Tarea 2: IN4221, Primavera 2009

Problema 1 Considere un grupo de N municipalidades que deben decidir donde construir un vertedero. Cada una experimenta un costo privado $c_i \geq 0$ (que es información privada) si se construye en su territorio. Además, existen M posibles contratistas. El costo para el contratista j de construir en el territorio de la municipalidad i es $k_{ij} \geq 0$ (información privada del contratista).

(a) Escriba el problema anterior como uno de diseo de mecanismos. Suponga que el planificador social está interesado en minimizar el costo social total del proyecto.

(b) Encuentre un mecanismo VCG que alcanza el óptimo social. ¿Cómo son los pagos si utiliza la regla de pivot de Clark?

(c) ¿Cómo son los pagos de las municipalidades donde no se construye el vertedero? ¿Mayores o menores que 0? ¿Y para aquella donde se construye?

(d) Suponga que el gobierno pudiera amenazar creíblemente a las municipalidades que si una de ellas no participa, entonces el proyecto se construirá en esa comuna. Es decir, la utilidad de reserva (utilidad si no participa) es $-c_i$. ¿Está cada municipalidad mejor participando que sin participar?

Problema 2 Considere un remate por un objeto, con N ofertantes que tienen una valoración distribuída uniformemente en $[0, 1]$. El remate es de sobre cerrado a primer precio.

(a) Calcule el equilibrio bayesiano de este juego.

(b) Suponga que la distribución es F en $[0, 1]$. Calcule el equilibrio bayesiano.

(c) Encuentre un mecanismo directo y compatible en incentivos que obtiene los mismos pagos que el caso anterior.

(d) Demuestre que en esperanza, lo obtenido en este remate es lo mismo que lo obtenido en uno de sobre cerrado a segundo precio.

Problema 3 En este problema queremos estudiar condiciones sobre las funciones de valoración que garanticen existencia de equilibrio de Walras.

(a) Suponga que en el problema (WD) visto en clase cada jugadore valora un solo ítem. Es decir, para todo $i \in N$ exsiten $j_i \in M$ y $v_i \in \mathbb{R}_+$ tal que la valoración del jugador i satisface:

$$v_i(S) = v_i \text{ si } S \ni j_i, \text{ y } v_i(S) = 0 \text{ si no.}$$

Usando la condición de integralidad vista en clase, demuestre que en este caso existe un equilibrio de Walras .

(b) En clase vimos un algoritmo que encuentra un $\varepsilon-$equilibrio de Walras cuando las funciones de valoración de los jugadores $v_i(\cdot)$ satisfacen la propiedad de sustitución. ¿Será cierto en general que si las valoraciones satisfacen la propiedad de sustitucion entonces existe un equilibrio de Walras? Demuestre o de un contraejemplo.

Problema 4 Resuelva el problema 11.9 del libro AGT.

Problema 5 Considere la siguiente adaptación del algoritmo exponencial al caso de información incompleta. En cada etapa t solamente observamos la componente seleccionada $\ell^t_{i_t}$ y definimos la secuencia $\tilde{\ell}^t$ de vectores de *pseudo-costos* mediante

$$\tilde{\ell}^t_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq i_t \\ \ell^t_i / p^t_i & \text{si } i = i_t \end{cases}$$

así como los pseudo-costos acumulados $\tilde{L}^t_i = \sum_{\tau=1}^t \tilde{\ell}^\tau_i$. Dados $\epsilon > 0$ y $\beta > 0$ tomamos

$$p^t_i = \epsilon \tfrac{1}{n} + (1 - \epsilon) \tfrac{w^t_i}{W^t}$$

con $w^t_i = \exp(-\beta \tilde{L}^{t-1}_i)$ y $W^t = \sum_{i=1}^n w^t_i$. Intuitivamente: con probabilidad ϵ escogemos i_t segun una ley uniforme y con probabilidad $(1-\epsilon)$ segun una ley exponencial.

(a) Pruebe que $\tilde{\ell}^t$ es un vector aleatorio cuya esperanza es $\mathbb{E}(\tilde{\ell}^t) = \ell^t$.

(b) Sea $\gamma = \frac{n\beta}{\epsilon} / [1 - \exp(-\frac{n\beta}{\epsilon})]$ y suponga que ϵ y β son tales que $(1 - \epsilon)\gamma \geq 1$. Demuestre que en tal caso el algoritmo tiene regret externo dado por:

$$R^T = T[\epsilon + (1-\epsilon)\gamma - 1] + \gamma(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{\beta}.$$

(c) Dado T, pruebe que es posible escoger ϵ y β de modo que $R^T << T$ para T grande (i.e., $\lim_{T\to\infty} R^T/T = 0$).

Entrega: 6 de Octubre