

Tarea 3: IN4221, Primavera 2009

Entrega: 10 de Noviembre

Problema 1 Un conjunto N de jugadores desea recibir un servicio, por el cuál el jugador $i \in N$ está dispuesto a pagar u_i . Para ello consideramos un árbol $G = (V, T)$ en que el conjunto de vértices $V = N \cup \{f\}$, donde f es el nodo fuente, el que origina el servicio. Cada arco $e \in T$ tiene un costo c_e , y el costo de proveer el servicio a un subconjunto de agentes $S \subseteq N$, denotado por $c(S)$, es el costo del subárbol que conecta a todos los vértices en S con f .

- (a) Pruebe que el core del juego es no vacío.
- (b) Inspirándose en la sección 15.4.1 describa un esquema de repartición de costos para el problema que sea 1-balanceado y multimónoto, y usando el teorema de Moulin deduzca un mecanismo a prueba de coaliciones y 1-balanceado.

Problema 2 Continuación del problema anterior.

- (c) Calcule el valor de Shapley (sección 15.6.1) del juego cuando los N agentes reciben el servicio. Interprete este valor, mostrando que entrega una solución intuitiva en el sentido que el costo de un arco se comparte entre todos los jugadores que están más “abajo”.
- (d) [No tiene relación con juegos] Suponga que obviamos todos los elementos estratégicos y quisieramos calcular el subconjunto de agentes que recibe el servicio en una solución socialmente óptima. Es decir queremos resolver:

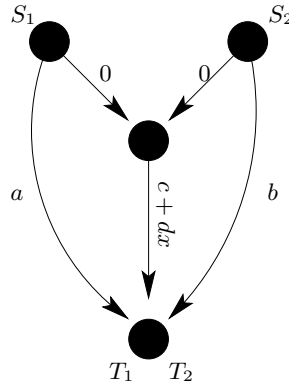
$$\max_{S \subseteq N} \left\{ \sum_{i \in S} u_i - c(S) \right\}.$$

¿Cómo lo haría de forma eficiente?

Problema 3 Considere el juego en redes no-atómico descrito en clase, y supongo que la clase de funciones de costo en los arcos está dada por: $\mathcal{C} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p : \text{con } a_0, \dots, a_p \geq 0\}$. Pruebe que el precio de la anarquía en este caso está dado por:

$$\left(1 - \frac{p}{(p+1)^{(p+1)/p}} \right)^{-1}.$$

Problema 4 Consideremos el juego en redes de la figura. Hay dos pares origen-destino (S_1, T_1) , (S_2, T_2) , y la demanda es $r_1 = r_2 = 1$. El costo de los dos arcos incidentes en el nodo central es cero. Los costos de los arcos de la derecha e izquierda son constantes a y b respectivamente, mientras el único arco que se congestiona es el central cuya función de costos es $c + dx$, donde x es el flujo en tal arco.



- (a) Calcule en equilibrio de Wardrop y el óptimo social en esta situación en función de a, b, c, d . Encuentre además los valores de a, b, c, d que maximizan el precio de la anarquía de la instancia.
- (b) Consideremos ahora que los jugadores del par origen-destino 2 forman una coalición por lo que pasa a ser un jugador atómico con flujo divisible, cuyo interés es minimizar el costo colectivo de su flujo. Es decir, si (x_e^1) y (x_e^2) son los flujos inducidos en los arcos por los pares origen-destino, (x_e^2) resuelve $\min \sum_{e \in E} x_e^2 c_e(x_e^1 + x_e^2)$, para (x_e^1) fijo. Los jugadores del par origen-destino 1 siguen comportandose de forma noatómica.

Calcule el costo de este nuevo equilibrio en función de a, b, c, d , y encuentre los valores que maximizan el precio de la anarquía. Observe que, contrariamente a lo esperado, el precio de la anarquía puede ser mayor al del equilibrio de Wardrop de la parte (a).

- (c) **[Opcional: se ofrece nota final 7.0 en el curso a quien lo haga]** En la parte (b) construimos una instancia del juego atómico divisible, con funciones de costo lineales afines, cuyo precio de la anarquía es mayor a $4/3$. Sin embargo el ejemplo tiene dos “fuentes” distintas. Considere ahora el juego atómico divisible, con funciones de costo lineales afines, en que todos los jugadores rutean en el mismo par origen-destino. ¿Será cierto que el precio de la anarquía en esta situación es a lo más $4/3$? demuestre o entregue un contraejemplo.