- (0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo (i.e., a partir del tercero).

- (1, 1, 0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
- (1, 1, 1): Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
- (1, 2, 0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
- (1, 2, 1): Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
- (1, 2, 2): Todos los pacientes que lleguen.

Por lo tanto, denotando por E_1 a la esperanza de la cantidad de pacientes que una hora se retiran indignados se tiene que

$$E_1 = \Pi_0 \cdot \sum_{k \geq 2} (k-2) \cdot \alpha_{0k} + \Pi_{(1,1,0)} \cdot \sum_{k \geq 2} (k-2) \cdot \alpha_{1k} + \Pi_{(1,1,1)} \cdot \sum_{k \geq 1} (k-1) \cdot \alpha_{2k} \\ + \Pi_{(1,2,0)} \cdot \sum_{k \geq 2} (k-2) \cdot \alpha_{1k} + \Pi_{(1,2,1)} \cdot \sum_{k \geq 1} (k-1) \cdot \alpha_{2k} + \Pi_{(1,2,2)} \cdot \sum_{k \geq 0} k \cdot \alpha_{3k}.$$

d' Si un paciente logró entrar al sistema pudo haberlo hecho en los siguientes estados: (0), (1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 1) o (1, 2, 1). Por lo tanto, dado que el paciente entró al sistema, los “casos favorables” a considerar son los asociados a estos cinco estados. Para determinar los “casos favorables” analicemos lo que sucede en cada uno de estos estados.

- Estados (1, 1, 1) y (1, 2, 1): En estos estados el paciente nunca será atendido en la siguiente hora, ya que ya había una persona esperando y ella será atendida antes (recuerde que el médico atiende por orden de llegada).
- Estado (0): El paciente será atendido en la próxima hora si es el primero en llegar. Esto puede suceder si es el único en llegar o si llegan más de uno y es el primero de ellos.
- Estado (1, 1, 0): Este caso es análogo al anterior, pero hay que considerar la posibilidad de que el paciente que actualmente se está atendiendo requiera una segunda hora con el médico.
- Estado (1, 2, 0): Este caso es análogo al caso del estado (0).

Denotemos por Π_{CT} a la probabilidad de estar en alguno de los cinco estados “favorables”, es decir

$$\Pi_{CT} = \Pi_0 + \Pi_{(1,1,0)} + \Pi_{(1,2,0)} + \Pi_{(1,1,1)} + \Pi_{(1,2,1)}.$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{1}{\Pi_{CT}} \left[\Pi_0 \left(\alpha_{01} + \frac{1}{2} \alpha_{02}^+ \right) + \Pi_{(1,1,0)} \cdot p \left(\alpha_{11} + \frac{1}{2} \alpha_{12}^+ \right) + \Pi_{(1,2,0)} \left(\alpha_{21} + \frac{1}{2} \alpha_{22}^+ \right) \right]$$

4) Problema 3, Control 1 Primavera 2003

Problema 3

A una tienda comercial llegan clientes según un proceso Poisson de tasa λ [clientes/semana]. La tienda ofrece dos productos: Tipo A y Tipo B. Cada uno de los clientes que llega a la tienda está interesado en un determinado tipo de productos. Específicamente, un cliente cualquiera está interesado en el producto Tipo A con probabilidad q_A y en el producto Tipo B con probabilidad q_B (observe que $q_A + q_B = 1$). Los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto correspondiente. Además, cada cliente compra, a lo más, una unidad del producto que desea.

Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta. Entendemos por disposición a pagar la mayor cantidad de dinero que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto. Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar d_i de un cliente cualquiera interesado en el producto i es una variable aleatoria con función de densidad $f_i(d_i)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F_i(d_i)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor o igual que el precio al que la tienda lo vende, siempre que la tienda tenga productos en inventario; en caso contrario se va sin comprar. Suponga que la tienda dispone de inventarios iniciales S_A y S_B para cada uno de los productos, y que no es posible reabastecerse en ninguno de las T semanas del horizonte bajo estudio.

Por último, suponga que los precios unitarios a cobrar por cada producto son P_A y P_B , respectivamente.

1. (1,0 pto.) Si un cliente llega interesado en el producto Tipo i ¿Cuál es la probabilidad que este cliente esté dispuesto a comprarlo? ¿Cuál es la probabilidad de que el stock del producto i se agote antes del final de la semana t desde el inicio de la temporada ($0 < t < T$)?
2. Dado que en las primeras t_1 semanas de la temporada llegaron R clientes a la tienda, con $R > S_A$, responda:
 - a) (0,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan vendido n productos tipo A?
 - b) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que en la primeras t_2 semanas de atención se hayan vendido más productos Tipo A que Tipo B? ($t_1 > t_2 > 0$).
3. (1,5 ptos.) Encuentre la función de distribución de probabilidades la cantidad de productos Tipo B que se venden antes de la venta del primer producto Tipo A ¿Cuál es la probabilidad de que se agote el stock de productos Tipo B, antes de que se venda el primer producto Tipo A?
4. (0,5 ptos.) Calcule la esperanza de la cantidad total de productos en stock al final del horizonte.
5. (1,0 pto.) Entregue una expresión para el ingreso esperado por ventas en el horizonte de T semanas bajo estudio.

Solución:

En lo que sigue, se usará la siguiente notación:

$N(t)$ = # total de clientes que llegan hasta t

$N_i(t)$ = # de clientes que llegan hasta t interesados en producto i y con disposición a pagar mayor al precio

\bar{q}_i = Prob. que un cliente esté interesado en producto tipo i y con disposición a pagar mayor al precio.

- a' Para que un cliente que llega interesado en el producto Tipo i de precio P_i , lo compre se debe tener que la disposición a pagar por dicho producto d_i sea mayor o igual al precio del producto. Luego la probabilidad pedida es:

$$P[d_i \geq P_i] = 1 - P[d_i < P_i] = 1 - F_i(P_i) = \bar{F}_i(P_i)$$

El proceso de demanda del producto **Tipo i** también es un Proceso de Poisson. Dada una probabilidad de demanda para el producto **Tipo i** igual a:

$$\bar{q}_i = q_i \cdot \bar{F}_i(P_i)$$

se tiene que la llegada de clientes que demandan un producto **Tipo i** sigue un proceso de poisson de tasa:

$$\bar{\lambda}_i = \lambda \cdot \bar{q}_i$$

entonces la probabilidad que $N_i(t)$ sea igual a k , será:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\bar{\lambda}_i \cdot t)^k e^{-\bar{\lambda}_i \cdot t}}{k!}$$

Luego para que para calcular la probabilidad de que el stock del producto **Tipo i** se agote antes del final de la semana t se tiene que la demanda debe ser mayor al inventario disponible al principio de la temporada. Es decir:

$$P[N_i(t) \geq S_i] = \sum_{k=S_i}^{\infty} P[N_i(t) = k]$$

b'

c' Dado que la probabilidad que c/u de los R clientes que llegaron, independiente de los demás, demanden el producto **Tipo A** es $\bar{q}_A = q_A \cdot \bar{F}_A(P_A)$, se tiene que:

$$P[N_A(t_1) = n / N(t_1) = R] = \begin{cases} Rn(\bar{q}_A)^n(1 - \bar{q}_A)^{R-n} & \text{si } n < S_A \\ \sum_{k=S_A}^{\infty} Rk(\bar{q}_A)^k(1 - \bar{q}_A)^{R-k} & \text{si } n = S_A \\ 0 & \text{si } n > S_A \end{cases}$$

d' Para calcular la probabilidad de que se vendan más productos **Tipo A** durante las primeras t_2 semanas es necesario conocer la distribución de probabilidades de la cantidades demandadas de cada producto en dicho intervalo de tiempo.

Dado que el instante de llegada de c/u de los R clientes que llegaron a la tienda en las primeras t_1 sigue una distribución Uniforme en el intervalo $[0, t_1]$, la probabilidad que un cliente en particular llegue en las primeras t_2 semanas y demande un producto **Tipo i**, será:

$$\bar{q}_i^{t_2} = \frac{t_2}{t_1} \cdot \bar{q}_i = \frac{t_2}{t_1} \cdot q_i \cdot \bar{F}_i(P_i)$$

Es importante notar que el proceso inicial de llegada se filtra en los 3 siguientes Procesos de Poisson:

- Proceso de llegada de clientes que demandan el producto **Tipo A** antes de t_2 .
- Proceso de llegada de clientes que demandan el producto **Tipo B** antes de t_2 .
- Proceso de llegada de clientes interesados en uno de los 2 productos pero que no lo demandan antes de t_2 , más los clientes que llegan después de t_2 .

Para calcular la probabilidad pedida es necesario conocer la distribución de probabilidades de la cantidad de llegadas de cada uno de los procesos. Sea $r_{(n_A, n_B, R)}^{t_2}$, la probabilidad de que hasta el instante t_2 la demanda por el producto Tipo A sea n_A , por el producto Tipo B sea n_B , y el resto de las llegadas correspondan al tercer proceso de llegada.

Luego, se tiene que:

$$r_{(n_A, n_B, R)}^{t_2} = \frac{R!}{n_A! n_B! (R - (n_A + n_B))!} (\bar{q}_A^{t_2})^{n_A} (\bar{q}_B^{t_2})^{n_B} (1 - (\bar{q}_A^{t_2} + \bar{q}_B^{t_2}))^{R - (n_A + n_B)}$$

Luego la probabilidad de que en las primeras t_2 semanas de atención se hayan vendido más productos Tipo A que Tipo B está dada por:

- Si $S_A > S_B$.

$$P[\text{Ventas A} > \text{Ventas B}] = \sum_{n_A=1}^{S_B} \sum_{n_B=0}^{n_B^*} r_{(n_A, n_B, R)}^{t_2} + \sum_{n_A=S_B+1}^R R n_A (\bar{q}_A)^{n_A} (1 - \bar{q}_A)^{R - n_A}$$

donde: $n_B^* = \min(n_A - 1, R - n_A)$

- Si $S_A \leq S_B$.

$$P[\text{Ventas A} > \text{Ventas B}] = \sum_{n_A=1}^{S_A-1} \sum_{n_B=0}^{n_B^*} r_{(n_A, n_B, R)}^{t_2} + \sum_{n_A=S_A}^R \sum_{n_B=0}^{n_B^{**}} r_{(n_A, n_B, R)}^{t_2}$$

donde: $n_B^{**} = \min(S_A - 1, R - n_A)$

e' Dado que los tiempos entre llegadas de un proceso de Poisson de tasa λ son variables aleatorias que siguen una distribución exponencial de parámetro λ , se tiene que para calcular la probabilidad pedida se debe "hacer competir" las exponenciales que rigen las demandas de ambos productos.

Sea $P[N_B^k]$ la probabilidad que se vendan k productos Tipo B antes del primero Tipo A. Luego se tiene que:

$$P[N_B^k] = \begin{cases} \left(\frac{\bar{\lambda}_B}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right)^k \cdot \left(\frac{\bar{\lambda}_A}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right) & \text{si } k < S_B \\ \left(\frac{\bar{\lambda}_B}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right)^{S_B} & \text{si } k = S_B \\ 0 & \text{si } k > S_B \end{cases}$$

Por otro lado la probabilidad de que se agote el stock de productos Tipo B, antes de que se venda el primer producto Tipo A está dado por:

$$P[\text{Agota B antes de primera venta de A}] = \left(\frac{\bar{\lambda}_B}{\bar{\lambda}_A + \bar{\lambda}_B} \right)^{S_B}$$

f' La esperanza de la cantidad total de productos en stock al final del horizonte es la suma de la esperanza de los productos en stock de cada tipo en dicho instante. Luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[S^T] &= E[S_A^T] + E[S_B^T] \\
&= \sum_{k=0}^{S_A} (S_A - k) \cdot P[N_A(T) = k] + \sum_{k=0}^{S_B} (S_B - k) \cdot P[N_B(T) = k]
\end{aligned}$$

donde:

$$P[N_i(t) = k] = \frac{(\bar{\lambda}_i \cdot t)^k e^{-\bar{\lambda}_i \cdot t}}{k!}$$

g' La esperanza de los ingresos por ventas está dada por:

$$E[\text{Ingresos}] = \sum_{i=A,B} P_i \left[\sum_{k=1}^{S_i} i \cdot P[N_i(T) = k] + \sum_{k=S_i+1}^{\infty} S_i \cdot P[N_i(T) = k] \right]$$

5) **Problema 2, Control 1 Primavera 2003**

Tras una celebre visita a Haiti, el alcalde de Santiago ha decidido centrar sus esfuerzos en la elección de su reemplazante como edil de la capital. Para esto Joaquín se ha reunido con su equipo de asesores, todos ellos ingenieros civiles industriales. La situación inicial de la campaña electoral es la siguiente: Existe un total de N personas registradas para participar en la próxima elección del alcalde de Santiago. Cada una de estas personas puede votar a favor del candidato de la Alianza por Chile o por el candidato de la Concertación.

Tras un arduo trabajo estadístico el equipo a logrado descifrar el comportamiento electoral de los habitantes de la comuna de Santiago.

De acuerdo a la evidencia empírica recolectada, un votante normal apoyará a un candidato dependiendo del resultado actual de las encuestas. Esto es, si al comienzo de una semana cualquiera, las encuestas indican que k personas apoyan uno de los candidatos, entonces con probabilidad k/N la persona apoyará a ese candidato al comienzo de la próxima semana.

Uno de los asesores de Lavin afirma que el comportamiento electoral de las personas recién descrito es tan solo cierto para las personas que apoyan al candidato que va perdiendo en las encuestas, mientras que las personas que apoyan al candidato que va ganando solo cambiarán de opinión de acuerdo a una probabilidad q_c , independiente del resultado de las encuestas, y fuese ganando el candidato de la Concertación y q_a en el caso de la Alianza. Considere N impar.

1. (1,5 ptos.) Suponiendo que el candidato de la alianza va arriba en las encuestas con k votos, ¿cuál es la probabilidad que j votantes que piensan en apoyar al candidato de la concertación cambien de opinion? cuál es la probabilidad que i votantes que prefieren al candidato de la alianza cambien de parecer?
2. (1,5 ptos.) Modele el número de personas que votaría por el candidato de la Alianza por Chile al comienzo de cada semana como una cadena de markov en tiempo discreto. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Denomine a esta ley π_{q_c, q_a} .

Considere ahora que ambas coaliciones políticas deben elegir quienes serán sus candidatos. Cada una cuenta con 2 posibles candidatos (póngales nombre) que deben ser definidos en las próximas semanas.

Diariamente, los partidos anuncian quien sería su candidato en el caso de tener que elegir uno. La dinámica de estos anuncios es la siguiente: Si al comienzo de un día el pre-candidato de la Concertación (Alianza) es la opción X (A o B) entonces con probabilidad $P_a(X)$ ($P_c(X)$) a la mañana siguiente el pre-candidato de la alianza (Concertación) habrá cambiado.

Suponga que las inscripciones de los candidatos se realiza en 1 mes más y que a partir de entonces se comienzan a realizar encuestas (las que durarán 5 meses hasta el instante de las elecciones). Además suponga que las probabilidades q_c y q_a indicadas al comienzo de este enunciado dependen del candidato escogido por cada partido.

$$q_a(A) = 0,3 \quad q_a(B) = 0,6 \quad q_c(A) = 0,4 \quad q_c(B) = 0,2$$

3. (1,0 ptos.) Modele la evolución diaria de las pre-candidaturas a alcalde de Santiago como una cadena de Markov en tiempo discreto. Justifique existencia de probabilidades estacionarias
4. (1,0 ptos.) Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la parte 2, encuentre una expresión para la probabilidad de que el proximo alcalde de Santiago pertenezca al oficialismo.
5. (1,0 ptos.) Suponiendo que si un pre-candidato se mantiene en las preferencias de su partido durante 2 días consecutivos entonces su candidatura es definitiva, modele nuevamente la evolución diaria de las pre-candidaturas. Justifique o rechace la existencia de probabilidades estacionarias.

1. Si el candidato de la Alianza va arriba con k votos, la concertación tiene $N-k$ votos. Dado que van perdiendo la probabilidad que cada uno de ellos se cambie es $\frac{k}{N}$. La probabilidad que se cambien j será entonces:

$$R_C(k, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > j > N - k \\ \binom{N-k}{j} \left(\frac{k}{N}\right)^j \cdot \left(\frac{N-k}{N}\right)^{N-k-j} & \sim \end{cases}$$

Cada uno de los adherentes al candidato de la Alianza se cambiará con probabilidad q_a . La probabilidad que se cambien i será entonces:

$$B_A(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > i > k \\ \binom{k}{i} q_a^i \cdot (1 - q_a)^{k-i} & \sim \end{cases}$$

2. La forma de la cadena es más o menos obvia, $N+1$ nodos donde el estado representa el número de personas apoyando al candidato de la alianza.

Usaremos las prob. calculadas antes más las derivadas del caso cuando la concertación va ganando en las encuestas. Así las funciones que utilizaremos serán $R_A(i)$, $R_C(j)$ (que tienen la misma forma) y $B_A(i)$ y $B_C(j)$ calculadas con q_a y q_c respectivamente

Las transiciones son posibles entre cada par de estado. Para calcular las prob. de transición condicionamos sobre el número de personas que votaban por la alianza y ahora se cambian a la concertación. Claramente distinguimos sobre quien va ganando las encuestas para conocer las probabilidades de cambio individuales.

El caso genérico es fácil de construir con las probabilidades calculadas en las partes anteriores. Si k personas votan actualmente por la alianza y i de ellas cambian de bando entonces para que finalmente h personas voten por la alianza es necesario que $N - k - (h - i)$ de las $N - k$ personas que votan por la concertación cambien de bando.

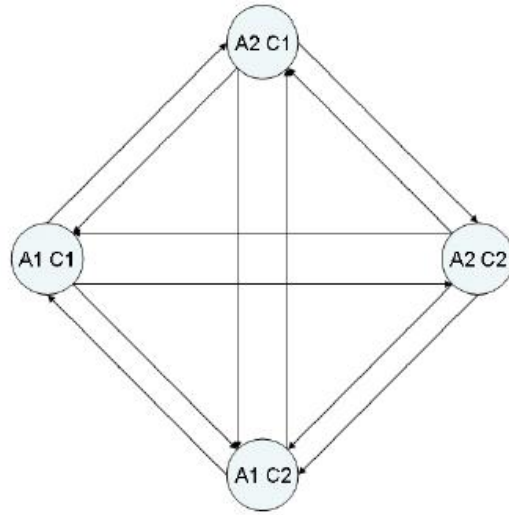
- Caso 1: $k > n/2$ (Gana la alianza).

$$P_{kh} = \sum_{i=0}^k R_A(i) \cdot B_C(N - k - (h - i))$$

- Caso 2: $k < n/2$ (Gana la concertación).

$$P_{kh} = \sum_{i=0}^k B_A(i) \cdot R_C(N - k - (h - i))$$

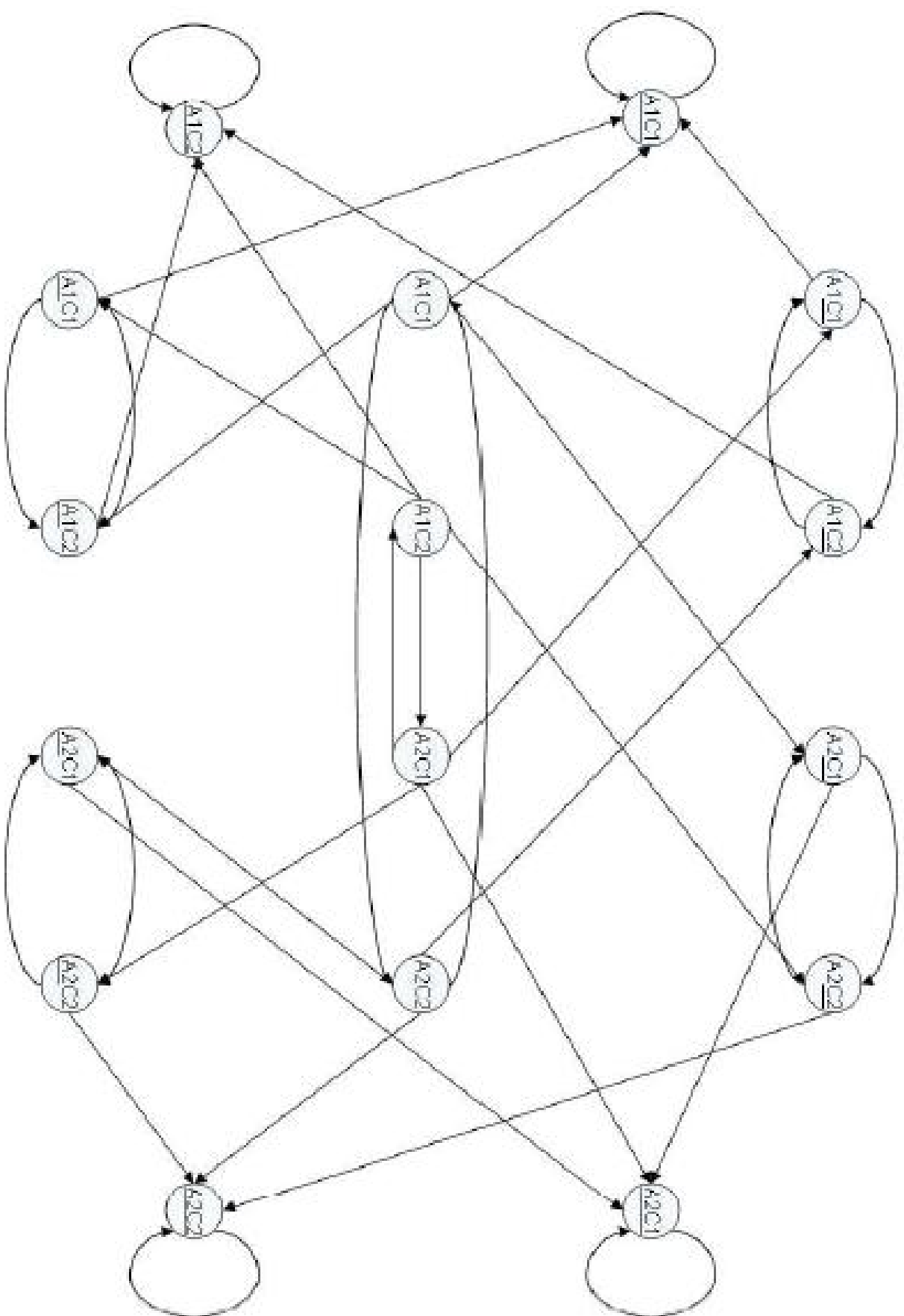
2. La cadena es la que se muestra a continuación:



La matriz de Transición es la siguiente (considerando los estados el siguiente orden: A1C1, A1C2, A2C1, A2C2 y denotando $P' = (1 - P)$)

$$\begin{pmatrix} P'_A(C1)P'_C(A1) & P'_A(C1)P_C(A1) & P_A(C1)P'_C(A1) & P_A(C1)P_C(A1) \\ P'_A(C2)P_C(A1) & P'_A(C2)P'_C(A1) & P'_A(C2)P'_C(A1) & P_A(C2)P'_C(A1) \\ P_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P'_C(A2) & P'_A(C1)P_C(A2) \\ P_A(C2)P_C(A2) & P_A(C2)P'_C(A2) & P'_A(C2)P_C(A2) & P'_A(C2)P'_C(A2) \end{pmatrix}$$

4. La cadena es la que se muestra a continuación (Cuando un candidato esta marcado significa que es candidato definitivo.):



6) **Problema 1, Control 2 Otoño 2005**

Considere la situación de Armijo Catalán, quien vive al costado de una de las recientemente inauguradas autopistas concesionadas. Armijo debe, al comienzo de cada día, caminar hasta la pasarela más cercana con el propósito de cruzar la carretera y de esa forma tomar locomoción que lo lleve a su lugar de trabajo. El problema de Armijo es que la pasarela más cercana se encuentra a 3 km de distancia.

Armijo ha llegado constantemente tarde a su trabajo por lo que ha sido advertido por su empleador de que el próximo retraso desencadenará irremediablemente su despido.

Lamentablemente esta mañana Armijo se ha levantado nuevamente tarde y su única opción para evitar un nuevo retraso es cruzar la carretera directamente, sin caminar hasta la pasarela. Para empeorar las cosas, esta mañana existe una neblina tal que Armijo sólo puede ver los vehículos cuando pasan frente a él. Además considere que los automovilistas tampoco ven a Armijo.

Armijo, que ha observado por varias horas el flujo vehicular a esas horas de la mañana, ha logrado recopilar los siguientes datos:

- Ambas vías, la que va hacia el sur (que es la primera que debe enfrentar Armijo) y la que va hacia el norte poseen solo una pista. A lo ancho de cada pista cabe exactamente un vehículo. Consideraremos que los vehículos son *idénticos*: tienen largo L , ancho A y viajan a rapidez constante V .
- La distancia entre la parte de atrás de un vehículo y la parte delantera del próximo en pasar (por la misma pista) se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro λ_s para la pista hacia el sur y parámetro λ_n para la pista hacia el norte.
- Entre ambas pistas existe un bandejón con el espacio exacto para que quepa una persona, sin ser pasada a llevar por los vehículos de ambas pistas. El ancho de este bandejón es una distancia despreciable con respecto al ancho de las pistas.

Considerando dicha información, Armijo se decide a cruzar la carretera. Para esto ocupará la siguiente estrategia: Esperará que pase el próximo auto hacia el sur y correrá hasta el bandejón central. Luego esperará que pase el siguiente auto hacia el Norte y cruzará corriendo (considere que Armijo corre a una velocidad W y que es extremadamente flaco).

a' (1,0 Pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo muera atropellado?

b' (1,0 Pto.) Comente la estrategia de Armijo y compárela con la versión simplificada “corre si es que puedes”².

Tras algunos minutos en que ningún auto ha pasado, Armijo nota que la neblina se despeja, por lo que modifica su estrategia a “no morir”³.

a' (1,5 Ptos.) Calcule el tiempo esperado que Armijo demorará en cruzar la carretera si él decide que durante el lapso de tiempo que se encuentre cruzando la carretera no debe pasar ningún automóvil (por ninguna de las pistas).

Finalmente Armijo se confunde y decide aceptar el hecho de que llegará tarde al trabajo y que será despedido. Con esto Armijo decide no intentar cruzar la carretera y dedicará la tarde a contar automóviles.

a' (1,5 Ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que tras t horas de observación haya visto pasar más de N automóviles yendo hacia el sur? ⁴

²Esto es: Cruzar la pista sur si no hay ningún vehículo pasando frente a Armijo. Una vez que cruza esta primera pista, repite el procedimiento en la pista norte.

³Esto es: no cruzar una pista si el próximo vehículo que pasará arrollará a Armijo (suponga que Armijo es capaz de determinar con certeza la distancia entre dos puntos cualesquiera).

⁴Considere que Armijo “ha visto pasar” un auto, cuando el auto ha pasado completamente frente a lugar donde Armijo se encuentra.

- b' (1,0 Pto.) Considere ahora que Armijo sólo distingue objetos que se encuentran a una distancia de hasta K km. Si tan sólo un automóvil ha pasado (completo) tras t horas de observación, ¿cuál es la probabilidad de que Armijo aún pueda distinguirlo a la distancia?

Solución:

- a' Si Armijo corre a una velocidad W demorará A/W en cruzar cada pista. Luego de dejar pasar el primer auto por la pista sur correrá y será atropellado si la distancia entre los autos no es la suficiente para cruzar completamente esta pista. Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{Muera atropellado pista sur}] &= P[\text{Tiempo entre autos} \leq \frac{A}{W}] \\ &= P[\text{Distancia entre autos} \leq V \cdot \frac{A}{W}] \\ &= 1 - e^{-\lambda_s \cdot V \cdot \frac{A}{W}} \end{aligned}$$

(Notar entonces que el tiempo entre automóviles en la pista sur distribuye según una exponencial de parámetro $(\lambda_s V)$; para la pista norte se puede obtener un resultado análogo).

De llegar al medio deberá enfrentar la misma situación en la pista hacia el norte. Entonces, la probabilidad de morir atropellado será:

$$\begin{aligned} P[\text{Morir}] &= P[\text{Morir pista sur}] + P[\text{No Morir pista sur}] \cdot P[\text{Morir pista Norte}] \\ &= 1 - e^{-(\lambda_n + \lambda_s) \cdot V \cdot \frac{A}{W}} \end{aligned}$$

- b' En la versión simplificada de la estrategia Armijo corre si es que no se encuentra con un automóvil pasando. Dado que el tiempo entre el paso de dos automóviles por una misma pista es proporcional a la distancia entre ellos (velocidad constante), el tiempo también se distribuye de manera exponencial. Por lo tanto el tiempo entre pasada de automóviles tiene pérdida de memoria. Esto significa que “no tiene sentido esperar” por el paso de un automóvil para correr, dado que la distribución del tiempo entre la pasada del primer auto y la llegada del segundo (que ve Armijo) es la misma que la del tiempo de la próxima llegada cuando Armijo llega al borde de la pista.

Entonces, ambas estrategias tienen asociada la misma probabilidad de muerte para Armijo, sólo que la versión simplificada siempre obtiene tiempos de cruce menores o iguales a la estrategia original y, por lo tanto, la domina.

- c' Como vimos en la parte anterior el tiempo de pasada del próximo auto por la pista sur es exponencial (tasa $\lambda_s \cdot V$). Lo mismo se repite para la pista norte (tasa $\lambda_n \cdot V$). Por lo tanto, el tiempo de la próxima de pasada (mínimo entre la pasada sur y la norte) se distribuye exponencial con tasa $(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V$. Entonces, sea T el tiempo que Armijo demora en cruzar la carretera. Calculemos la esperanza de T condicionando sobre el tiempo t^* que demorará en pasar el próximo automóvil (cualquier pista).

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty E[T|t^* = x](\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot x} dx \\ &= \int_0^{2\frac{A}{W}} E[T|t^* = x](\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot x} dx + \int_{2\frac{A}{W}}^\infty 2\frac{A}{W} \cdot (\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\frac{A}{W}} (E[T] + x)(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot x} dx + 2\frac{A}{W} \cdot e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot 2\frac{A}{W}} \\
&= E[T] \cdot (1 - e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot 2\frac{A}{W}}) + \frac{1}{(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V} \cdot (1 - e^{-(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot 2\frac{A}{W}}) \\
&= \frac{1}{(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V} \cdot (e^{(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot 2\frac{A}{W}} - 1)
\end{aligned}$$

d' Supondremos que en $t = 0$ no se encuentran automóviles pasando frente a Armijo. Sea $\{A(t), t \geq 0\}$ el proceso de conteo de autos (yendo al sur) de Armijo y Z_n el instante de pasada de el automóvil n . Considerando que un automóvil demora un tiempo $\frac{L}{V}$ en pasar “completo” frente a Armijo, para este proceso de conteo se cumple que:

$$A(t) \geq n \Leftrightarrow Z_n \leq t - \frac{L}{V}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P[A(t) \geq n] &= P[Z_n \leq t - \frac{L}{V}] \\
&= P[\sum_{i=1}^n x_i + (n-1)\frac{L}{V} \leq t - \frac{L}{V}] \\
&= P[\sum_{i=1}^n x_i \leq t - n \cdot \frac{L}{V}] \\
&= P[N(t - n \cdot \frac{L}{V}) \geq n]
\end{aligned}$$

En la expresión anterior las variables x_i son v.a. exponenciales de parámetro $\lambda_s \cdot V$, i.i.d. y $\{N(t), t \geq 0\}$ corresponde a un proceso de Poisson homogéneo de tasa $\lambda_s \cdot V$.

De allí se puede concluir cual es la probabilidad pedida. Las respuestas pueden cambiar dependiendo de los supuestos considerados; las expresiones finales dependerán de si se expresan en función de la distribución de una gamma (integral) o mediante la distribución de poisson (sumatoria). Con ello, dos expresiones equivalentes para la expresión final son:

$$\begin{aligned}
P[A(t) \geq n] &= \int_0^{t - n \cdot \frac{L}{V}} \frac{(\lambda_s V)^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda_s V \cdot x}}{(n-1)!} dx \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda_s \cdot V(t - n \cdot \frac{L}{V}))^i e^{-\lambda_s \cdot V(t - n \cdot \frac{L}{V})}}{i!}
\end{aligned}$$

Por último, notar que para $t \leq n \cdot \frac{L}{V}$ la probabilidad pedida es 0.

e' Analicemos la pista sur y supongamos que cuando Armijo mira a la distancia observará (si puede) el punto más cercano del auto (su parte trasera). Si se ha visto un auto completo este puede estar hasta una distancia $V \cdot t - L$. Esto es equivalente a que el auto haya entrado entre los instantes 0 y $t - \frac{L}{V}$. Entonces si sabemos que entró un auto en ese intervalo también sabemos que la distribución del instante de llegada es uniforme entre 0 y $t - \frac{L}{V}$. Por otro lado, para que el automóvil aún sea visible éste no debe haber entrado en un tiempo superior a $\frac{K+L}{V}$. Entonces:

$$P[\text{Ver el auto}] = \frac{K + L}{t \cdot V - L}$$

Notar que aun cuando consideramos que Armijo está viendo los autos que pasan en la pista sur, los resultados son los mismos para las dos pistas (no nos interesa condicionar sobre que pista paso el automóvil).

7) **Problema 2, Control 2 Otoño 2005**

Armijo, un peligroso criminal que ha escapado recientemente de la cárcel, al verse perseguido por la policía decidió entrar en la línea del metro, con la intención de confundirse entre los numerosos pasajeros que utilizan este transporte público.

De acuerdo a King, un reconocido detective, la línea del metro consta de 24 estaciones, y tiene la particularidad de que se puede viajar directamente de ida y vuelta entre sus estaciones terminales⁵. Es posible viajar, desde cada estación a cualquiera de las dos estaciones contiguas, es decir, de cada estación salen trenes en ambos sentidos.

Armijo se ha dado cuenta de que King lo ha seguido hasta el metro por lo que ha decidido viajar erráticamente dentro de la red del metro.

Si se designan las estaciones por los números $1, 2, 3, \dots, 24$ las probabilidades que describen el desplazamiento de este peligroso criminal en la red del metro son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \frac{1}{i+1} \quad \forall i \in 1, \dots, 23 \\ P_{i,i-1} &= \frac{i}{i+1} \quad \forall i \in 2, \dots, 24 \\ P_{24,1} &= \frac{1}{25} \\ P_{1,24} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ademas, dado que sólo se puede ir directamente entre estaciones contiguas, si i y j no son estaciones contiguas, entonces $P_{ij} = 0$. Recuerde que la estación i es contigua con las estaciones $(i-1)$ e $(i+1)$ si $2 \leq i \leq 23$, que la estación 1 es contigua a las estaciones 2 y 24 y que la estación 24, lo es a las estaciones 1 y 23. También $P_{i,i} = 0$ para todas las estaciones $i = 1, \dots, 24$.

Conociendo la forma en que Armijo se moviliza dentro de la red del metro, el famoso detective, haciendo uso de sus conocimientos, decide modelar la ubicación del criminal utilizando una cadena de Markov en tiempo discreto, utilizando como supuesto que de cada estación sale un tren en cada dirección posible cada exactamente 2 minutos y que los tiempos de viaje entre cada estación son despreciables.

- a'* (1,5 Ptos.) Modele la ubicación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto, clasifique los estados en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? ¿Por qué? Si la respuesta fuera afirmativa, plantee las ecuaciones que permiten obtenerlas⁶.

Luego de desarrollar el modelo anterior, el detective se ha dado cuenta de que la red consta, en realidad, con 25 estaciones⁷, las probabilidades de transición se extienden trivialmente del caso anterior.

- a'* (1,5 Ptos.) Ante esta nueva situación, modele la ubicación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto, clasifique los estados en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, plantee las ecuaciones que permiten obtenerlas.

⁵Como si en la línea 1 del metro de Santiago las estaciones *Escuela Militar* y *San Pablo* tuvieran conexión directa.

⁶Explicite sólo los casos interesantes, NO es necesario dibujar toda la cadena.

⁷En todas las partes que siguen, considere que la red tiene 25 estaciones.

Junto con escapar, Armijo no olvida sus antiguos días, por lo que en cada estación hurta valiosas pertenencias de los usuarios del metro. En la estación j hurta especies por un valor $\$EH_j$.

- a' (1,0 Pto.) ¿Cuál es el valor esperado del total de objetos que este hábil criminal en dos minutos en el largo plazo?
- b' (1,0 Pto.) ¿Luego de más de 5 horas de fallidos esfuerzos, el detective no ha podido encontrar a Armijo, pero sabe que se encuentra en alguna de las primeras n estaciones ($2 < n < 25$). Dada esta información, ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo se encuentre entre la $(n - 2)$ -ésima y la n -ésima estación (inclusive).
- c' (1,0 Pto.) Luego de 7 horas, King aún no logra dar con Armijo, por lo que considera 2 estrategias a seguir:
- **Estrategia A:** Visitar alguna de las primeros 5 estaciones.
 - **Estrategia B:** Visitar alguna de las últimas 5 estaciones.

¿Qué estrategia recomendaría usted a King? ¿Por qué?

Solución:

- a' La forma de esta cadena se muestra en la siguiente figura:

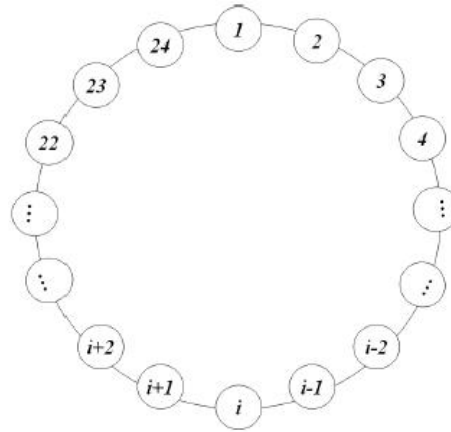
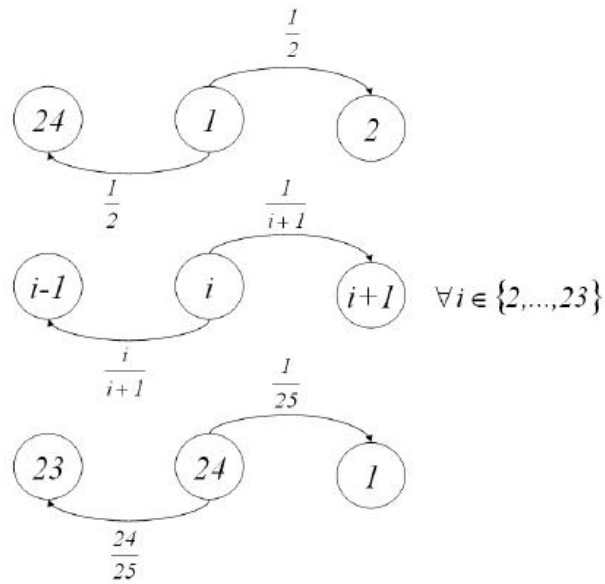


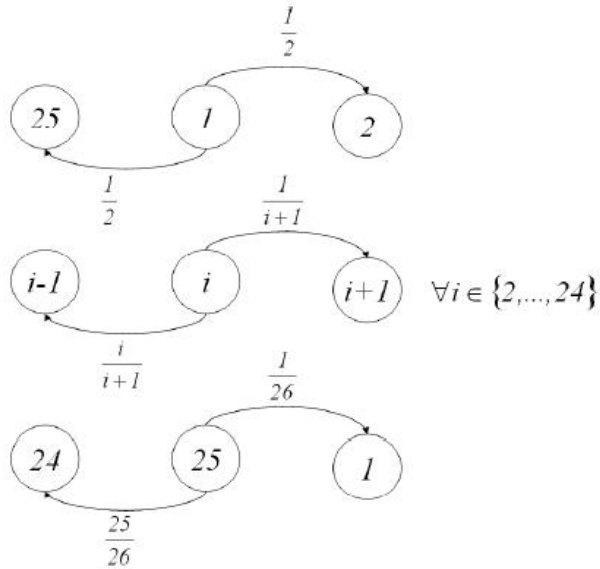
Figura 1: Cadena de Markov

Las probabilidades de transición se definen de la siguiente forma:



Los 24 estados de la cadena pertenecen a su única clase recurrente, esta clase tiene período 2, por lo que no es érgodica, razón por la que esta cadena **no** admite probabilidades estacionarias.

- b' Al tener la línea del metro 25 estaciones en lugar de 24, la forma de la cadena es la misma que la del caso anterior, cambia, sin embargo, la definición de algunos casos. Luego, las probabilidades de transición son las que siguen:



Todos los estados pertenecen a una única clase recurrente que, en este caso, al ser el número de estados impar, es aperiódica, por lo que esta cadena admite probabilidades estacionarias.

El sistema de ecuaciones que permite calcularlas es el siguiente:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_{25} \cdot \frac{1}{26} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} \\ \pi_i &= \pi_{i-1} \cdot \frac{1}{i} + \pi_{i+1} \cdot \frac{i+1}{i+2} \quad \forall i \in 2, \dots, 24 \\ \pi_{25} &= \pi_{24} \cdot \frac{1}{25} + \pi_1 \cdot \frac{1}{2} \\ \sum_{i=1}^{25} \pi_i &= 1\end{aligned}$$

- c' Es necesario darse cuenta de que Armijo permanece 2 minutos en cada estación luego, en 2 minutos en la i -ésima estación roba especies evaluadas en EH_i , de esta forma el valor esperado preguntado es:

$$V = \sum_{i=1}^{25} \pi_i \cdot EH_i$$

- d' En el largo plazo la probabilidad de que Armijo esté en la i -ésima estación está dada por π_i , la probabilidad estacionaria del estado que representa esa situación, luego:

$$P(\text{Armijo esté entre la } (n-2)\text{-ésima y } n\text{-ésima estación}) = \frac{\pi_{n-2} + \pi_{n-1} + \pi_n}{\sum_{i=1}^n \pi_i}$$

- e' Se puede apreciar que la probabilidad, estando en i , es mayor para ir a $i-1$ que para ir a $i+1$, esto es válido para todos los estados salvo para $i=1$, en que la Armijo decide equiprobablemente entre ir a 2 y 24 luego, Armijo tiende a ir siempre de forma que los números de las estaciones son descendentes, salvo cuando llega a 1, en que decide de forma equiprobable. Por esta razón es más probable que se encuentre en las 5 primeras estaciones que en las 5 últimas, por lo que se debe recomendar a King la **Estrategia A**.

8) Problema 3, Control 2 Otoño 2005

Parte 1

El servicio de urgencias de un hospital ha detectado que el comportamiento de las llegadas de ambulancias a dicha unidad puede ser descrito como un proceso de Poisson no homogéneo. Respecto a la función de intensidad de este proceso se ha observado que el día se divide en dos horarios: “horario diurno” de 8:00 a 20:00, en que las ambulancias llegan a una tasa de 3 [ambulancias/hora], mientras que el “horario nocturno”, desde las 20:00 a las 8:00 del día siguiente, llegan a una tasa de 4 [ambulancias/hora].

- a' (2,0 Ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que, en un día cualquiera, en el intervalo entre las 18:00 y las 22:00, lleguen exactamente k ambulancias al servicio de emergencias?
- b' (2,0 Ptos.) Suponga que desde las 8:00 de un día hasta las 8:00 del día siguiente ha venido apenas una ambulancia. ¿Cuál es la probabilidad que esta ambulancia haya llegado durante el “horario diurno”?

Parte 2

Un biólogo está estudiando a dos manadas de una especie en peligro de extinción que viven en una reserva natural. Estas manadas son denominadas X e Y en su estudio y para describir su comportamiento el científico ha dividido la reserva en S sectores en donde cada manada puede estar cada día. También ha podido determinar que el movimiento de las manadas puede ser descrito como cadenas de Markov homogéneas $\{X_n\}$ para la manada X y $\{Y_n\}$ para la manada Y, probabilísticamente independientes entre sí. La variable X_n corresponde al sector donde se encuentra la manada X el día n . De manera análoga, Y_n corresponde al sector donde se encuentra la manada Y el día n .

La manera en que las manadas se desplazan dentro de la reserva está descrita por matrices de probabilidades de transición P para la manada X y Q para la manada Y, respectivamente. Dada la agresividad de estos animales el biólogo está particularmente interesado en controlar la fracción del tiempo que ambas manadas se encuentran en el mismo sector, ya que si esta fracción supera, en promedio, un cierto umbral habrá un enfrentamiento entre los dos grupos y la cantidad de estos animales aún vivos se verá reducida.

- a' (2,0 Ptos.) El científico está considerando estudiar el proceso estocástico $\{Z_n = (X_n, Y_n)\}$ que describe el movimiento de *ambas* manadas simultáneamente.

Justifique por qué este proceso estocástico es una cadena de Markov y calcule sus probabilidades de transición.

Hint. Muestre que las probabilidades de transición están definidas por la relación

$$P(Z_n = (j, l) | Z_{n-1} = (i, k)) = p_{ij}q_{kl}$$

donde p_{ij} es la probabilidad que la manada X se traslade al sector j en una transición si actualmente está en el sector i (es decir, p_{ij} es la “componente” (i, j) de la matriz P ; análogamente se define q_{kl} para la manada Y).

Bonus (0,5 Ptos.) Suponga que las cadenas $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ son ergódicas y que se conocen las probabilidades estacionarias π^X para la cadena $\{X_n\}$ y π^Y , para la cadena $\{Y_n\}$, respectivamente. En este caso, la cadena $\{Z_n\}$ también es ergódica. Denotemos sus probabilidades estacionarias como el vector π^Z , cuya coordenada $\pi^Z_{(i,k)}$ representa la probabilidad estacionaria asociada al estado (i, k) .

- a' Estas probabilidades estacionarias satisfacen la relación $\pi^Z_{(i,k)} = \pi^X_i \pi^Y_k$ para cualquier par de sectores i, k .

Argumente por qué esta afirmación es verdadera.

Solución:

Parte 1

- a' Llamemos $N(t)$ al proceso de llegada de ambulancias, con $t = 0$ las 8:00 y al tiempo lo medimos en horas. Lo que debemos calcular es $P(N(14) - N(10) = k)$. Hay (al menos) dos maneras de hacer esto de acuerdo a lo estudiado en el curso.

Primera solución

Aplicamos la propiedad que nos dice que los incrementos de un proceso de Poisson no homogéneo se distribuyen como una variable aleatoria Poisson con el parámetro apropiado.

Específicamente, si llamamos $\lambda(t)$ a la función de intensidad del proceso $N(t)$, la variable aleatoria $N(14) - N(10)$ tiene distribución Poisson de parámetro

$$\Lambda = \int_{10}^{14} \lambda(s) ds = 14.$$

Por lo tanto,

$$P(N(14) - N(10) = k) = \frac{e^{-14} 14^k}{k!}.$$

Segunda solución

Otra alternativa es considerar que el proceso de llegada es homogéneo entre las 18:00 y las 20:00 y entre las 20:00 y las 22:00. Con esta idea, dividimos el cálculo en dos intervalos independientes (son disjuntos y el proceso es de Poisson) y condicionamos en el número de llegadas en el primer intervalo:

$$\begin{aligned} P(N(14) - N(10) = k) &= \sum_{l=0}^k P(N(14) - N(12) = k - l | N(12) - N(10) = l) P(N(12) - N(10) = l) \\ &= \sum_{l=0}^k P(N(14) - N(12) = k - l) P(N(12) - N(10) = l) \\ &= \sum_{l=0}^k e^{-8} 8^{k-l} (k-l)! e^{-6} 6^l l! \\ &= e^{-14} k! \sum_{l=0}^k k l 8^{k-l} 6^l \\ &= e^{-14} k! (8+6)^k \\ &= e^{-14} 14^k k! \end{aligned}$$

b' Debemos calcular la probabilidad

$$\begin{aligned} P(\text{1 llegada en h. diurno} | \text{hubo 1 llegada}) &= P(\text{"hubo 1 llegada" y "llegada en h. diurno"}) P(\text{"hubo 1 llegada"}) \\ &= P(\text{"1 llegada en h. diurno" y "sin llegadas en h. nocturno"}) P(\text{"hubo 1 llegada"}) \\ &= P(N(12) = 1 \text{ y } N(24) - N(12) = 0) P(N(24) = 1) \\ &= 36 e^{-36} \cdot e^{-48} 84 e^{-84} \\ &= 37. \end{aligned}$$

Parte 2

a' Es una cadena de Markov homogénea porque las probabilidades de transición cumplen con la propiedad

$$P(Z_n = (j, l) | Z_{n-1} = (i, k), Z_{n-2}, \dots, Z_0) = P(Z_n = (j, l) | Z_{n-1} = (i, k)) = p_{ij} q_{kl}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 P(Z_n = (j, l) | Z_{n-1} = (i, k), Z_{n-2}, \dots, Z_0) &= P(X_n = j, Y_n = l | X_{n-1} = i, Y_{n-1} = k, X_{n-2}, Y_{n-2}, \dots, X_0, Y_0) \\
 &= P(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2}, \dots, X_0) P(Y_n = l | Y_{n-1} = k, Y_{n-2}, \dots, Y_0) \\
 &= P(X_n = j | X_{n-1} = i) P(Y_n = l | Y_{n-1} = k) \\
 &= p_{ij} q_{kl} .
 \end{aligned}$$

- b' El argumento se basa en la independencia probabilística asociada a X_n e Y_n . Por lo tanto, en el largo plazo la probabilidad de encontrar al par de manadas $Z=(X, Y)$ en las zonas (i, k) respectivamente, puede ser expresada como la multiplicación de las probabilidades estacionarias de encontrar a la manada X en i y a la manada Y en k , que sabemos es $\pi_i^X \pi_k^Y$.

Para efectos de corrección, lo anterior es suficiente.

También se puede demostrar analíticamente como sigue:

Llamemos a R a la matriz de probabilidades de transición de la cadena $\{Z_n\}$. La matriz R tiene una fila (y una columna) para cada estado posible. Recordemos que los estados posibles son los pares de sectores de la reserva.

De acuerdo al punto anterior, esta matriz R está definida por

$$R_{(i,k)(j,l)} = p_{ij} q_{kl} .$$

Para comprobar que el vector π^Z dado en el enunciado es una ley estable de la cadena debemos verificar dos cosas (es directo ver que π^Z son no negativos):

$$c' \quad (i,k) \pi_{(i,k)}^Z = 1:$$

$$\begin{aligned}
 (i,k) \pi_{(i,k)}^Z &= i k \pi_{(i,k)}^Z \\
 &= i k \pi_i^X \pi_k^Y \\
 &= (i \pi_i^X) (k \pi_k^Y) \\
 &= 1 \times 1 = 1 .
 \end{aligned}$$

$d' \quad \pi^Z R = \pi^Z$: Verifiquemos que esto vale para una cualquiera de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 [\pi^Z R]_{(j,l)} &= {}_i k \pi_{(i,k)}^Z R_{(i,k)(j,l)} \\
 &= {}_i k \pi_i^X \pi_k^Y p_{ij} q_{kl} \\
 &= ({}_i \pi_i^X p_{ij}) ({}_k \pi_k^Y q_{kl}) \\
 &= [\pi^X P]_j [\pi^Y Q]_l \\
 &= \pi_j^X \pi_l^Y \\
 &= \pi_{(j,l)}^Z
 \end{aligned}$$