



Auxiliar 3: Programación Dinámica Determinística y Estocástica

Martes 18 de Agosto de 2009

Pregunta 1

■ **Etapas:**

Cada uno de los meses: $t = 1, \dots, T$

■ **Variables de estado:**

S_t : el número de camiones asignados en el periodo pasado.

■ **Variables de decisión:**

X_t : el número de camiones solicitados en el periodo t .

■ **Recurrencia de estados:**

$$S_{t+1} = X_t$$

■ **Función de beneficios:**

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + D \cdot \frac{|X_t - S_t|}{\max\{|X_t - S_t|, 1\}} + V_{t+1}^*(X_t)$$

O de manera equivalente¹:

$$V_t(S_t, X_t) = C \cdot X_t + D \cdot \min\{|X_t - S_t|, 1\} + V_{t+1}^*(X_t)$$

Donde:

$$V_t^*(S_t) = \min_{X_t \geq R_t} \{V_t(S_t, X_t)\}$$

■ **Condiciones de borde:**

$$V_{T+1}^*(\%) = 0$$

$$S_1 = 0$$

¹En particular, la inclusión de cargo por variar la cantidad de camiones de un periodo a otro puede ser representado de varias maneras. Aquí se han incluido sólo dos de ellas.

Pregunta 2

1. Un modelo que cumple con lo solicitado es el siguiente:

- **Etapas**

Cada año: $i = 1, \dots, n$

- **Variables de estado**

s_i : cantidad de ovejas en el rebaño del año i

- **Variables de decisión**

e_i : cantidad de ovejas a vender al final del año i

- **Funciones de recurrencia**

Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$s_{i+1} = 2(s_i - e_i)$$

- **Función de Beneficio**

$$V_i(s_i, e_i) = u_i e_i - c_i(s_i - e_i) + V_{i+1}^*(2(s_i - e_i)) = (u_i + c_i)e_i - c_i s_i + V_{i+1}^*(2(s_i - e_i))$$

donde

$$V_i^*(s_i) = \max \{V_t(s_i, e_i) : 0 \leq e_i \leq s_i\}$$

- **Condiciones de borde**

$$s_1 = k$$

$$V_{n+1}^*(s_{n+1}) = 0$$

2. Para resolver el caso propuesto planteamos las siguientes tablas:

- **Año 3**

s_3	0	2	e_3 4	6	8	V_3^*	e_3^*
0	0					0	0
2		240				240	2
4			480			480	4
6				720		720	6
8					960	960	8

De acuerdo al enunciado, en el último año el campesino vende el rebaño completo.

- **Año 2**

s_2	0	1	e_2 2	3	4	V_2^*	e_2^*
0	0					0	0
2	180	220	260			260	2
4	360	400	440	480	520	520	4

Las casillas en blanco dentro de las tablas corresponden a decisiones que no son posibles.

- **Año 1**

s_1	0	e_1 1	2	V_1^*	e_1^*
2	320	260	200	320	0

La estrategia óptima es entonces no vender nada el primer año y vender el rebaño completo al final del segundo.

Pregunta 3

1. El modelo de programación dinámica estocástica es el siguiente:

■ Etapas:

Cada uno de los paraderos, $k \in \{1, \dots, K\}$

■ Estados:

N_k = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero k .

■ Decisión:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si se detiene en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

■ Variable aleatoria:

j_k = Número de personas que desean subirse en el paradero k .

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si lo detiene un carabinero en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

■ Recurrencia:

$$N_{k+1} = X_k \cdot \min\{C, N_k + j_k\} + (1 - X_k) \cdot N_k$$

■ Función de Beneficios:

Para el último período solo recibimos un bono si llegamos con el lleno. Además no consideraremos el costo de parar acá (es un costo fijo).

$$V_{K+1}^*(N_{K+1}) = \begin{cases} F & \text{si } N_{K+1} = C \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Para el resto de los períodos la función de beneficios toma la siguiente forma:

$$V_k^*(N_k) = \max\{V_k(N_k, 0), V_k(N_k, 1)\}$$

Donde:

$$V_k(N_k, 1) = -D + \sum_{j=0}^{\infty} \left[P_k \cdot \min\{C - N_k, j\} + V_{k+1}^*(\min\{C, N_k + j\}) \right] \cdot S_j$$

y

$$V_k(N_k, 0) = -C_{inf}(1 - S_0) \cdot P_{Multa} + V_{k+1}^*(N_k)$$

■ Condiciones de borde:

$$N_1 = 0$$

2. Consideremos la tabla para el último período:

Período 10:

N_{10}	0	1	X_{10}^*	V_{10}^*
30	3110	3000	0	3110
29	-1890	2950	1	2950
28	-1890	1200	1	1200
27	-1890	-800	0	-800

Período 9:

N_9	0	1	X_9^*	V_9^*
30	1220	1100	0	1220
29	1060	2544	1	2544
28	-690	1555	1	1555
27	-2490	575	1	575

Período 8:

N_8	0	1	X_8^*	V_8^*
30	-670	-780	0	-670
29	654	-197,6	0	654
28	335	628,1	1	628,1
27	-1215	651,5	1	651,5

Período 7:

N_7	0	1	X_7^*	V_7^*
27	-1238,5	-656,61	1	-656,61

La estrategia óptima de detenciones es la siguiente: Detenerse en el paradero 7.

Si se llega con menos de 28 personas al paradero 8, detenerse. Si no seguir de largo.

En el paradero 9 detenerme solo si no tengo 30 personas en el bus.

En el paradero 10 detenerse si hay 28 o 29 personas en el bus.