

Auxiliar 1

Martes 4 de Agosto de 2009

Problema 1

1. Demuestre que la distribución de probabilidad exponencial tiene pérdida de memoria.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

2. Encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de variables aleatorias que siguen distribuciones de poisson independientes.

3. Demuestre que si

$$t_1 \longrightarrow \exp(\lambda)$$

$$t_2 \longrightarrow \exp(\mu), \quad \text{se tiene que:}$$

$$P(t_1 < t_2) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \quad (2)$$

4. Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ Variables aleatorias iid. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria:

$$\mathbf{X} \longrightarrow \min(X_1, X_2, X_3, X_n)$$

Problema 2

El dado A tiene 5 caras negras y una cara blanca, el dado B tiene 3 caras negras y 3 caras blancas. Se lanza una moneda al aire, si sale cara se elige el dado A, de lo contrario se elige el dado B. El dado elegido será lanzado muchas veces, registrando en cada caso si el resultado es blanco o negro.

- (a) Determine la probabilidad que la caída del n -ésimo lanzamiento del dado sea negra. (1 punto)
- (b) Determine la probabilidad que las caídas numero n y $(n+1)$ sean negras. (1 puntos)
- (c) Si no se sabe que dado se está lanzando, pero se observa que las primeras n caídas han sido negras. Calcule la probabilidad que la caída $(n+1)$ sea negra. Interprete su resultado cuando n es grande. (4 puntos)

Problema 3, CTP 1 otoño 2009

Un agricultor siembra semillas de manzanos y naranjos, donde la probabilidad de que la semilla sea de un manzano es p y que sea un naranjo es $1-p$, plantando un total de S árboles. Por otro lado se sabe que los manzanos y naranjos dan un fruto según una distribución exponencial de tasa λ_m y λ_n respectivamente. Asuma que todos los árboles se plantan al mismo tiempo y la independencia en la elección de cada semilla para cada árbol.

1. Encuentre la probabilidad de que la primera fruta obtenida sea una manzana, en el caso de que se sepa que hay m manzanos y n naranjos plantados (1 punto).
2. Encuentre la misma probabilidad de antes en el caso en que no se sepa la cantidad de árboles de cada tipo que se han plantado (1 punto).
3. Calcule la probabilidad de que en las próximas h unidades de tiempo se tenga al menos una fruta nueva, dado que la última fruta obtenida fue hace u unidades de tiempo atrás (1 punto).

Suponga que desde ahora se tiene la misma plantación, donde se sabe que el número de naranjos es n y el de manzanos es m , sin embargo ha llegado una bacteria que afecta a los naranjos haciendo que cada naranja salga buena con una probabilidad b y afectando a los manzanos haciendo que estos puedan dar un sólo fruto cada uno.

4. Calcular el tiempo promedio que se debe esperar para obtener la próxima naranja comestible (1 punto).
5. Calcular el tiempo promedio que se debe esperar para obtener la próxima manzana, dado que hasta el momento se ha obtenido una cosecha de k manzanas ($m > k$) (1 punto).

Un agronomo especialista en naranjos le ofrece sus servicios, de los cuales como resultado se obtiene que el tiempo de brote de cada naranja de distribuye ahora según una exponencial de tasa μ_n ($\mu_n \geq \lambda_n$), además todas las naranjas obtenidas son buenas. Suponga que el valor de una naranja es de \$100 la unidad.

6. Calcule el valor que estaría dispuesto a pagar el agricultor por el servicio del agrónomo (por unidades de tiempo) (1 punto).

Indicación: Trabaje con utilidades por unidades de tiempo.

Problema 4 (CTP2 Primavera2008)

En un país terminal del globo, la empresa MONOCOBRE tiene el monopolio de la explotación del cobre, desde hace años, permitiendo el ingreso laboral exclusivamente de aquellos que tienen cierta cercanía o favores con el estado. Molestos de tal situación que les impide incorporarse a la empresa, unos ingenieros expertos en minería han decidido formar la empresa CHILEXPLOTA para entrar al negocio.

Antes de ingresar al mercado del cobre, CHILEXPLOTA ha estimado, con estudios previos, que la inversión necesaria para ingresar al negocio debe ser 10 millones de pesos. Además esta empresa tiene dos estrategias aleatorias de inserción a este mercado: estrategia desafiante, que será adoptada con una probabilidad del 60 % y tendrá un costo adicional de 5 millones de pesos o la aptitud pasiva, que será la otra estrategia de entrada posible.

Por otro lado, la estrategia con que reaccionará MONOCOBRE dependerá del modo en que entre CHILEXPLOTA. Si esta última anuncia una estrategia pasiva, existe un 20 % de posibilidades que MONOCOBRE **amenace**. Por otro lado, los ingenieros a los que está usted asesorando señalan que si supieran que la reacción de MONOCOBRE fuera de **amenazar**, con un 85,7 % de posibilidades entraría con una actitud desafiante.

Finalmente se cuenta con la siguiente información de la empresa MONOCOBRE: si la empresa no amenaza, siempre adoptará una estrategia pasiva, si amenaza adoptará cualquiera de las dos estrategias, pero con una probabilidad del 70 % de que responda agresivamente para mantener su posición.

El siguiente cuadro muestra los ingresos por venta (en millones de pesos) dependiendo de las estrategias adoptadas por ambos competidores:

CHTPA/MNCB	Agresiva	Pasiva
Desafiante	5	30
Pasiva	10	20

Cuadro 1: Beneficios CHILEXPLOTA en función de las estrategias adoptadas.

1. Dibuje el árbol de decisión para evaluar si a CHILEXPLOTA le conviene ingresar al mercado del cobre en este lejano país. ¿Cuál es el valor esperado de las ganancias/pérdidas de la empresa en el caso de ingresar?
2. Considere ahora que la estrategia adoptada deja de ser una variable aleatoria y se transforma en una decisión. ¿Qué ocurre si en este caso la estrategia de CHILEXPLOTA se puede postergar hasta después de conocer la política adoptada por MONOCOBRE? ¿Qué valor tiene esta información? Considere que en este caso los eventos *Amenaza* y *no Amenaza* son equiprobables para MONOCOBRE.