Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Solución Examen,
2 de Diciembre de 2005

Pregunta 1

1. Denotemos por V_i al beneficio esperado por unidad de tiempo en el largo plazo que Armijo obtendría si decide trabajar en la tienda i y por π_j^i a la probabilidad estacionaria asociada al estado j para un sistema $M/M/i$. Luego:

$$V_1 = S_1(1-\pi_0^1) + F_1\pi_0^1$$
$$V_2 = S_2(1-\pi_0^2-\frac{1}{2}\pi_1^2) + F_2(\pi_0^2+\frac{1}{2}\pi_1^2)$$
$$V_3 = S_3(1-\pi_0^3-\frac{2}{3}\pi_1^3-\frac{1}{3}\pi_2^3) + F_3(\pi_0^3+\frac{2}{3}\pi_1^3+\frac{1}{3}\pi_2^3)$$

La condición es que $V_1 > Max\{V_2, V_3\}$ (claramente que se puede escribir 2 condiciones por separado).

2.
   - Falso. Esto sólo sirve para una red cuyos subistemas están conectados en serie, tal que todas las entidades pasan exactamente una vez por cada subsistema (también se puede argumentar con contraejemplo con una red con reflujos, etc.).
   - Verdadero. En primer lugar, el número total de personas en el sistema es la suma del número de personas que hay en cada subsistema. Además, sabemos que la esperanza es un operador lineal. Luego, se concluye que el número promedio de entidades en el sistema es la suma del número promedio de personas en cada subsistema.
   - Verdadero. Esto es directo de la fórmula de Little.

3. Sean $\lambda_v = \lambda p_v$ y $\lambda_n = \lambda(1-p_v)$. Luego:
   - $P(Lleno) = (\sum_{i=C_v}^{\infty} \frac{(\lambda_v T)^i e^{-\lambda_v T}}{i!})(\sum_{i=C_n}^{\infty} \frac{(\lambda_n T)^i e^{-\lambda_n T}}{i!})$
   - Si $k \in \{0, ..., C_v - 1\}$, $\quad P(N_{VIP}(t) = k) = \frac{(\lambda_v t)^k e^{-\lambda_v t}}{k!}$

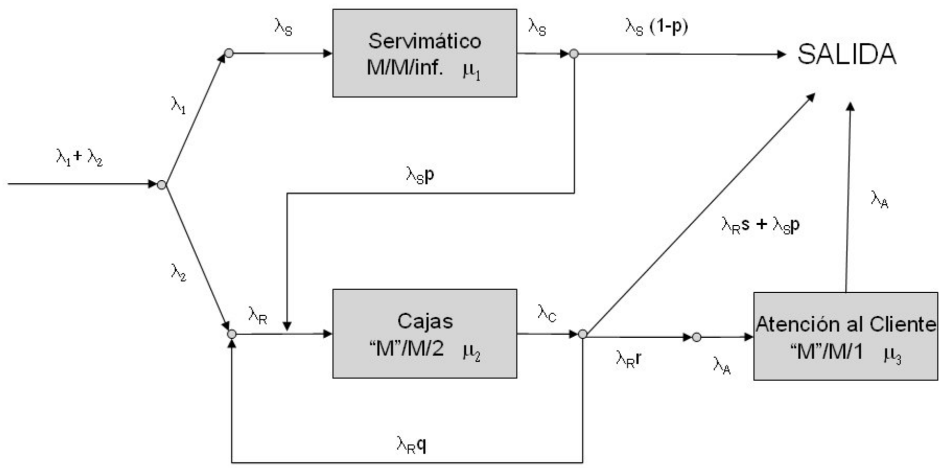
     Si $k = C_v$, $\quad P(N_{VIP}(t) = k) = \sum_{i=C_v}^{\infty} \frac{(\lambda_v t)^i e^{-\lambda_v t}}{i!}$

     Si $k > C_v$, $\quad P(N_{VIP}(t) = k) = 0$
   - $\min_{C_v}\{\sum_{i=0}^{C_v} \frac{(\lambda_v t)^i e^{-\lambda_v t}}{i!} > 0{,}8\}$

4. $Max\{0, V_N - \frac{K}{2}\}$

Pregunta 2

1. El sistema se muestra en la siguiente figura.



Donde la tasa λ_R representa a los clientes que entran a las Cajas y pueden entrar al reflujo y es igual a:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_2}{1-q}$$

De esta forma se tiene que las tasas efectivas, los tiempos medios de permanencia y las condiciones de régimen estacionario son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor	W	CRE
Servimático (M/M/∞)	λ_S	λ_1	$\frac{1}{\mu_1}$	Siempre $\exists$
Cajas ("M/M/2)	λ_C	$\lambda_1 p + \frac{\lambda_2}{1-q}$	$\frac{1}{\lambda_C}\frac{2\cdot\rho_C}{1-\rho_C^2}$	$\lambda_C < 2\mu_2$
Atención al Cliente ("M/M/1)	λ_A	$\frac{\lambda_2 s}{1-q}$	$\frac{1}{\lambda_A}\frac{\rho_A}{1-\rho_A}$	$\lambda_A < \mu_3$

donde: $\rho_C = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$ y $\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_3}$
Es importante notar que los sistemas de Cajas y Atención al Cliente no tienen llegadas poissonianas dado el reflujo en las Cajas, pero dado el Teorema de Jackson, para términos de cálculos en régimen estacionario se pueden tratar como si los tuvieran.

2. Para esta primera parte debemos obtener el tiempo de espera de las 3 configuraciones:

   - Política Actual: De la parte 1 sabemos que:

$$W_{act} = \frac{2\rho_C}{1-\rho_C^2}\cdot\frac{1}{\lambda_C}$$

   - Política Alternativa: Corresponde a una M/M/1 con $\rho_C = \frac{\lambda_C}{2\mu_2}$. Luego:

$$L_{alt} = \frac{\rho_C}{1-\rho_C} \qquad W_{alt} = \frac{\rho_C}{1-\rho_C}\cdot\frac{1}{\lambda_C}$$

   De lo anterior se tiene que:

$$W_{act} = \frac{2}{1+\rho_C}W_{alt} \qquad (*)$$

   De lo que se concluye que:

$$W_{act} > W_{alt}$$

   Luego la política más eficiente es la Política a. (0.5 ptos. demostración)

Dado que en la situación actual se satisface régimen estacionario y las condiciones para las dos alternativas son las mismas, para ambas opciones se mantiene la existencia del régimen. (0.5 ptos.)

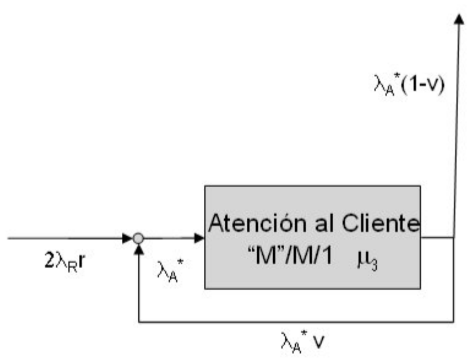
Al analizar la expresión (*) se tiene que cuando $\rho_C \rightsquigarrow 1$ se tiene que

$$W_{act} \approx W_{alt}$$

, luego cuando el sistema está muy congestionado ambas configuraciones tienden a ser equivalentes desde el punto de vista del indicador bajo añalisis. (0.5 ptos.)

3. A pesar de que disminuya el tiempo de espera en el sistema de Cajas, esto no afecta las tasas efectivas de este sistema y por ende tampoco las tasas efectivas del sistema de Atención al Cliente. Además dado que en la situación inicial se cumplía la condición de régimen estacionario y la condición para la alternativa propuesta es la misma, bajo el nuevo esquema también se tiene régimen. Luego, la inquietud del Gerente es absolutamente infundada, el sistema no colapsará y las propuestas de mejora son innecesarias.

4. Aislando el sistema de Atención al Cliente, la nueva situación es la siguiente:



Donde $\lambda_A^* = \frac{2\lambda_R r}{1-v}$ (0.5 pts.)

Luego si se se tienen C funcionarios en este sistema para que el sistema no colpase se debe tener que: $\lambda_A^* < C\mu_3$. Luego se deben encontrar el mínimo valor de C que satisfaga esta condición (0.5 pts.).

Además para que por lo menos el 50 % del tiempo no existan servidores ociosos, en función de las probabilidades estacionarias de un sistema M/M/C se debe cumplir que: $\sum_{i=C}^{\infty} > 50\,\%$ o equivalentemente $\sum_{i=0}^{C-1} < 50\,\%$, (0.5 pts.)

Preguntа 3

1. *a*) Una cadena que modela la situación está definida con conjunto de estados $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ que representan el número de pasajeros que quedan en el terminal cuando parte un bus. Las probabilidades de transición son:

$$p_{jk} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{C} \alpha_i & \text{si } j, k = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{G-j} \alpha_i & \text{si } j \neq 0,\ k = 0, \\ \alpha_{k+C} & \text{si } j = 0,\ k \neq 0, \\ \alpha_{k+G-j} & \text{si } j, k \neq 0. \end{cases}$$

b) Cada transición corresponde a la partida de un bus. Por la política de la empresa, sabemos que siempre que el estado no es 0 parten buses grandes. Por lo tanto, la fracción que se pide es: $\sum_{i \neq 0} \pi_i = 1 - \pi_0$.

c) Para calcular la fracción de los buses grandes que parten llenos, calculamos la fracción:

$$\frac{\text{fracción del total de buses que parte que son grandes y parten llenos}}{\text{fracción del total de buses que parte que son grandes}}.$$

El denominador fue calculado en el punto anterior. El numerador se calcula considerando que para cada estado posible k para el que parte un bus grande (es decir $k \geq 1$), el número de pasajeros que deben llegar al terminal para que el próximo bus salga lleno debe ser igual o mayor a los que faltan para llenar el bus (es decir, $\text{máx}(0, G-k)$)[1]. Este numerador queda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=\text{máx}(0,G-k)}^{\infty} \alpha_i \pi_k = \sum_{k=0}^{G-1} \sum_{i=G-k}^{\infty} \alpha_i \pi_k + \sum_{k=G}^{\infty} \pi_k \,.$$

Por lo tanto, la fracción de buses grandes que parten llenos es

$$\frac{\sum_{k=0}^{G-1} \sum_{i=G-k}^{\infty} \alpha_i \pi_k + \sum_{k=G}^{\infty} \pi_k}{1-\pi_0}$$

2. *a*) Siguiendo las indicaciones, el conjunto de estados de la cadena es

$$\{(i, \text{chico}) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(i, \text{grande}) : i \in \mathbb{N}\} =$$
$$\{(0, \text{chico}), (1, \text{chico}), (2, \text{chico}), \ldots, (1, \text{grande}), (2, \text{grande}), \ldots\}\,.$$

Las tasas de transición son las siguientes:

- Para el estado (i, chico), si $i \leq C$:

$$q_{(i,\text{chico})(0,\text{chico})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i,\text{chico})(i+1,\text{chico})} = \lambda\,.$$

- Para el estado (i, chico), si $i > C$:

$$q_{(i,\text{chico})(i-C,\text{grande})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i,\text{chico})(i+1,\text{chico})} = \lambda\,.$$

- Para el estado (i, grande), si $i \leq G$:

$$q_{(i,\text{grande})(0,\text{chico})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i,\text{grande})(i+1,\text{grande})} = \lambda\,.$$

- Para el estado (i, chico), si $i > G$:

$$q_{(i,\text{grande})(i-G,\text{grande})} = \mu \quad \text{y} \quad q_{(i,\text{grande})(i+1,\text{grande})} = \lambda\,.$$

b) Según se indicó, el segundo valor que define el estado dice que tipo de bus es el próximo a partir. Por lo tanto, la probabilidad que se pide es: $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{(i,\text{grande})}$.[2]

---

[1] Esto es lo mismo que decir que para los estados $k \geq G$ el bus siempre parte lleno y para los estados $0 \leq k < G$, parte lleno si llegan, al menos, $G-k$ pasajeros.

[2] La probabilidad que el bus siguiente al próximo sea uno grande está dada por

$$\sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_{(i,\text{chico})} + \sum_{i=G+1}^{\infty} \pi_{(i,\text{grande})} + \sum_{i=0}^{C} \pi_{(i,\text{chico})} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{C-i+1} + \sum_{i=0}^{G} \pi_{(i,\text{grande})} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{G-i+1}.$$

Algunas personas entendieron erróneamente el enunciado y calcularon este valor. Se les consideró un puntaje de 0,4 del total de 0,5.