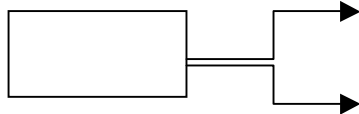


#### Problema 4

Un **árbol de decisión** permite analizar los proyectos en que existen decisiones secuenciales. Ayudan al análisis haciendo explícita la estrategia operacional subyacente en la gestión de un proyecto. En el árbol de decisión están descritas las decisiones que toma el inversionista y las probabilidades de que un evento ocurra.

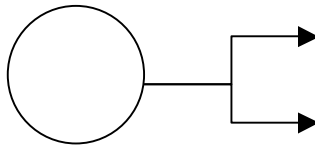
Nomenclatura:

Nodo de decisión:



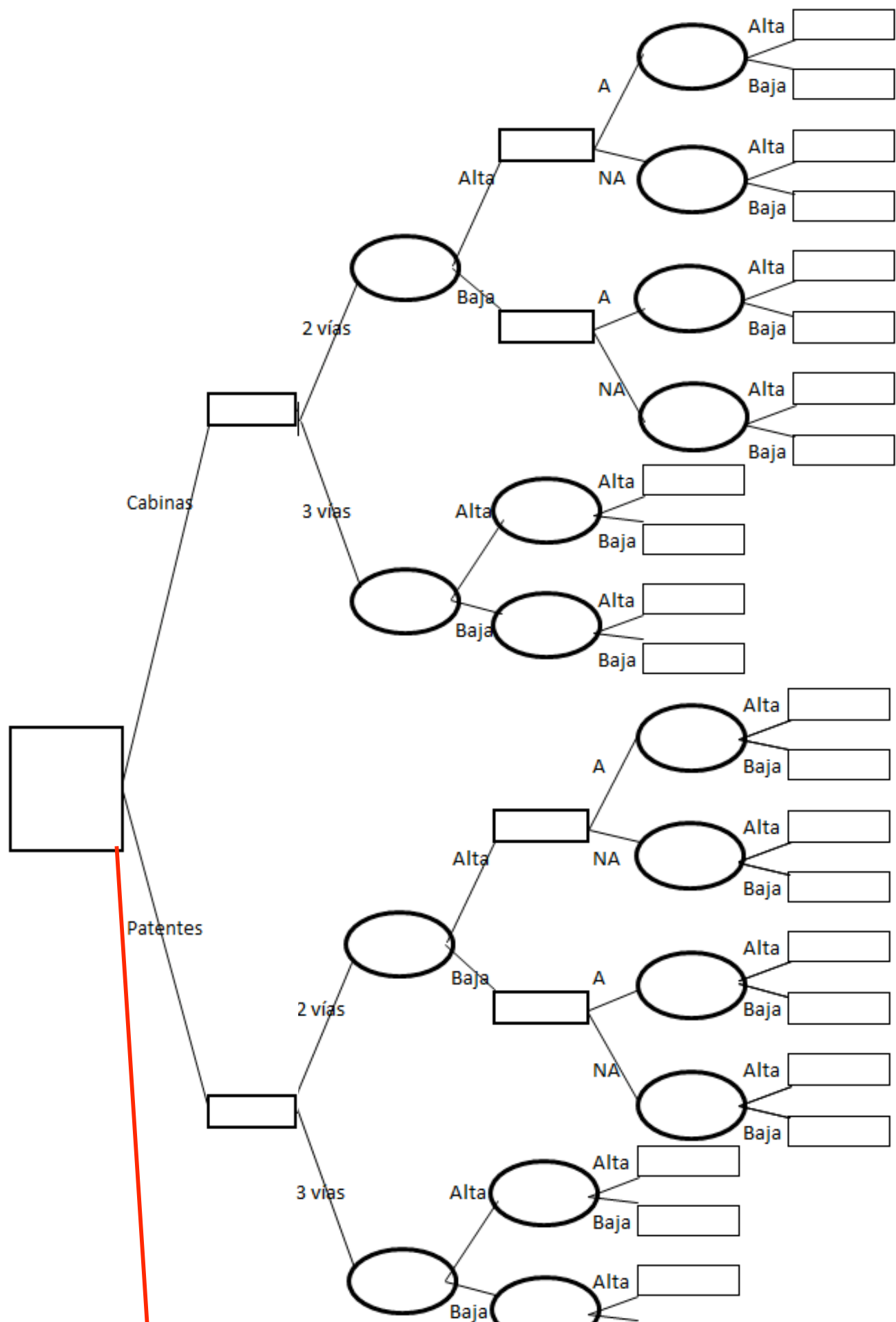
El valor que va en la caja es el valor máximo (o mínimo) de las ramas del árbol.

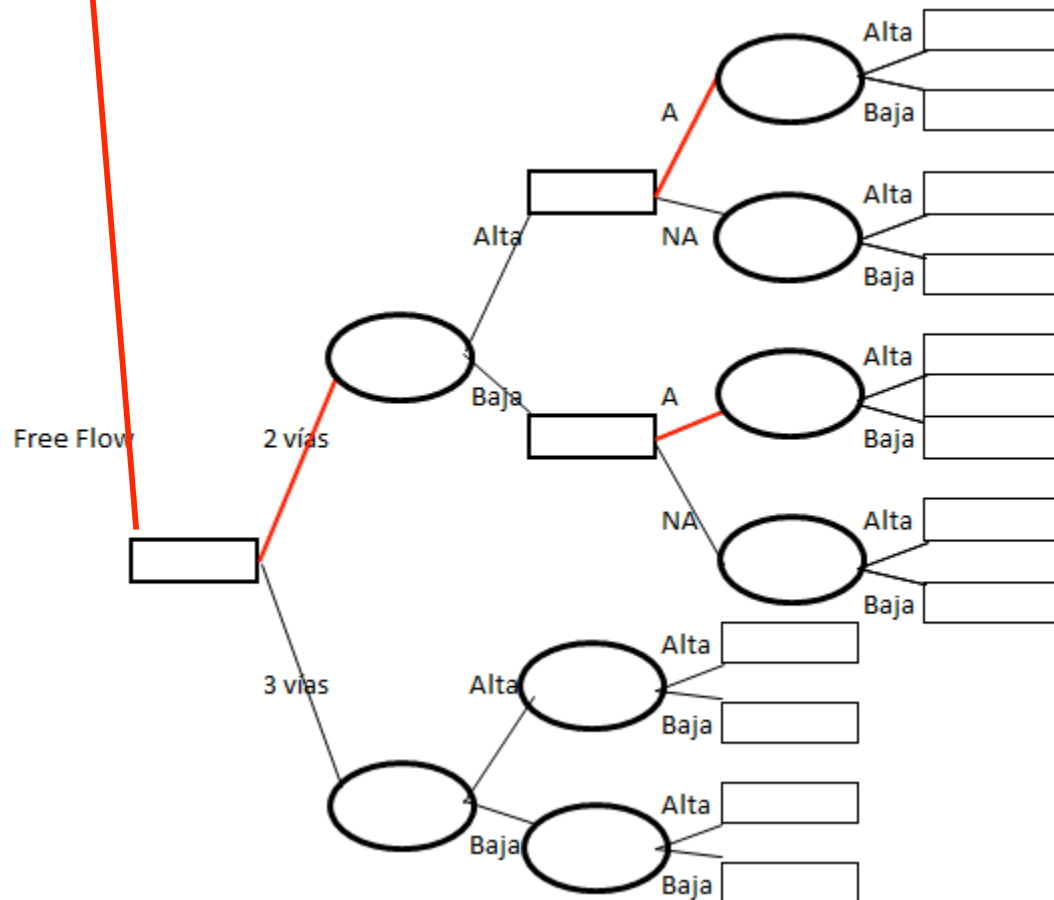
Nodo de probabilidad:



El valor en el círculo es la esperanza de los valores en las ramas del árbol.

Para abordar el problema, lo primero que se debe realizar es la estructura del árbol:





Ahora que tenemos la estructura del árbol de decisión, debemos calcular las probabilidades. Por enunciado sabemos:

$$P(\text{Alta } 2^{\circ} \text{ periodo} | \text{Alta } 1^{\circ} \text{ periodo}) = 0.7$$

$$P(\text{Baja } 2^{\circ} \text{ periodo} | \text{Baja } 1^{\circ} \text{ periodo}) = 0.8$$

$$P(\text{Baja } 2^{\circ} \text{ periodo} | \text{Alta } 1^{\circ} \text{ periodo}) = 0.3$$

$$P(\text{Alta } 2^{\circ} \text{ periodo} | \text{Baja } 1^{\circ} \text{ periodo}) = 0.2$$

Los flujos estimados para los escenarios son:

Años	Demanda	Ingresos
1 a 5	Alta	175.000
	Baja	115.000
5 en adelante	Alta	450.000
	Baja	180.000

Y los costos asociados a cada opción de inversión son:

	Inversión	Costo Mensual
Cabinas	2.000.000	200.000
Patentes	3.000.000	50.000
Free Flow	5.000.000	75.000
2 vías	380.000.000	
3 vías	500.000.000	
Ampliar	175.000.000	

Ahora debemos calcular cada uno de los 36 VAN del proyecto:

Para hacerlo debemos calcular el valor de la Anualidad en los primeros 5 años y agregarle el valor presente a perpetuidad de los beneficios del año 5 en adelante. A este valor se le deben restar los costos asociados a la opción elegida.

La formula de Anualidad es la siguiente:

$$VP = C \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n * r}$$

Calculemos la fracción:

$$\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n * r} = \frac{(1+0,15)^5 - 1}{(1+0,15)^5 * 0,15} = 3,35$$

Este valor es constante para todos los Valores que se quieren calcular.

Para calcular la perpetuidad se utiliza:  $VP = \frac{C}{r}$

1. Cabinas con 2 vías y ampliado con demanda alta –alta.

$$Beneficios = (175 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{200 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 119740$$

En el valor de la perpetuidad se ocupa el valor de la demanda de 200, pues es el máximo flujo que permite la carretera.

2. Cabinas con 2 vías y ampliado con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 70941$$

3. Cabinas con 2 vías y no ampliado con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{200 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000$$

$$B - C = 294740$$

4. Cabinas con 2 vías y no ampliado con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000$$

$$B - C = 246074$$

5. Cabinas con 2 vías y ampliado con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{200 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 46328$$

6. Cabinas con 2 vías y ampliado con demanda baja –baja

$$Beneficios = (115 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = -2338$$

7. Cabinas con 2 vías y no ampliado con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{200 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000$$

$$B - C = 221328$$

8. Cabinas con 2 vías y no ampliado con demanda baja –baja

$$Beneficios = (115 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 380000$$

$$B - C = 172662$$

9. Cabinas con 3 vías con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{200 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 500000$$

$$B - C = 174740$$

10. Cabinas con 3 vías con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 500000$$

$$B - C = 126074$$

11. Cabinas con 3 vías con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{200 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 500000$$

$$B - C = 101328$$

12. Cabinas con 3 vías con demanda baja –baja

$$Beneficios = (115 * 365 - 200 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 365 - 200 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 2000 + 500000$$

$$B - C = 52662$$

13. Patentes con 2 vías y ampliado con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 548740$$

14. Patentes con 2 vías y ampliado con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = -9710$$

15. Patentes con 2 vías y no ampliado con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{300 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000$$

$$B - C = 413490$$

16. Patentes con 2 vías y no ampliado con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000$$

$$B - C = 165290$$

17. Patentes con 2 vías y ampliado con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 486339$$

18. Patentes con 2 vías y ampliado con demanda baja –baja

$$Beneficios = (115 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = -72111$$

19. Patentes con 2 vías y no ampliado con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{300 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000$$

$$B - C = 351089$$

20. Patentes con 2 vías y no ampliado con demanda baja –baja

$$Beneficios = (115 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 380000$$

$$B - C = 102889$$

21. Patentes con 3 vías con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 500000$$

$$B - C = 603740$$

22. Patentes con 3 vías con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 500000$$

$$B - C = 45290$$

23. Patentes con 3 vías con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 0,85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0,85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 500000$$



$$B - C = 541339$$

24. Patentes con 3 vías con demanda baja –baja

$$Beneficios = (115 * 0.85 * 365 - 50 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0.85 * 365 - 50 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 3000 + 500000$$

$$B - C = -17111$$

25. Free Flow con 2 vías y ampliado con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0,97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 5000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 700647$$

26. Free Flow con 2 vías y ampliado con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 5000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 63538$$

27. Free Flow con 2 vías y no ampliado con demanda alta –alta

$$Beneficios = (175 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{300 * 0,97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 5000 + 380000$$

$$B - C = 521778$$

28. Free Flow con 2 vías y no ampliado con demanda alta –baja

$$Beneficios = (175 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0,97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$Costos = 5000 + 380000$$

$$B - C = 238538$$

29. Free Flow con 2 vías y ampliado con demanda baja –alta

$$Beneficios = (115 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0,97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = 629619$$

30. Free Flow con 2 vías y ampliado con demanda baja –baja

$$\text{Beneficios} = (115 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 097 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 380000 + 175000$$

$$B - C = -7671$$

31. Free Flow con 2 vías y no ampliado con demanda baja –alta

$$\text{Beneficios} = (115 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{300 * 097 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 380000$$

$$B - C = 450569$$

32. Free Flow con 2 vías y no ampliado con demanda baja –baja

$$\text{Beneficios} = (115 * 0,97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 097 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 380000$$

$$B - C = 167329$$

33. Free Flow con 3 vías con demanda alta –alta

$$\text{Beneficios} = (175 * 0.97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0.97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 500000$$

$$B - C = 755828$$

34. Free Flow con 3 vías con demanda alta –baja

$$\text{Beneficios} = (175 * 0.97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0.97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 500000$$

$$B - C = 118538$$

35. Free Flow con 3 vías con demanda baja –alta

$$\text{Beneficios} = (115 * 0.97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{450 * 0.97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 500000$$

$$B - C = 684619$$

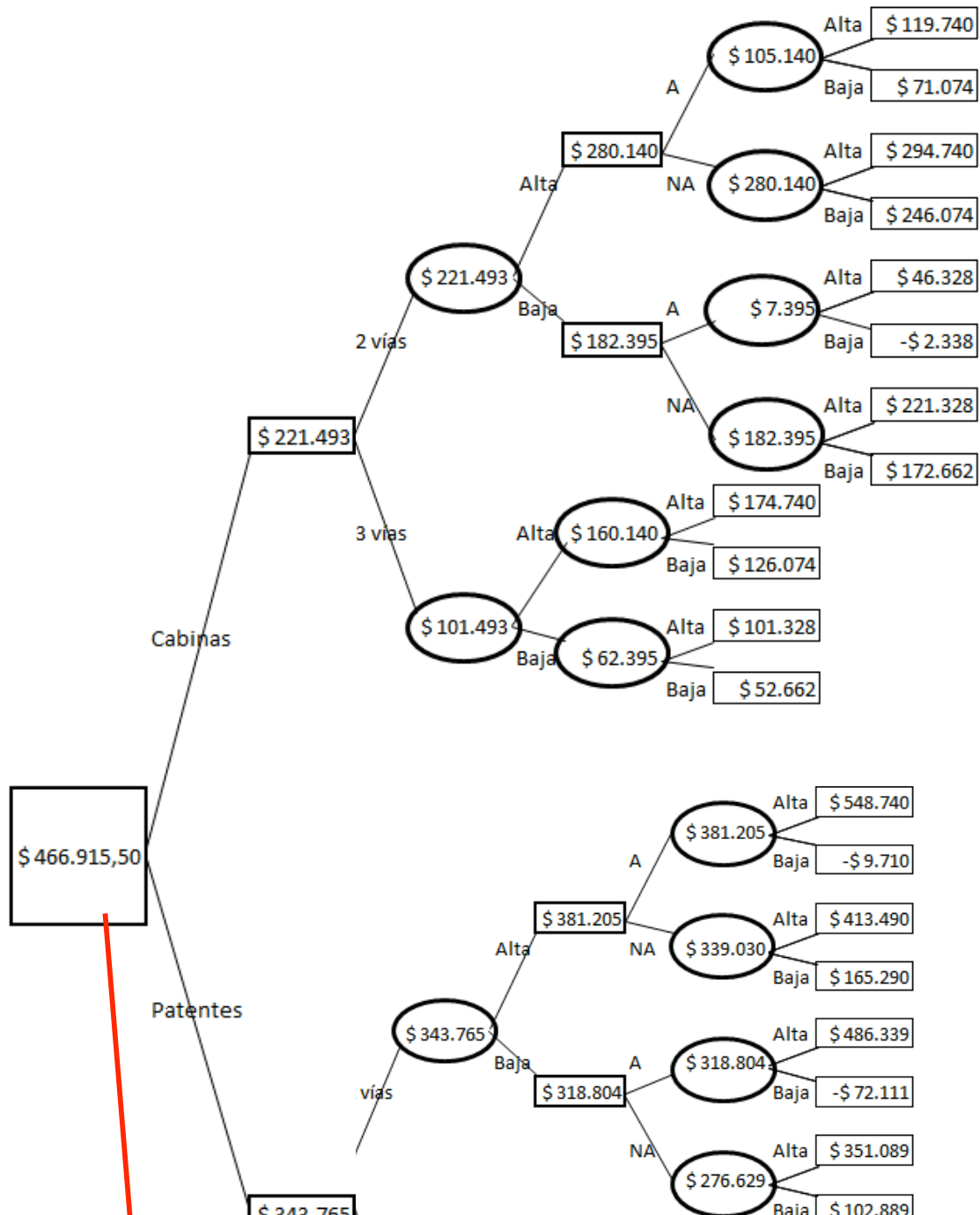
36. Free Flow con 3 vías con demanda baja –baja

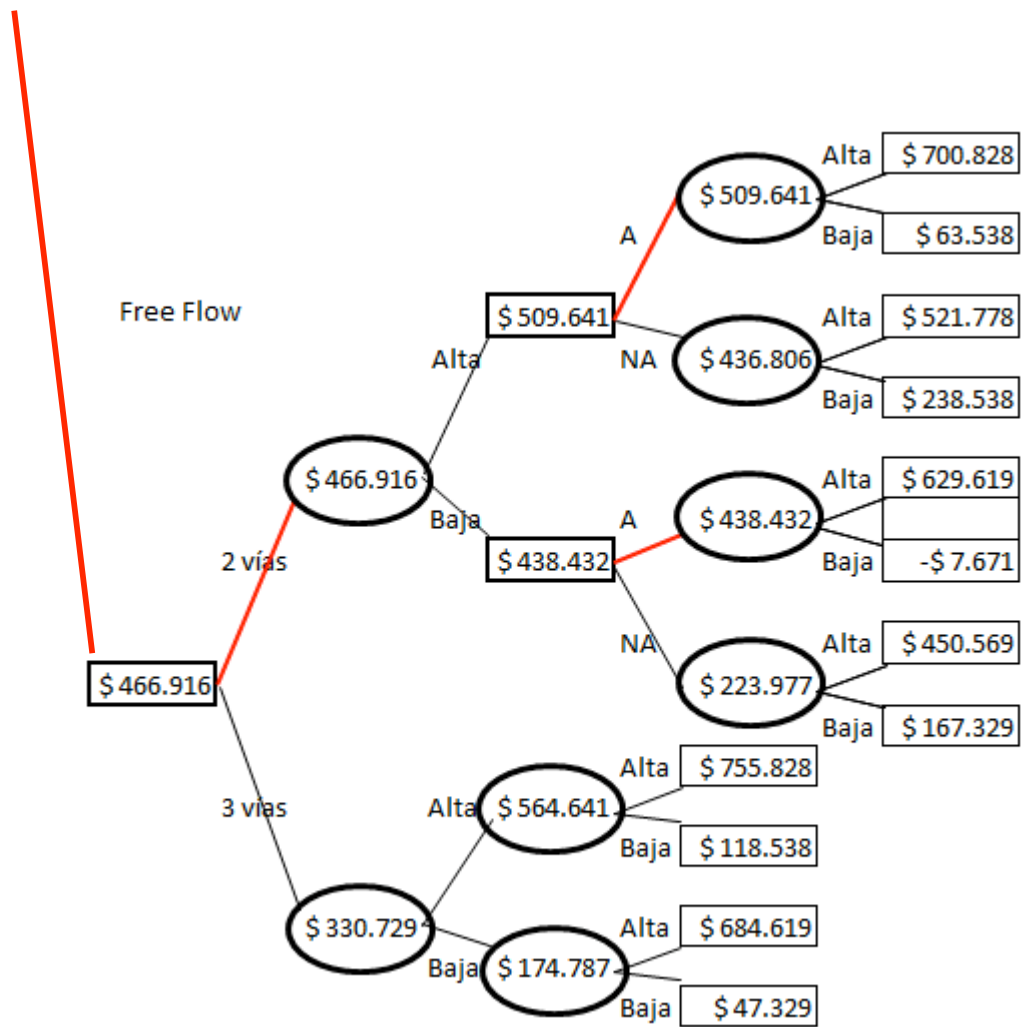
$$\text{Beneficios} = (115 * 0.97 * 365 - 75 * 12) * 3,35 + \frac{180 * 0.97 * 365 - 75 * 12}{0,15}$$

$$\text{Costos} = 5000 + 500000$$

$$B - C = 47329$$

Con estos resultados el árbol nos queda de la siguiente manera:





En Color rojo se observa que la mejor decisión optima es realizar un cobro de peaje con el sistema free flow , iniciar con dos vías vías en los primeros años y luego ampliarse.

## Problema 5

a)

### Respuesta

$$\frac{d\sigma^2}{dw} = 2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} - 2 \cdot w \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$E(r) = w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B$$

$$\sigma^2 = Var(r) = w^2 \cdot Var(r_A) + (1-w)^2 \cdot Var(r_B) + 2 \cdot Cov(r_A, r_B)$$

$$\sigma^2 = w^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

Para Minimizar

$$CPO \Rightarrow \frac{\partial \sigma^2}{\partial w} = 2w \cdot \sigma_A^2 - 2(1-w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} - 2 \cdot w \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} = 0$$

$$w \cdot (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}) - \sigma_B^2 + \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} = 0$$

$$w^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB})}$$

$$w^* = \frac{0.04 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot (-0.5)}{(0.01 + 0.04 - 2 \cdot 0.1 \cdot 0.2 \cdot (-0.5))} = \frac{0.05}{0.07}$$

$$w^* = 0.71 = 71\%$$

Retorno esperado

$$E(r) = w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B$$

$$E(r) = 71\% \cdot 5\% + 29\% \cdot 15\%$$

$$E(r) = 7.9\%$$

Volatilidad de M

$$\sigma^2 = w^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$\sigma^2 = 0.71^2 \cdot 0.01 + 0.29^2 \cdot 0.02 + 2 \cdot 0.71 \cdot 0.29 \cdot 0.1 \cdot 0.2 \cdot (-0.5)$$

$$\sigma^2 = 0.00261 = 26.1\%$$

$$\sigma = 0.051 = 5.1\%$$

b)

Respuesta

$$\sigma^2 = 0.15^2 = w^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$0,0225 = w^2 \cdot 0.01 + (1-w)^2 \cdot 0.04 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot 0.1 \cdot 0.2 \cdot (-0.5)$$

$$0,0225 = 0.01 \cdot w^2 + 0.04 - 0.08 \cdot w + 0.04 \cdot w^2 - 0.02 \cdot w + 0.02 \cdot w^2$$

$$0 = 0.07 \cdot w^2 - 0.1 \cdot w + 0,0175$$

$$w^* = \begin{cases} 1,224 \\ 0,204 \end{cases}$$

Debiera invertir en A 20,4% y en B 79,6%.

El retorno es 11,46%

c)

Respuesta

$$E(r_C) = w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B$$

$$Cov(r_C, r_B) = Cov(w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B, r_B) = 0$$

$$Cov(r_C, r_B) = w \cdot Cov(r_A, r_B) + (1-w) \cdot Cov(r_B, r_B) = 0$$

$$Cov(r_C, r_B) = w \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} + (1-w) \cdot Var(r_B) = 0$$

$$w \cdot (\sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} - Var(r_B)) + Var(r_B) = 0$$

$$w^* = \frac{\sigma_B^2}{(\sigma_B^2 - \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB})}$$

$$w^* = \frac{0.04}{(0.04 - 0.1 \cdot 0.2 \cdot (-0.5))} = \frac{0.04}{0.05}$$

$$w^* = 0.8 = 80\%$$

Debo invertir 80% en A y 20% en B.

2.-

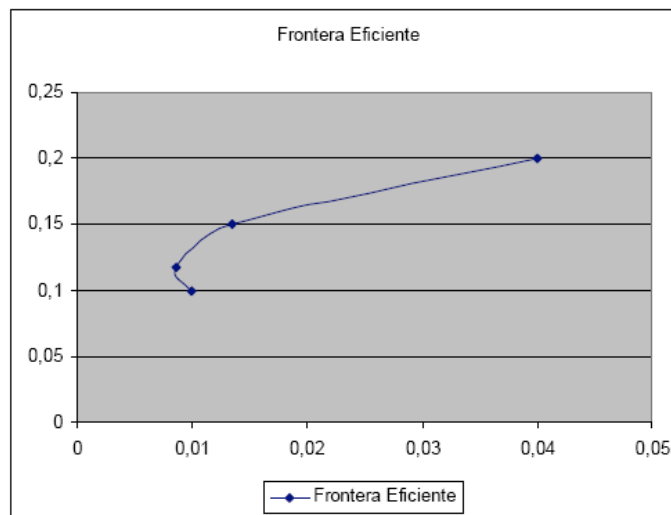
a)

$$w^* = \frac{\sigma_B^2 - \text{Cov}(r_A, r_B)}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \text{Cov}(r_A, r_B))}$$

$$w^* = \frac{0.04 - 0.002}{(0.01 + 0.04 - 2 \cdot 0.002)} = \frac{0.038}{0.046} = 0.826$$

$$E(r_{MV}) = w \cdot r_A + (1 - w) \cdot r_B$$

$$E(r_{MV}) = 0.826 \cdot 0.1 + 0.174 \cdot 0.2 = 11,74\%$$



b)

Respuesta

$$\sigma^2 = w^2 \cdot \sigma_A^2 + (1 - w)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w \cdot (1 - w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$\frac{d\sigma^2}{dr} = \frac{d\sigma^2}{dw} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{d\sigma^2}{dw} \bigg/ \frac{dr}{dw}$$

$$\frac{dr}{dw} = r_A - r_B$$

$$\frac{d\sigma^2}{dw} = 2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1 - w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1 - w) \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB} - 2 \cdot w \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$\frac{d\sigma^2}{dw} = 2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1 - w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1 - 2w) \cdot \sigma_{AB}$$

$$\frac{dr}{d\sigma^2} = \frac{r_M - r_f}{\sigma_M^2} = \frac{\frac{dr}{dw}}{\frac{d\sigma^2}{dw}} = \frac{r_A - r_B}{2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1-2w) \cdot \sigma_{AB}}$$

Dado que en el punto de la cartera de mercado, las pendientes de la curva eficiente y la LMC son iguales, igualamos a la pendiente de la curva de LMC.

$$\frac{(r_A - r_B)2\sigma}{2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1-2w) \cdot \sigma_{AB}} = \left[ \frac{r_M - r_f}{\sigma_M} \right]$$

Como el punto pertenece a la frontera eficiente,

$$\frac{(r_A - r_B)2\sigma_M^2}{2 \cdot w \cdot \sigma_A^2 - 2 \cdot (1-w) \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot (1-2w) \cdot \sigma_{AB}} = w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B - r_f$$

$$\frac{(r_A - r_B)\sigma_M^2}{w \cdot \sigma_A^2 - (1-w) \cdot \sigma_B^2 + (1-2w) \cdot \sigma_{AB}} = w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B - r_f$$

Reemplazando los valores, y despejando una ecuación para w, tenemos:

$$0.02w^3 - 0.033w^2 - 0.008w + 0.008 = 0$$

$$w = \begin{cases} 1.748 \\ -0.523 \\ 0.432 \end{cases}$$

y w tiene que pertenecer al conjunto [0,1]

Luego, w=0.432

Con esto,



$$r_{\text{Mercado}} = 0.432 \cdot r_A + (1 - 0.432) \cdot r_B = 15.7\%$$

$$\sigma^2_{\text{Mercado}} = 0.432^2 \cdot 0.01 + 0.568^2 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0.432 \cdot 0.568 \cdot 0.002 = 1.575\%$$

$$\sigma_{\text{Mercado}} = 12.55\%$$

$$\text{La LMC es igual a: } r = 0.04 + (0.117 / 0.1255) \cdot \sigma = 0.04 + 0.93 \sigma$$

Ojo: Resolución con los datos “extras” entregados en la prueba

$$E(r_M) = w \cdot r_A + (1 - w) \cdot r_B$$

$$\text{Cov}(r_M, r_A) = \text{Cov}(w \cdot r_A + (1 - w) \cdot r_B, r_A) = 0.0055$$

$$\text{Cov}(r_M, r_A) = w \cdot \text{Cov}(r_A, r_A) + (1 - w) \cdot \text{Cov}(r_B, r_A) = 0.0055$$

$$\text{Cov}(r_M, r_A) = w \cdot \text{Var}(r_A) + (1 - w) \cdot 0.002 = 0.0055$$

$$\text{Cov}(r_M, r_A) = w \cdot 0.01 + (1 - w) \cdot 0.002 = 0.0055$$

$$w \cdot (0.01 - 0.002) + 0.002 = 0.0055$$

$$w^* = \frac{0.0055 - 0.002}{(0.008)} = \frac{0.0035}{0.008} = 0.437$$

Con esto,

$$r_{\text{Mercado}} = 0.437 \cdot r_A + (1 - 0.437) \cdot r_B = 15.63\%$$

$$\sigma^2_{\text{Mercado}} = 0.437^2 \cdot 0.01 + 0.563^2 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0.437 \cdot 0.563 \cdot 0.002 = 1.557\%$$

$$\sigma_{\text{Mercado}} = 12.47\%$$