INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Teoría de la Utilidad

Teoría de la Utilidad

El análisis de valores históricos refleja que:

- Existe un relación entre riesgo y rentabilidad
- Los activos más rentables son más riesgosos

Ejemplo:

Una persona puede elegir entre dos alternativas de sueldo:

- Sueldo fijo de $100.000 ó
- Lanzar una moneda y recibir $200.000 si sale cara y $0 si es sello. ¿Qué escogerá?
- Valor esperado de ambas alternativas $100.000.-

Teoría de la Utilidad Cardinal

- Estas situaciones obligan a preguntarse cómo se explica entonces, el proceso de decisión.
- La teoría expuesta ofrece esta explicación (aunque con limitaciones):
  - Cada individuo cuando se enfrenta a situaciones de riesgo, puede asignar un valor a cada una de las alternativas que analiza. Estos son los índices de utilidad cardinal.

Supuestos en resumen

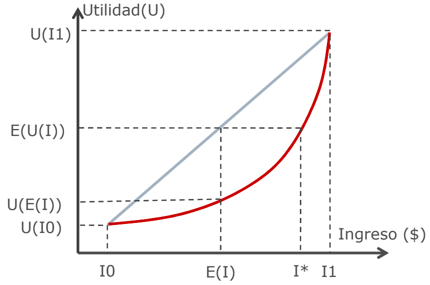
- Resumiendo lo anterior, se puede decir que los supuestos de la Teoría de la utilidad de *Von Neuman* y *Morgenstern* son:
  - El individuo puede ordenar alternativas o las utilidades asociadas a ellas.
  - Puede establecer relaciones de transitividad en su ordenamiento preferencial.
  - Puede determinar pesos α -probabilidades- para comparar alternativas o las utilidades asociadas.

¿Averso o propenso?

- Las personas pueden ser:
  - Aversas al riesgo
  - Propensas al riesgo
  - Indiferentes al riesgo
- Una persona que esté dispuesta a pagar por "jugar" una lotería podrá determinar su actitud al riesgo, según el monto que pague.

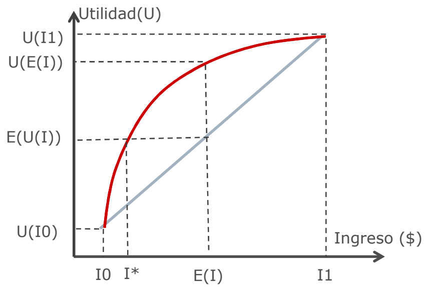
Propensión al riesgo

- Una persona totalmente propensa al riesgo, enfrentada ante el siguiente juego:
  - $0 con probabilidad 0.5
  - $10,000 con probabilidad 0.5
- Estará dispuesta a pagar más del valor esperado del resultado del juego por participar en él.
- O sea, pagará más de $5,000 por participar en este juego.



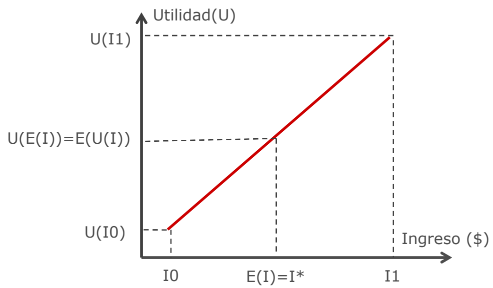
Aversión al riesgo

- Si esa misma persona fuera totalmente aversa al riesgo y se enfrenta a la misma situación
  - Pagará menos del valor esperado del juego por participar en él.
  - O sea, pagará menos de $5,000



Indiferencia al riesgo

- Si la persona fuera indiferente al riesgo, pagaría exactamente $5,000 por participar en el juego
  - U(E(I))=E(U(I))
  - E(I)=I*



Determinación de la función de utilidad

- La utilidad se puede medir en forma relativa y no en términos absolutos. Se puede asignar un índice de utilidad a cada uno de dos valores en forma arbitraria, y a partir de allí construir la función de utilidad.
- Supóngase que se desea determinar la función de utilidad de un individuo con el propósito de buscar una guía para tomar decisiones que sean consistentes con los intereses de éste, definidos en el momento en que se calculó la función. Para hacerlo, se puede adoptar uno de los dos métodos: a) Por el método de fijar las probabilidades y variar los resultados de una supuesta lotería; b) por el método de fijar los resultados de la lotería y variar las probabilidades.

Determinación de la función de utilidad

- Se procederá a ilustrar el primer procedimiento. Suponga que se tienen dos alternativas *A* y *B*. La primera es un regalo libre de impuestos de $300.000, y *B* es una lotería que consiste en ganar $1.000.000 con probabilidad 0,5 o ganar $0 con probabilidad 0,5. Se trata de determinar el valor de la alternativa *A* que hace indiferente al decisor entre ella y la alternativa *B*. Si se asigna una utilidad de 100 utilas (unidad de medida de la utilidad) a $1.000.000 y 0 utilas a $0, (estos dos valores 0 y 100 son arbitrarios; solo están condicionados a que la utilidad asignada a $1.000.000 sea mayor que la asignada a $0, bajo el supuesto de que se prefiere $1.000.000 a $0), se debe encontrar por prueba y error el valor de *A* que hace indiferente al individuo frente a la lotería *B*; en otras palabras, hay que negociar el valor de *A*.

IN42A – EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Determinación de la función de utilidad

- Supóngase entonces que el individuo prefiere la lotería a la alternativa A, esto es:
  - B.>A, entonces: U(B) > U(A)
  - 0,5 x U($1.000.000) + ,5 x U($0) > U($300.000)
- Si se sube el valor de A a $700.000, podría resultar:
  - B.>A y U(B) > U(A)
- Supóngase que para A = $600.000 el individuo es indiferente, esto es: U(B) = U(A)

Es decir:

  - U($600.000) = 0,50 x U($1.000.000) + 0,50 x U($0) = 0,50 x 100 + 0,50 x 0 = 50
  - Entonces la utilidad de $600.000 es 50.

IN42A – EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Determinación de la función de utilidad

- Ahora se puede cambiar el valor de uno de los premios (0 ó 1,000,000) por $600.000 y de manera similar encontrar el valor intermedio; repitiendo este proceso se pueden encontrar varios puntos de la función de utilidad y dibujar la curva correspondiente. Es decir, si se cambia $1.000.000 por $600.000, se obtendrá un valor determinado *T*, tal que, 0 *T* 600.000 y que hace indiferente al individuo frente a la nueva lotería. Entonces para ese *T* que hace indiferente al individuo entre ese valor y la nueva lotería ($600.000 con *p* = 0,5 y $0 con *p* = 0,5), la utilidad será:
  - *U*(*T*) = 0,5 x *U*(0) + 0,5 x *U*($600.000) = 0,5 x 0 + 0,5 x 50
  - *U*(*T*) = 25

IN42A – EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Determinación de la función de utilidad

- Se define arbitrariamente: U($0)=0 y U($1.000.000)=100

300.000	1.000.000*0,5 + 0*0,5	B ⇨	U(B)>U(A) 0,5*U(MM$1)+0,5*U($0)>U(M$300)
400.000	1.000.000*0,5 + 0*0,5	B	
500.000	1.000.000*0,5 + 0*0,5	B	
600.000	1.000.000*0,5 + 0*0,5	? ⇨	U(B)=U(A) 0,5*U(MM$1)+0,5*U($0)=U(M$600)
700.000	1.000.000*0,5 + 0*0,5	A ⇨	U(A)>U(B) U(M$700)>0,5*U(MM$1)+0,5*U($0)

- Luego, de esta primera sesión de elecciones obtuvimos que U(M$600)=0,5*U(MM$1)+0,5*U($0)
  U(M$600)=0,5*100+0,5*0=50

Determinación de la función de utilidad

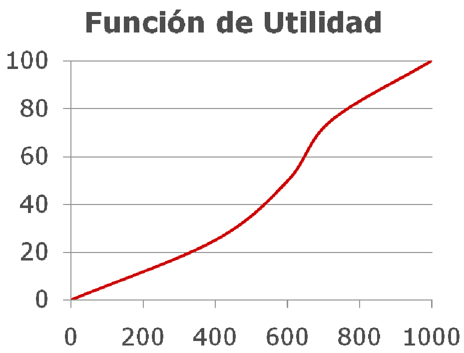
- Ahora cambiamos 1.000.000 por 600 y buscamos un valor intermedio, que haga al individuo indiferente…

100.000	600.000*0,5 + 0*0,5	B ⇨	U(B)>U(A) 0,5*U(M$600)+0,5*U($0)>U(M$100)
200.000	600.000*0,5 + 0*0,5	B	
300.000	600.000*0,5 + 0*0,5	B	
400.000	600.000*0,5 + 0*0,5	? ⇨	U(B)=U(A) 0,5*U(M$600)+0,5*U($0)=U(M$400)
500.000	600.000*0,5 + 0*0,5	A ⇨	U(A)>U(B) U(M$500)>0,5*U(M$600)+0,5*U($0)

- Luego, ahora sabemos que U(M$400)=0,5*U(M$600)+0,5*U($0)
  U(M$400)=0,5*50+0,5*0=25

Supongamos este resultado

Dinero ($)	Utilidad
0	0
400	25
600	50
720	75
1000	100



Teoría de la Utilidad Cardinal: ¿sirve?

- Esta teoría parece ser aceptable a corto plazo: cuando el individuo tiene que tomar la decisión y los resultados son inmediatos. Puede no ser válida cuando la decisión implica resultados futuros.

Limitaciones de la teoría de la utilidad

- Otro problema que se presenta es la complejidad de las decisiones. Situaciones simples como las que se han presentado no ocurren en la realidad. Al aislar los problemas el decidor actúa diferente.

- Un problema pertinente para el análisis económico se presenta cuando se está trabajando con ingresos y egresos bajo riesgo. ¿Se debe aplicar el análisis de utilidad antes o después de ser descontado el flujo de dinero a valor presente? ¿Tiene sentido aplicar una función de utilidad actual a un riesgo futuro? Para la primera pregunta la respuesta es que se debe trabajar con valores netos.

Limitaciones de la teoría de la utilidad

- Definitivamente queda por investigar la segunda pregunta: ¿Existe "permanencia" o "invariabilidad" en la función de utilidad a través del tiempo? La evidencia empírica y el razonamiento lógico llevan a concluir que no. Esta es una teoría a corto plazo; a largo plazo, como son los efectos de las decisiones de inversión de capital, puede no ser adecuada. Sin embargo, se puede definir una función de utilidad "aceptable", por ejemplo cuando el decisor esté en óptimas condiciones de estabilidad emocional, considerando esa función de utilidad como la estable o permanente, y tratando de ser consistente con ella en decisiones futuras.

Limitaciones de la teoría de la utilidad

- Pero estos no son los únicos inconvenientes que se anotan a la teoría de la utilidad. Algunos adicionales a los mencionados son:
  - Multiplicidad de objetivos. La teoría de la utilidad es unidimensional en el sentido de que supone que existe un solo objetivo para el decisor y que éste puede expresarlo en términos de dinero. Cuando se plantean alternativas, como la construcción de una represa donde hay beneficios económicos, pero también costos y beneficios sociales, ecológicos, políticos, etc, ¿cómo involucrarlos?
  - Unidimensionalidad en el análisis de la distribución de probabilidad. Esta teoría solo considera el valor esperado de la distribución. ¿Un decisor será indiferente entre loterías con igual utilidad esperada y diferente varianza? ¿Qué decir de distribuciones no simétricas?
  - Desconocimiento de la actitud hacia la incertidumbre. Los decisores tienden a preferir eventos ciertos a eventos inciertos.

Equivalente Cierto

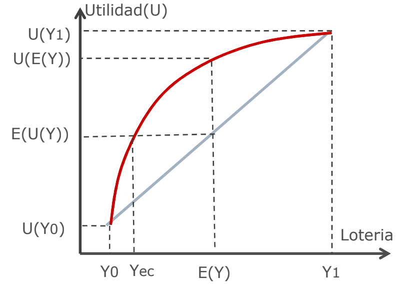
- La utilidad depende del nivel de riqueza

$$U = f(W)$$

- Si $f'' < 0$, el individuo es averso al riesgo
- Si $f'' > 0$, el individuo es amante del riesgo
- Si $f'' = 0$, el individuo es neutro al riesgo

Equivalente Cierto

- Si se define una lotería Y, con resultados Ya con probabilidad α, Yb con probabilidad β, entonces para el averso al riesgo:
  - U(E(Y)) > E (U(I))
  - U(E(Y)) > α U(Ya) + β U(Yb)
- Equivalente cierto: Un nivel de riqueza Yec. Tal que:
  - U(Yec) = E (U(Y))



Teoría de la Utilidad

Ejemplo

Suponga que Ud. posee $250.000. Decide comprar una bicicleta que tiene un valor de $200.000, y además invierte la diferencia en un depósito bancario que le reporta un interés anual de 6%. Según un estudio estadístico, existe una probabilidad de 0,1% que su bicicleta sea robada, con lo que el valor económico de ella sería cero.

Si su función de utilidad es U (x) = Ln (x)

¿Cuánto estaría dispuesto a pagar para asegurar su bicicleta al principio del año?

Teoría de la Utilidad

Solución

Tenemos dos posibilidades: comprar la bicicleta y que no me roben, con probabilidad de 0,999, y comprar la bicicleta y que me la roben, con probabilidad de 0,001.

El valor esperado de mi beneficio (x) será de:

E(x) = 0,999*(200.000+1,06*50.000)+0,001*(0+1,06*50.000)

E(x) = 0,999 * 253.000 + 0,001 * 53.000

E(x) = 252.800

Por otro lado, el valor esperado de mi utilidad será:

E(U(x)) = 0,999 * Ln(253.000) + 0,001 * Ln (53.000)

E(U(x)) = 0,999 * 12,441 + 0,001 * 10,878

E(U(x)) = 12,4396

Teoría de la Utilidad

- Calculamos el equivalente cierto:
  - U(EC) = E (U(x)) y U(x)=Ln(x)
  - EC = exp(E(U(x))) = exp(12,3496)
  - EC = 252.609,48
- Finalmente, la disponibilidad a pagar será:
  - Disp. a pagar = E(x) – EC = 252.800 – 252.609,48
  - Disp. a pagar = 190.52
- Esta disponibilidad a pagar es el premio por riesgo. Esto es lo máximo que se está dispuesto a pagar.

Ejemplo

- Un individuo tiene una riqueza actual de $100,000.
- El próximo año puede perder su automóvil valorado en $20,000 con probabilidad 25% como consecuencia de un robo.
- Función de Utilidad: U(W)=ln(W).

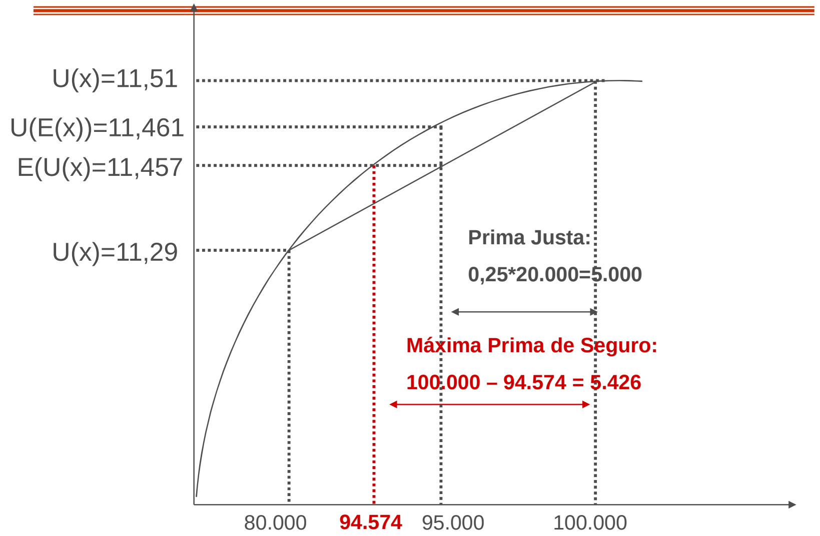
Hallar:

i) Utilidad Esperada

ii) Prima Justa (aquella que sólo cubre los costos de indemnizaciones, costos de administración = 0).

Iii) Máxima Prima dispuesto a pagar.

Ejemplo



Bibliografía

- Fundamentos de Financiación Empresarial, R. Brealey y S. Myers, Quinta Edición, Capítulo 7,8,9.