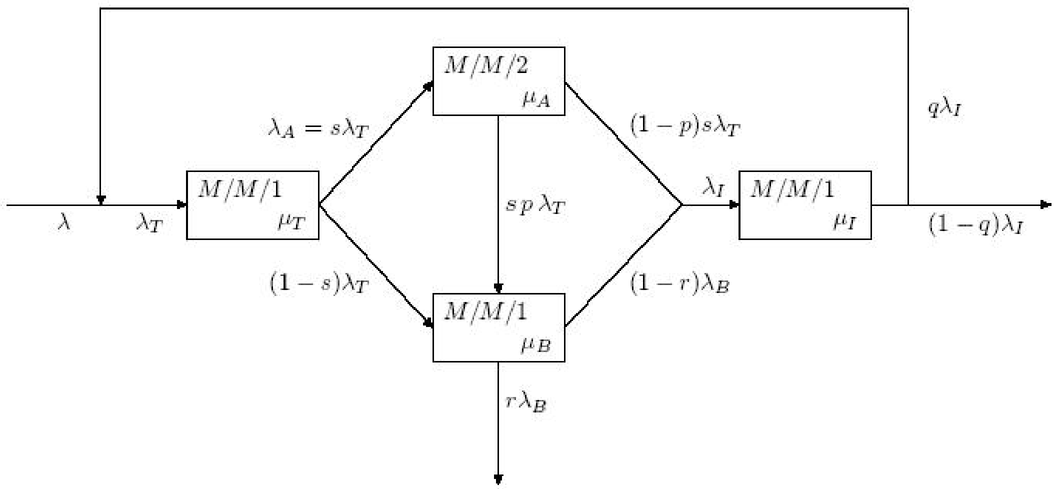
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Solución Examen 8 de Julio de 2005

Problema 1

1. La red de colas correspondiente se muestra en la figura.



Llamamos λ_T a la tasa efectiva de entrada al subsistema correspondiente al técnico que clasifica perliminarmente las piezas. De manera análoga, llamamos λ_A, λ_B y λ_I a las tasas efectivas de entrada a los otros subsistemas.

Con esta notación, las tasas efectivas deben satisfacer las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_T &= \lambda + q\lambda_I \\ \lambda_A &= s\lambda_T \\ \lambda_B &= [(1-s)+sp]\,\lambda_T \\ \lambda_I &= (1-p)\lambda_A + (1-r)\lambda_B \quad = \quad [(1-p)s + (1-r)\,(1-s+sp)]\,\lambda_T\,. \end{aligned}$$

De la última ecuación se puede deducir que $\lambda_I = (1-r+rs-rsp)\lambda_T$ y reemplazando en la primera ecuación obtenemos que

$$\lambda_T = \frac{\lambda}{1-q(1-r+rs-rsp)}\,.$$

Con este valor podemos obtener las otras tasas efectivas reemplazando en las ecuaciones de arriba.

Las condiciones que se deben cumplir para que el sistema alcance el régimen estacionario son:

$$\lambda_T < \mu_T\,, \quad \lambda_A < 2\mu_A\,, \quad \lambda_B < \mu_B \quad \text{y} \quad \lambda_I < \mu_I\,.$$

2. Esto corresponde a calcular los “L” de cada subsistema (usando las tasas efectivas de entrada calculadas en el punto anterior).

En el caso de las M/M/1, el número esperado de entidades en el sistema está dado por $L = \frac{\rho}{1-\rho}$ con $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ si λ es la tasa de entrada y μ es la tasa de atención. Para el caso de una M/M/2, el número esperado de entidades en el sistema está dado por $L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$ con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{\rho_T}{1-\rho_T} \\ L_A &= \frac{2\rho_A}{1-\rho_A^2} \\ L_B &= \frac{\rho_B}{1-\rho_B} \\ L_I &= \frac{\rho_I}{1-\rho_I} \end{aligned}$$

3. Para esta parte presentamos dos soluciones.

Solución 1 Aplicamos la fórmula de Little al sistema completo. Usando los valores para L_T, L_A, L_B y L_I del punto anterior tenemos que

$$W = \frac{L_T + L_A + L_B + L_I}{\lambda} \, .$$

Solución 2 Para seguir las distintas "rutas" que podría seguir una pieza en el sistema, plantearemos un sistema de ecuaciones usando relaciones entre los tiempos que pasará en el sistema una pieza, una vez que sabemos en qué lugar está.

Denotamos por T_T el tiempo que falta, en promedio, para salir del sistema una vez que una pieza entra al subsistema del técnico y definimos T_A, T_B y T_I de manera análoga.

Lo que queremos calcular es $W = T_T$.

Analizando la red y tomando esperanzas, se tiene que los T_i ($i \in \{T, A, B, I\}$) deben satisfacer:

$$\begin{aligned} T_T &= W_T + sT_A + (1-s)T_B \\ T_A &= W_A + pT_B + (1-p)T_I \\ T_B &= W_B + (1-r)T_I \\ T_I &= W_I + qT_T \end{aligned}$$

donde los W_i ($i \in \{T, A, B, I\}$) se pueden calcular, aplicando la fórmula de Little, a partir de los L_i calculados en el punto anterior y las tasas efectivas de entrada[1].

4. Una idea para analizar la decisión que se pretende tomar es calcular el tiempo que pasa desocupado, en promedio, cada uno de los empleados en las diferentes situaciones que se presentarían (dependiendo de qué nuevo empleado se contrate) y elegir aquella opción que minimice algún criterio relativo a la disparidad de "tiempo desocupado promedio" (por ejemplo, la diferencia entre el tiempo desocupado máximo y tiempo desocupado mínimo).

   Para poder calcular esto se debe recordar que el tiempo que pasa desocupado, en promedio, un servidor en un sistema M/M/1 es π_0; en un sistema M/M/2 es $\pi_0 + 1/2\ \pi_1$; y en un sistema M/M/3 es $\pi_0 + 1/2\ \pi_1 + 1/3\ \pi_2$, donde los π son las probabilidades estacionarias del subsistema correspondiente cuando visto como proceso de nacimiento y muerte.

5. No afecta. El sistema cumple con las condiciones de régimen estacionario y si se agrega un nuevo servidor a cualquiera de los subsistemas, las seguirá cumpliendo (los ρ sólo se pueden reducir al agregar un nuevo servidor).

   Como suponemos que el sistema está en régimen estacionario, la tasa de salida (el número de piezas procesadas por hora) es igual a la tasa de entrada. Como la tasa de entrada no cambia, la tasa de salida tampoco lo hará.

[1] Para calcular $W = T_T$ faltaría resolver el sistema planteado.

Problema 2

1. Definiendo los estados como la habitación en que se encuentra *Indiana Jungs*, la cadena queda de la siguiente forma:

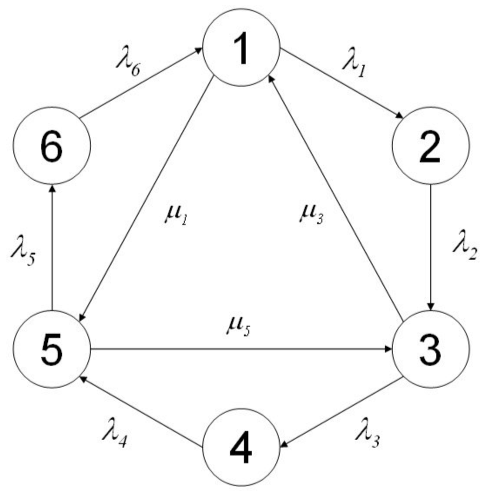


Figura 1: Cadena en Tiempo Continuo: Ubicación de *Indiana Jungs*.

La cadena es finita e irreductible, por lo que admite probabilidades estacionarias, y el sistema que se muestra a conticuación permite obtenerlas:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 \cdot (\lambda_1 + \mu_1) &= \lambda_6 \cdot \pi_6 + \mu_3 \pi_3 \\
\pi_2 \cdot \lambda_2 &= \pi_1 \cdot \lambda_1 \\
\pi_3 \cdot (\lambda_3 + \mu_3) &= \lambda_2 \cdot \pi_2 + \mu_5 \pi_5 \\
\pi_4 \cdot \lambda_4 &= \pi_3 \cdot \lambda_3 \\
\pi_5 \cdot (\lambda_5 + \mu_5) &= \lambda_4 \cdot \pi_4 + \mu_1 \pi_1 \\
\pi_6 \cdot \lambda_6 &= \pi_5 \cdot \lambda_5 \\
\sum_{i=1}^{6} \pi_1 &= 1
\end{aligned}
$$

2. Para encontrar el amuleto, *Indiana* debe estar lúcido y en la misma habitación en que el amuleto aparece. Como esto sucederá en 80 años más, la probabilidad de que *Indiana Jungs* está en la *i-ésima* cámara al momento de la aparición del emuleto es π_i, de estra forma se puede escribir la probabilidad pedida como:

$$PA_1 = q \cdot \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot \pi_i$$

3. Al desplazarse ahora cada exactamente tres horas, la ubicación del explorador en el templo debe modelarse como una cadena de Markov en tiempo discreto, en que las probabilidades de trancisión corresponden a las mismas probabilidades de transición, condicionadas en que la transición ya ha ocurrido, de la cadena de la parte 1.

   Así, estando en el estado 1, la probabilidad de que *Indiana* se dirija a la habitación 2 es:

$$P(t_{12} < t_{15}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}$$

   Donde t_{12} y t_{15} son variables aleatorias que se distribuyen exponencialmente de tasa λ_1 y μ_1 respectivamente. Es decir, *que vaya a* 2 *antes de ir a* 5.

   De esta forma, se construye de la siguiente cadena:

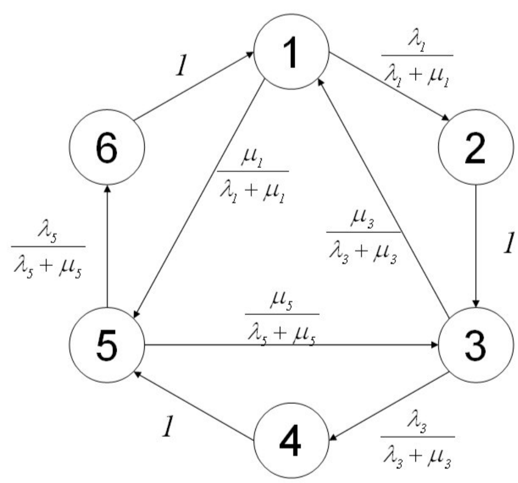


Figura 2: Cadena en Tiempo Discreto: Ubicación de *Indiana Jungs*.

   Esta cadena tiene una única clase recurrente, compuesta por sus 6 estados. La cadena no es ergódica ya que tiene período 3, por lo que **no** admite probabilidades estacionarias.

4. Existen dos formas de calcular el tiempo que demora *Indiana Jungs* en abandonar el templo desde que encuentra el amuleto: planteando un sistema de ecuaciones y utilizando Markov con beneficios.

   Definiendo T_i como es tiempo esperado [2] en abandonar el templo si *Indiana* acaba de llegar a la *i-ésima* cámara, se tiene:

[2] Medido en horas.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_1 &= 3 + (1 \text{ - } \mathrm{s}_1)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}T_2 + \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}T_5\right)\\
\mathrm{T}_2 &= 3 + (1 \text{ - } \mathrm{s}_2)\cdot T_3\\
\mathrm{T}_3 &= 3 + (1 \text{ - } \mathrm{s}_3)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\mu_3}T_4 + \frac{\mu_3}{\lambda_3+\mu_3}T_1\right)\\
\mathrm{T}_4 &= 3 + (1 \text{ - } \mathrm{s}_4)\cdot T_5\\
\mathrm{T}_5 &= 3 + (1 \text{ - } \mathrm{s}_5)\left(\frac{\lambda_5}{\lambda_5+\mu_5}T_6 + \frac{\mu_5}{\lambda_5+\mu_1}T_3\right)\\
\mathrm{T}_6 &= 3 + (1 \text{ - } \mathrm{s}_5)\cdot T_1
\end{aligned}
$$

Que es el mismo sistema que se obtiene utilizando Markov con beneficios sobre la cadena de la figura 3 para calcular el tiempo en el transiente. En que P_{ij} corresponden a las probabilidades de transición de la cadena de la parte 3.

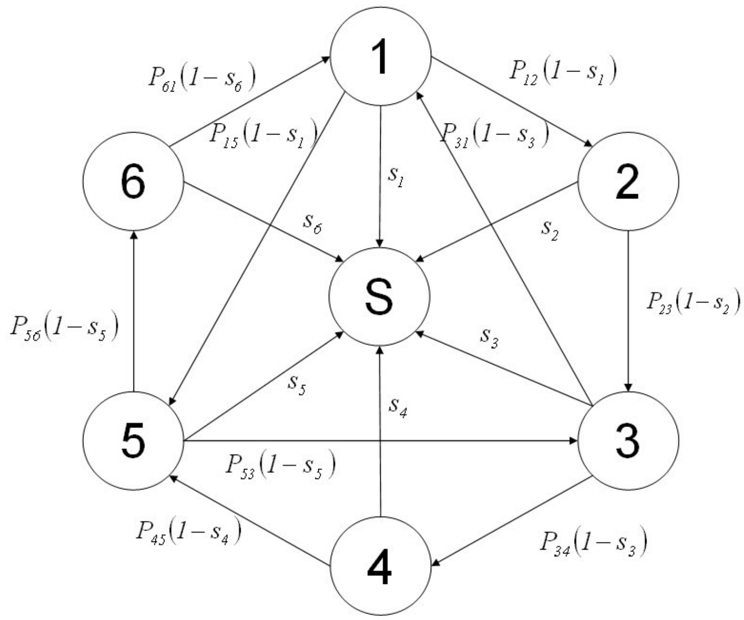


Figura 3: Cadena en Tiempo Discreto: Ubicación de *Indiana Jungs*.

Definiendo la siguiente estructura de beneficios:

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_1 &= 3 & \hat{r}_2 &= 3\\
\hat{r}_3 &= 3 & \hat{r}_4 &= 3\\
\hat{r}_5 &= 3 & \hat{r}_6 &= 3\\
\hat{r}_S &= 0
\end{aligned}
$$

El sistema planteado anteriormente es equivalente a:

$$\vec{W} = \hat{r} + P_{TT}\cdot\vec{W}$$

En que P_{TT} corresponde a la matriz que contiene las probabilidades de transición entre estados transientes de la cadena de la parte 4 y $W_i = T_i$.

Problema 3

1. (1,0 ptos.) Si el precio en el instante t es P se debe a que ha llegado una persona con una valoración de \$$P$ por el artículo, y otra con una valoracíon superior o igual a \$$P$. Para que el precio no cambie no debe llegar nadie más con una valoración superior a P. Dado que el tiempo restante es $T-t$ [horas], debemos imponer que no llegue ninguno de esos personajes en ese lapso de tiempo. Demás esta decir que el proceso de llegada es un poisson filtrado.

$$P[\text{Se venda a P}] = e^{-\lambda(T-t)(1-P)}$$

2. (1,0 pto.) Para que se venda a quien hizo la oferta no debe llegar nadie con una valoración por el articulo superior a la suya. Su valoración se distribuye como una Uniforme entre P y 1. Entonces:

$$P[\text{Se venda al ofertante actual}] = \frac{1}{1-P}\int_P^1 e^{-\lambda(T-t)(1-x)}dx = \frac{1-e^{-\lambda(T-t)(1-P)}}{(1-P)\cdot\lambda(T-t)}$$

3. (1,5 ptos.) Primero notamos que el precio de venta es el segundo mayor valor dentro de las valoraciones de las personas que llegaron a la subasta. Partamos suponiendo que llegaron n personas a la subasta. La distribución del segundo mayor valor entre n variables aleatorias de distribución F es:

$$x \rightsquigarrow n(n-1)\overline{F}(x)\cdot f(x)\cdot F(x)^{n-2}$$

que en el caso de variables $U[0,1]$ es $n(n-1)x^{n-2}(1-x)$.

La esperanza del pago, condicional a que llegaron n ($n>0$) personas es entonces:

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_0^1 x\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}(1-x)dx \\ &= \int_0^1 n\cdot(n-1)\cdot(x^{n-1}-x^n)dx \\ &= \int_0^1 n\cdot(n-1)\cdot x^{n-1} - \int_0^1 n\cdot(n-1)\cdot x^n dx \\ &= (n-1) - \frac{n\cdot(n1)}{n+1} \\ &= \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

Para obtener la respuesta deseada simplemente debemos descondicionar del número de llegadas:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \\ &= (1-e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= (1-e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T}\left[1-e^{-\lambda T}-e^{-\lambda T}\cdot\lambda T\right] \\ &= (1+e^{-\lambda T}) - \frac{2}{\lambda T}\left[1-e^{-\lambda T}\right] \end{aligned}$$

4. (1,5 ptos.) Los desarrollos son los mismos de la parte anterior, solo que ahora consideramos la distribución del máximo de las nn variables uniformes. La distribución del máximo valor entre n variables aleatorias de distribución F es:

$$x \rightsquigarrow nF(x)^{n-1} \cdot f(x)$$

que en el caso de variables $U[0,1]$ es nx^{n-1}.

La esperanza del pago, condicional a que llegaron n ($n > 0$) personas es entonces:

$$\begin{aligned} Q_n &= \int_0^1 x \cdot n \cdot x^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Para obtener la respuesta deseada simplemente debemos descondicionar del número de llegadas:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \\ &= 1 - \left[\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}\right] \end{aligned}$$

Ahora simplemente hacemos la diferencia:

$$\text{Disposición a pagar } = \left[\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T}\right] - e^{-\lambda T}$$

5. (2,0 ptos.)Se puede responder de muchas formas. Creo que esta es la más corta. El modelo es el siguiente:

- Etapas: Cada vez que llega alguien a preguntar.
- Estado: El tiempo que falta hasta el final del horizonte y el precio ofrecido por el cliente que pregunta.
- Decisión: Vender o no el artículo.
- Recursión:

$$V_i(t, P) = \max\{P, \int_0^{\infty} \int_0^1 V_{i+1}(t - \tau, x) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \tau} dx d\tau\}$$

- Condiciones de borde:

$$V_i(t, P) = 0 \qquad \forall\, t < 0$$