Parte I
Suponga que en una economía con un gran número de activos, en donde se cumple el modelo CAPM, se tiene que para dos portafolios A y B se tiene la siguiente información de diferentes activos

Portafolio	Beta	Sigma (Retornos)
A	1,2	10%
B	0,8	8%

Ambos portafolios, A y B, se encuentran sobre la frontera eficiente. Además, sabe que existe un portafolio C, compuesto por A y B, que tiene beta cero y retorno esperado 5,5%. Por último, también conoce la existencia de un portafolio D, compuesto por A, B y C, que tiene beta 1,5 y un retorno esperado de 14,5%.

a) ¿Cuál es la volatilidad del portafolio de mercado si la covarianza entre A y B es igual a 0.?. Hint: El portafolio de mercado tiene beta = 1 **(1,5 punto)**
b) Un inversionista desea invertir $1.000.000 en el portafolio de mínima varianza formado entre A, B y D. Calcule cuanto tendría que invertir en A y B en dicho portafolio, así como su y volatilidad y retorno esperados **(1,5 punto)**
c) A partir de b), ¿Pertenece D a la frontera eficiente? **(0,5 puntos)**
d) ¿Cómo cambia su respuesta en c) si aparece un activo libre de riesgo? **(0,5 puntos)**
e) **Bonus (0,5 puntos): Forme un portafolio E, compuesto por A y B y que tenga correlación 0,01 con el activo B.**

Parte II
La empresa Aerolíneas Oceánicas desea calcular su costo de capital. Como la empresa no está lista en bolsa, ha decidido usar información de otras líneas aéreas listadas en bolsa

Empresa	Beta	Relación Deuda/Patrimonio	Impuestos
Island Airlines	1,15	0,8	45%
Mistery Wings	0,96	0,2	15%
Sure Departure	1,40	1	35%

Además se sabe que el retorno esperado para el Mercado es de 15% y la tasa libre de riesgo es de 6%.
Calcule el retorno exigido para los activos (WACC) de Aerolíneas Oceánicas si la empresa tiene una relación Deuda/Patrimonio de 3 veces, la tasa de impuestos es de 25% y sabe que la empresa Aerolíneas Oceánicas puede endeudarse a una tasa del 15% **(2 puntos)**

Pauta:

Parte I

a)

Necesitamos calcular σ_M. Sabemos que al ser una economía que cumple CAPM, y teniendo en cuenta que A y B están en "la frontera", al igual que M (mercado, por definición), y sabiendo además que cualquier punto de la frontera puede ser construido por otros dos puntos de la misma, entonces podemos expresar M como una combinación lineal de A y B, por lo tanto

0 (enunciado)

$$\sigma_M^{\ 2} = w_A^{\ 2}\sigma_A^{\ 2} + w_B^{\ 2}\sigma_B^{\ 2} + 2w_A w_B \sigma_A \cancel{\sigma_B} \rho_{AB}$$

$$\sigma_M^{\ 2} = w_A^{\ 2}\sigma_A^{\ 2} + w_B^{\ 2}\sigma_B^{\ 2}$$ **Ecuación 1**

Por otro lado, usando la indicación (o la materia), sabemos que β_M=1 . Además sabemos que $\beta_M = w_A\beta_A + w_B\beta_B$ **Ecuación 2**

> Nota para la corrección: **Alternativamente, alguien puede haber llegado al mismo resultado, pero ocupando la relación entre A, B y M**
>
> $E(r_M) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B)$
>
> , sabiendo además que tanto A, B y M cumplen con CAPM también se puede obtener que:
>
> $E(r_M) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B) \Rightarrow$
>
> $r_F + \beta_M(r_M - r_F) = w_A(r_F + \beta_A(r_M - r_F)) + w_B(r_F + \beta_B(r_M - r_F)) \Rightarrow$
>
> $r_F + \beta_M(r_M - r_F) = r_F(w_A + w_B) + (w_A\beta_A + w_B\beta_B)(r_M - r_F)$
>
> Como además $w_A+w_B=1$
>
> $r_F + \beta_M(r_M - r_F) = r_F + (w_A\beta_A + w_B\beta_B)(r_M - r_F) \Rightarrow$
>
> $\beta_M(r_M - r_F) = (w_A\beta_A + w_B\beta_B)(r_M - r_F) \Rightarrow$
>
> $\beta_M = w_A\beta_A + w_B\beta_B$
>
> Pero no se requería hacer esta demostración, sólo bastaba con saber la Ecuación 2

Como sabemos que β_M=1

$$\beta_M = 1 = w_A\beta_A + w_B\beta_B \Rightarrow$$

$$\beta_M = 1 = w\beta_A + (1-w)\beta_B \Rightarrow$$

$$w = \frac{\beta_M - \beta_B}{\beta_A - \beta_B} = \frac{1-0{,}8}{1{,}2-0{,}8} = 0{,}5$$

> **Nota para la corrección:** Darse cuenta que el beta del mercado era el promedio de los betas de A y B en un paso también debe ser considerado como bueno siempre y cuando w=0,5

Entonces, volviendo a **Ecuación 1**:

$$\sigma_M{}^2 = w_A{}^2\sigma_A{}^2 + w_B{}^2\sigma_B{}^2 = (0,5)^2(0,1)^2 + (1-0,5)^2(0,08)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_M{}^2 = 6,4\%$$

b)

A y B pueden estar en cualquier parte de la frontera, pero es importante entender que D está también en la frontera, por ser combinación lineal de A y B

NOTA PARA LA CORRECCIÓN: EN ESTA PREGUNTA HABÍA QUE ARGUMENTAR QUE D TAMBIÉN ERA PARTE DE LA FRONTERA, EXISTEN UNA LARGA SERIE DE RESPUESTAS VÁLIDAS QUE EN REALIDAD EXPLICAN LO MISMO, COMO POR EJEMPLO:
TEOREMA DE DOS FONDOS
MATEMÁTICAMENTE SE SABE QUE SI TOMO A Y B PUEDO DIBUJAR TODA LA CURVA, INCLUYENDO A D
ALGUNA EXPLICACIÓN DE GEOMETRÍA ANALÍTICA O RESOLUCIÓN DE ALGÚN SISTEMA (MUUUY LARGO)
EXPLICANDO QUE SI W ES SOLUCIÓN DE MIN (W) WAW, CON A MATRÍZ VARIANZA COVARIANZA, Y LAS RESTRICCIONES USUALES, ENTONCES UNA COMBINACIÓN LINEAL DE DOS SOLUCIÓN ES TAMBIÉN SOLUCIÓN
CUALQUIER OTRA QUE HAGA SENTIDO MATEMÁTICA Y/O FINANCIERAMENTE.

Entonces, dado que min (w, sigma portafolio de A, B y D) es equivalente al min (w, sigma portafolio de A y B), entonces hay que resolver

$$\min_w \left\{ \sigma_P{}^2 = w^2\sigma_A{}^2 + (1-w)^2\sigma_B{}^2 + 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} = w^2\sigma_A{}^2 + (1-w)^2\sigma_B{}^2 \right\}$$

(EN REALIDAD SE MINIMIZA σ_P, PERO COMO LA FUNCIÓN CUADRADO ES CONTINUA ES EQUIVALENTE EL MÍNIMO)

$$\frac{\partial \sigma_P{}^2}{\partial w} = 0 = 2w\sigma_A{}^2 - 2(1-w)\sigma_B{}^2 \Rightarrow$$

$$w^* = \frac{\sigma_B{}^2}{\sigma_A{}^2 + \sigma_B{}^2} = 0,0064 / (0,01 + 0,0064) = 39,02\%$$

Por lo tanto,

Hay que invertir ~ $390 mil en A y $610 mil en B

NOTA PARA LA CORRECCIÓN EN ESTA PREGUNTA NO ERA NECESARIO DERIVAR SI SE SABÍA LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA Y SE SABÍA QUE HABÍA QUE HACER UNA MINIMIZACIÓN. POR LO TANTO, SI ALGUIEN PUSO LA FÓRMULA DE W* Y DIJO QUE ERA LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA ESTÁ OK.

Ahora, como conocemos los pesos que tiene el portafolio de mìnima varianza en términos de A y B, podemos calcular su volatilidad:

$$\sigma_P{}^2 = w_A{}^2\sigma_A{}^2 + w_B{}^2\sigma_B{}^2 = 0,3902^2 * 0,01 + 0,6098^2 * 0,0064$$

$$\sigma_P = 6,25\%$$

Ahora sólo falta calcular $E(r_P)$

Primero, sabemos que P pertenece a la frontera, por lo tanto cumple que

$$E(r_P) = w * E(r_A) + (1 - w*)E(r_B) \qquad \text{Ecuación } 3$$

Pero además sabemos que tanto C, como D cumplen CAPM

$$E(r_C) = r_F + \beta_C(r_M - r_F) \qquad \text{Ecuación } 4$$
$$E(r_D) = r_F + \beta_D(r_M - r_F) \qquad \text{Ecuación } 5$$

A partir del enunciado podemos obtener r_F y (r_M-r_F), ya que sabemos que $E(r_C)$=5,5% y $E(r_D)$=14,5%, reeemplazando en Ecuación 4

$$E(r_C) = r_F + \beta_C(r_M - r_F) = 5{,}5\%$$
$$r_F + 0 * (r_M - r_F) = 5{,}5\%$$
$$r_F = 5{,}5\%$$

Y en Ecuación 5:

$$E(r_D) = r_F + \beta_D(r_M - r_F) = 14{,}5\%$$
$$\Rightarrow 5{,}5\% + 1{,}5(r_M - r_F) = 14{,}5$$
$$\Rightarrow (r_M - r_F) = 6\%$$

Entonces ahora podemos calcular $E(r_A)$ y $E(r_B)$ por CAPM:

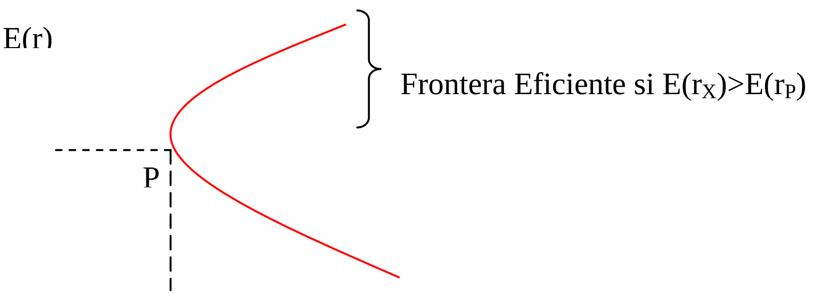
$$E(r_A) = r_F + \beta_A(r_M - r_F) = 5{,}5\% + 1{,}2 * 6\% = 12{,}7\%$$
$$E(r_B) = r_F + \beta_B(r_M - r_F) = 5{,}5\% + 0{,}8 * 6\% = 10{,}3\%$$

Volviendo a la Ecuación 3:

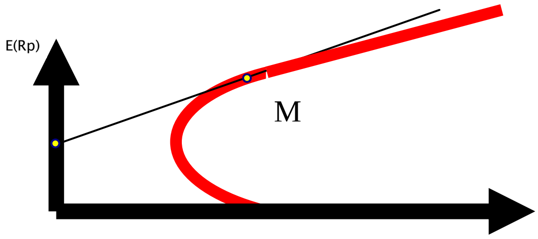
$$E(r_P) = w * E(r_A) + (1 - w*)E(r_B) = 0{,}3902 * 12{,}7\% + 0{,}6098 * 10{,}3\%$$
$$E(r_P) = 11{,}24\%$$

c) Lo único que se requiere es decir que para que D sea punto de la frontera, entonces $E(r_D)>E(r_P)$, ya que ambos puntos están "sobre" la parábola, con eso la pregunta está buena.

Por si alguien hizo el cálculo (no requerido) $E(r_D)$=14,5%>11,24% ➔ Pertenece a la frontera.



d) Con activo libre de riesgo aparece la LMC (línea de mercado de capitales), que pasa a ser la nueva frontera



Por lo tanto, si D es distinto al mercado (M), entonces no es parte de la LMC

Lo anterior era todo lo requerido para responder correctamente la pregunta, sin embargo, si alguien deseaba podía resolverla más completamente, pero eso no era necesario, Había dos formas para continuar:

Forma 1: En la parte B) calculamos que E(RM) = 11,5%, por lo tanto distinto a la esperanza del retorno de D, entonces no pertenece a la frontera
Forma 2:
La ecuación de la LMC es
$E(R) = R_F + \sigma(R_M - R_F)/\sigma_M$
entonces se puede calcular con cuanto riesgo en la LMC puedo obtener la misma rentabilidad esperada que en D

$14{,}5\% = 5{,}5\% + \sigma * 6\%/6{,}4\% \Rightarrow \sigma = 9{,}6\%$

Y para calcular σD, usamos que es combinación de A y B (se puede calcular fàcil con la fórmula de la esperanza que es 175% de A y -75% de B) y con eso obtenemos que $\sigma D = 18{,}5\% > 9{,}6\%$, por lo tanto no pertenece a la frontera eficiente.

e)
Re=wRa+(1-w)Rb
Cov(Re, Rb)=0,01
 = cov (wRa+(1-w)Rb,Rb)=w*Cov(Ra,Rb)+(1-w)Cov(Rb,Rb)
Como Cov(Ra,Rb)=0
0,25=(1-w)*8%^2
➔ w=1,5625

Parte II

a) Calculamos betas u de cada empresa, usando que BL=BU(1+D/E(1-T))

	Beta L	D/E	T	Beta U
Island Airlines	1.15	0.8	0.45	0.800
Mistery Wings	0.96	0.2	0.15	0.820
Sure Departure	1.40	1	0.35	0.850
			PROMEDIO	0.823

Se usa Bu negocio = bu promedio, A partir de esa información calculamos Beta L de Oceanicas

BL=0,823*(1+3*(1-25%)=2,675

Entonces usamos CAPM

E(R))=Rf+betaL(Rm-Rf)=6%+2,675*(15%-6%)= 30,1%

Falta calcular el WACC, para eso necesitamos D/V de Oceánicas, que se puede calcular a partir de D/E=3➔ D=3E ➔ V=D+E = 4E ➔ E/V=1/4 ➔ D/V = ¾

Por lo tanto WACC = 0,75*15%*(1-25%)+0,25*30,1%=15,96%