

Pauta Auxiliar 1

Martes 4 de Agosto de 2009

Problema 1

1. Hay que demostrar que:

$$P[x > s + t | x > s] = P[x > t]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P[x > s + t | x > s] &= \frac{P[x > s + t \wedge x > s]}{P[x > s]} \\ &= \frac{P[x > s + t]}{P[x > s]} \\ &= \frac{1 - P[x \leq s + t]}{1 - P[x \leq s]} \\ &= \frac{1 - [1 - e^{-\lambda(s+t)}]}{1 - [1 - e^{-\lambda(s)}]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda(s)}} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= P[x \geq t] \end{aligned}$$

2. Veamos el caso para $n=2$:

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 = N] &= \sum_{i=0}^{\infty} P[X_1 + X_2 = N | X_2 = i] \cdot P[X_2 = i] \\ &= \sum_{i=0}^N P[X_1 = N - i] \cdot P[X_2 = i] \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{\lambda_1^{N-i} e^{-\lambda_1}}{(N-i)!} \cdot \frac{\lambda_2^i e^{-\lambda_2}}{i!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{N!} \cdot \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)! i!} \lambda_1^{N-i} \lambda_2^i \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^N}{N!} \end{aligned}$$

3. Tenemos que:

$$\begin{aligned} P[t_1 < t_2] &= \int_0^{\infty} P[t_1 < t_2 | t_2 = t] \cdot f_{t_2}(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} P[t_1 < t] \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^{\infty} \mu e^{-(\mu + \lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \cdot \int_0^{\infty} (\mu + \lambda) e^{-(\mu + \lambda)t} dt \\ &= 1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \end{aligned}$$

4. Debemos encontrar una expresión para

$$P[X = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} < t]$$

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - P[X > t] \\ &= 1 - (P[X_1 > t] \cdot P[X_2 > t] \dots P[X_n > t]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t)) \end{aligned}$$

Para el caso exponencial tenemos que:

$$\begin{aligned} P[X < t] &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n 1 - 1 + e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-(\sum_{i=1}^n \lambda t)} \\ &= 1 - e^{-n\lambda t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \rightsquigarrow \exp(n\lambda)$$

Problema 2

(a) Definimos:

A: Se lanza dado A.

B: Se lanza dado B.

X_i : Color de la cara obtenida en el lanzamiento "i".

$$X_i = \begin{cases} N & \text{negro} \\ B & \text{blanco} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P[X_n = N] &= P[X_n = N / A]P[A] + P[X_n = N / B]P[B] \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{12} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N] &= P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N / A] \cdot P[A] + P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N / B] \cdot P[B] \\ &= P[X_n = N / A] \cdot P[X_{n+1} = N / A] \cdot P[A] + P[X_n = N / B] \cdot P[X_{n+1} = N / B] \cdot P[B] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = N / \bigcap_{i=1}^n X_i = N] &= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N]}{P[\bigcap_{i=1}^n X_i = N]} \\ &= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N / A] \cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N / B] \cdot P[B]}{P[\bigcap_{i=1}^n X_i = N / A] \cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^n X_i = N / B] \cdot P[B]} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

Tomando límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{5}{6}$$

Problema 3, CTP 1 otoño 2009

1. Estamos en el caso de una carrera de exponenciales entre $T_m \sim \text{Min}\{tm_1, \dots, tm_m\}$ y $T_n \sim \text{Min}\{tn_1, \dots, tn_n\}$.
Donde: $T_m \sim \exp(m \cdot \lambda_m)$ $T_n \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$

$$P(T_m \leq T_n) = \frac{m \cdot \lambda_m}{m \cdot \lambda_m + n \cdot \lambda_n}$$

2. Se debe condicionar sobre el número de árboles de cada tipo plantado inicialmente
Sea M v.a. igual al número de manzanos

$$\begin{aligned} P(T_m \leq T_n) &= \sum_{i=0}^S P(T_m \leq T_n | M = i) \cdot P(M = i) \\ &= \sum_{i=0}^S \frac{i \cdot \lambda_m}{i \cdot \lambda_m + (S - i) \cdot \lambda_n} \cdot \binom{S}{i} p^i (1 - p)^{S-i} \end{aligned}$$

3. Calculamos la probabilidad complementaria, y aplicamos la pérdida de memoria de la exp ignorando la última fruta sean las v. a.:

M : Número de manzanos plantados

T_m : tiempo en que tarda en brotar la próxima manzana

T_n : tiempo en que tarda en brotar la próxima naranja

$$\begin{aligned} P(T_m < h \vee T_n < h) &= 1 - P(T_m > h \wedge T_n > h) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^S P(T_m > h \wedge T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^S P(T_m > h | M = i) \cdot P(T_n > h | M = i) \cdot P(M = i) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^S e^{-h \cdot \lambda_m \cdot i} \cdot e^{-h \cdot \lambda_n \cdot (S-i)} \cdot \binom{S}{i} p^i (1 - p)^{S-i} \end{aligned}$$

4. Definimos los siguientes tiempos:

tn_i : tiempo que tarda en brotar la i -ésima naranja desde que brotó la $(i-1)$ -ésima.

$tn_i \sim \exp(n \cdot \lambda_n)$

Tn_i : tiempo que tarda en brotar la i -ésima naranja.

$$Tn_i = \sum_{j=1}^i tn_j$$

$$E(\text{Tiempo en obtener la primera naranja buena}) = \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i | \text{han salidos } (i-1) \text{ naranjas malas y la } i \text{ es buena}) \cdot P(\text{han salidos } (i-1) \text{ naranjas malas y la } i \text{ es buena})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} E(Tn_i) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i E(tn_j) \right) \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{\lambda_n \cdot n} \cdot b \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \frac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (1-b)^{i-1} \\
&= \frac{b}{\lambda_n \cdot n} \cdot \frac{1}{b^2} \\
&= \frac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}
\end{aligned}$$

5. tm_i : tiempo que tarda en brotar la i -ésima manzana desde que brotó la $(i-1)$ -ésima.

$$tm_i \sim \exp((m - (i - 1)) \cdot \lambda_m)$$

En particular la VA que me interesa es: tm_{k+1}

$$tm_{k+1} \sim \exp((m - k) \cdot \lambda_m)$$

$$E(tm_{k+1}) = \frac{1}{(m-k) \cdot \lambda_m}$$

6. Por la parte 4, la esperanza de la utilidad por unidad de tiempo que tengo (por la venta de naranjas) es:

$$\begin{aligned}
E(U) &= \frac{\$100}{\frac{1}{\lambda_n \cdot n \cdot b}} \\
&= \$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b
\end{aligned}$$

Desprendiendo del resultado obtenido en la parte 4, con el agrónomo se tiene que $b = 1$, luego, en este caso la esperanza de la utilidad será (contando el costo por los servicios del profesional, sea $\$C$) por unidad de tiempo:

$$E(U) = \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C$$

Luego la cantidad máxima dispuesta a pagar $\$C$ es tal que:

$$\begin{aligned}
\$100 \cdot \lambda_n \cdot n \cdot b &< \$100 \cdot \mu_n \cdot n - \$C \\
\$C &< \$100 \cdot n \cdot (\mu_n - b \cdot \lambda_n)
\end{aligned}$$

Problema 4

1. El árbol de decisión queda como indica la figura:

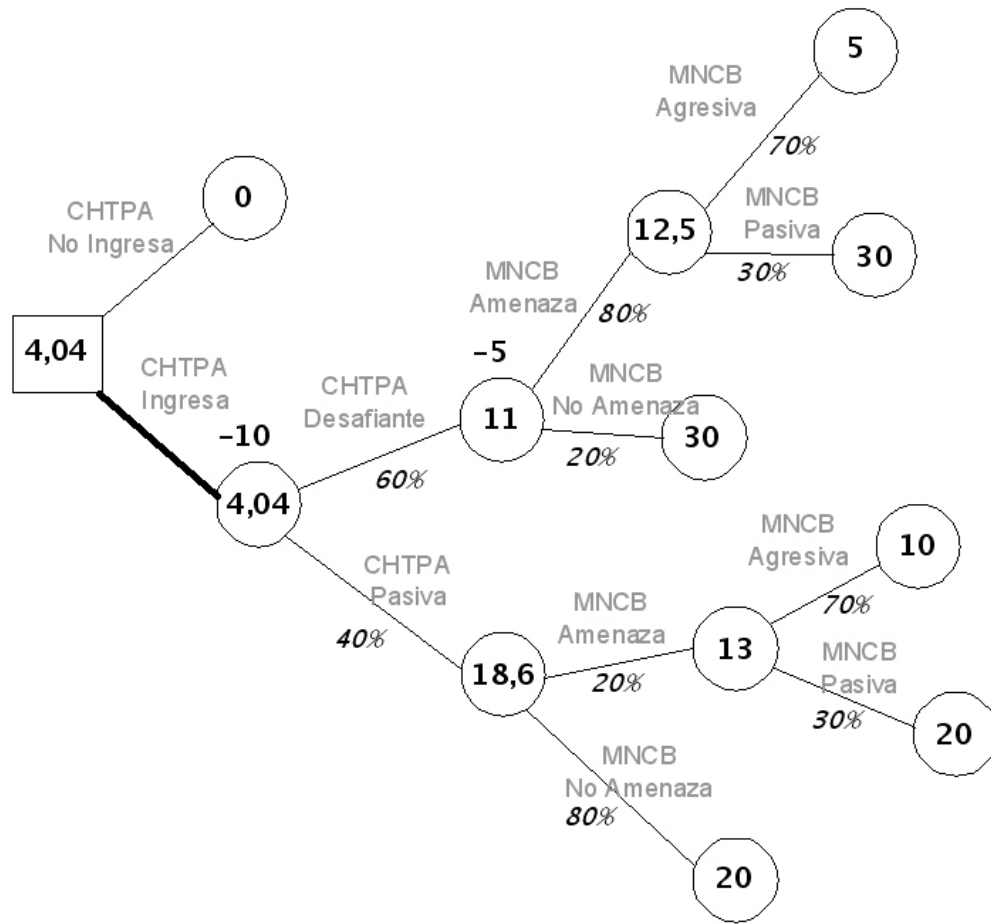


Figura 1: Arbol problema 1.1

Las probabilidades que no se especifican en el enunciado (la probabilidad que MonoCobre amenace dado que ChileExplota entra desafiante) fueron calculadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}(\text{CHTPA des.} \mid \text{MNCB am.}) = 85,7\%$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{MNCB am.} \mid \text{CHTPA des.}) &= \frac{\mathcal{P}(\text{CHTPA des.} \mid \text{MNCB am.}) \cdot \mathcal{P}(\text{MNCB am.})}{\mathcal{P}(\text{CHTPA des.})} \\ &= \frac{0,857 \cdot \mathcal{P}(\text{MNCB am.})}{0,6} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{MNCB am.}) &= \mathcal{P}(\text{MNCB am.} \mid \text{CHTPA des.}) \cdot \mathcal{P}(\text{CHTPA des.}) + \mathcal{P}(\text{MNCB am.} \mid \text{CHTPA pas.}) \cdot \mathcal{P}(\text{CHTPA pas.}) \\ &= 0,857 \cdot \mathcal{P}(\text{MNCB am.}) + 0,2 \cdot 0,4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\text{MNCB am.}) = 0,56$$

Por último

$$\mathcal{P}(MNCB \text{ am.} \mid CHTPA \text{ des.}) = \frac{0,857 \cdot 0,56}{0,6} = 0,8$$

La empresa ganaría 4,04 millones por ingresar.

2. El nuevo árbol sería:

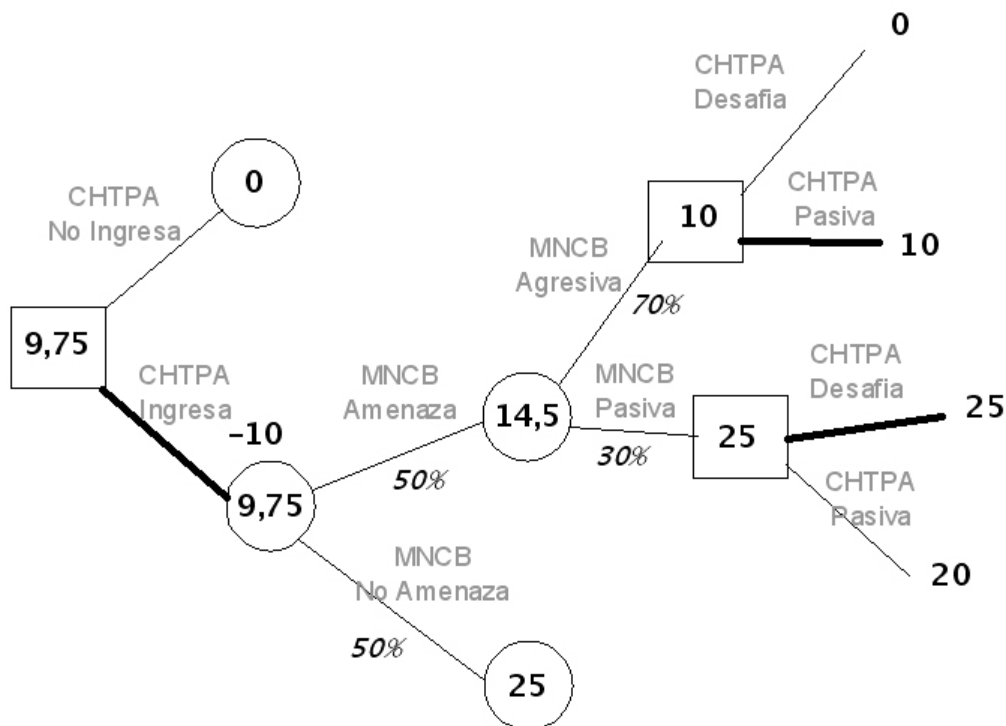


Figura 2: Arbol problema 1.2

Y el valor de la información perfecta es: $9,75 - 4,04 = 5,71$ millones de pesos.