Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Examen, 2 de Diciembre de 2005

Pregunta 1

1. (1.5 pts.) Armijo evalúa entrar a trabajar como cajero a una de tres posibles tiendas. La tienda i puede ser modelada como un sistema $M/M/i$, con $i \in \{1,2,3\}$. El sueldo que ofrece la tienda i es de $\$S_i$ por cada unidad de tiempo que Armijo se encontrará ocupado atendiendo público y él valora el tiempo libre en $\$F_i$ por cada unidad de tiempo que se encuentre en la caja pero sin atender clientes, con $i \in \{1,2,3\}$. El proceso de llegada es idéntico para las tres tiendas y es un Poisson de tasa λ[clientes/u.t.]. Además el tiempo de atención de Armijo es exponencial de media $1/\mu$[u.t], el cuál será igual para las 3 tiendas y también se distribuye igual a la de sus potenciales compañeros de trabajo, en las tiendas 2 y 3. Para decidir en qué tienda trabajar, Armijo ha decidido modelar el número de personas en cada sistema como 3 cadenas de Markov en tiempo continuo independientes. Asuma que se cumplen las condiciones de estacionariedad y que se conocen las probabilidades estacionarias de estas cadenas. Armijo escogerá trabajar en la tienda con mayor beneficio esperado por unidad de tiempo en el largo plazo. Escriba la(s) condición(es) que se deben satisfacer para que Armijo decida trabajar en la tienda 1.

2. (1.5 pts.) Considere un centro de atención que funciona como una red de colas que consta de n subsistemas. El proceso global de llegadas al sistema es un proceso de Poisson de tasa λ[clientes/hora]. Asumiendo que existe régimen estacionario en esta red, comente la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando claramente sus respuestas:
   - El tiempo de permanencia promedio de un cliente en el sistema completo en el largo plazo siempre puede ser calculado como $W_T = \sum_{i=1}^{n} W_i$, en que W_i es el tiempo promedio que de permanencia en el subsitema i.
   - La cantidad promedio de clientes en el sistema completo en el largo plazo siempre puede ser calculado como $L_T = \sum_{i=1}^{n} L_i$, en que L_i es la cantidad promedio de clientes en el subsitema i.
   - El tiempo de permanencia promedio de un cliente en el sistema completo en el largo plazo siempre puede ser calculado como $W_T = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} L_i$, en que L_i es la cantidad promedio de clientes en el subsitema i.

3. (1.5 pts.) Clientes llegan a un restaurante según un proceso de Poisson de tasa λ[clientes/hora]. La probabilidad de que un cliente que llega sea *VIP* es p_v, mientras que con probabilidad $p_n = 1 - p_v$ un cliente se considera *normal*. El local cuenta con un comedor *VIP* con capacidad para C_v clientes y uno *normal* con capacidad para C_n clientes. Un cliente *VIP* es ubicado en una mesa del comedor *VIP* del local si es que hay capacidad disponible, de lo contrario no podrá entrar al local. Un cliente *normal* es ubicado en una mesa del comedor *normal* si es que hay capacidad disponible, de lo contrario no podrá entrar al local. El local abre durante una jornada T horas al día, a partir desde $t = 0$ en que comienza el proceso de llegadas. Un cliente que logra entrar al local, se quedará en éste hasta su cierre. Responda:
   - ¿Cuál es la probabilidad de que en una jornada el restaurante se llene?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante $t < T$ haya k clientes *VIP* dentro del restaurante?
   - Entregue una expresión para calcular la mínima capacidad C_v, tal que la probabilidad de que todos los clientes VIP que llegan al local puedan entrar, sea mayor a 80 %.

4. (1.5 pts.) Armijo está analizando, mediante un árbol de decisión a qué caballos apostar en una carrera. Utilizando sólo sus conocimientos sobre hípica, el valor esperado de su apuesta es V_A; el valor esperado de la apuesta si le pide un consejo a su novia es de V_N. Adicionalmente, un amigo le ha ofrecido cambiar el dinero destinado a las apuestas por un maletín con acciones cuyo valor se distribuye uniforme $(0, K)$. Armijo sabe que pedirle información a su novia implica tener que comprarle un regalo y si Armijo no tuviera la posibilidad de consultarle a su novia elegiría el intercambio por el maletín con acciones. ¿Cuál es el máximo precio que Armijo estaría dispuesto a pagar por un regalo a su novia para pedirle información sobre la carrera?

Pregunta 2

A una oficina que presta el servicio de recaudación del pago de cuentas, llegan dos tipos de clientes según procesos de Poisson de tasas λ_1 y λ_2 [clientes/hora], respectivamente. Los clientes tipo 1 entran al local dirigiéndose a la zona de ServiMático donde revisan el estado de sus cuentas, la cual se puede modelar con capacidad ilimitada de servidores cada uno de ellos con tiempo de atención exponencial de media $1/\mu_1$[horas]. Por otro lado, los tipo 2, llegan a la oficina conociendo el estado de sus cuentas por lo que se dirigen a la sección de Cajas, la cual es atendida por 2 cajeros en paralelo, cada uno de ellos con tiempo de atención distribuído exponencialmente de media $1/\mu_2$[horas]. Suponga que en este lugar hay capacidad ilimitada para clientes esperando, los cuales forman una cola única hasta ser atendidos.

Los clientes que revisaron el estado de sus cuentas en la zona de ServiMático, luego de retirar la cartola de pagos, con probabilidad **p** presentan saldos pendientes y se dirigen a la zona de Cajas y con probabilidad **(1-p)** se retiran del recinto por no tener cuentas impagas. Luego de ser atendidos por alguno de los cajeros **estos clientes** se retiran del local.

Por otro lado, para los clientes que ingresaron al sistema directamente a la zona de Cajas, luego de realizada su atención con alguno de los cajeros existen tres posibilidades. Con probabilidad **q** vuelven a ponerse en la fila de las Cajas debido a que olvidaron realizar algún pago. Con probabilidad **r** se dirigen al mesón de Atención al Cliente, el cual es atendido por un único funcionario con tiempo de atención exponencial de media $1/\mu_3$[horas] y cuenta con capacidad ilimitada para clientes esperando. Por último con probabilidad **s** se retiran del sistema **(q+r+s=1)**.

Los clientes que ingresan a la zona de Atención al Cliente, luego de su atención abandonan la oficina.

1. (1.5 pts.) Modele la situación descrita como un sistema de colas. Para cada subsistema indique, el tipo de sistema y si el proceso de entrada es poissoniano, la tasa efectiva de entrada, el tiempo promedio de permanencia y la condición de régimen estacionario. Resuma sus resultados en una tabla.

2. Suponga que bajo la situación actual se satisfacen las condiciones de régimen estacionario y el Gerente de Operaciones del local quiere centrar su atención en lo ocurrido en las Cajas. Para ello, ha determinado que en lugar de la configuración actual para obtener un menor tiempo medio de permanencia en la zona de Cajas, es más conveniente operar con una cola única con un servidor con tiempo de atención exponencial de media $\frac{1}{2\mu_2}$ [horas].

   a) (1.5 pts.) Cuantitativamente, muestre que el Gerente tiene razón en la alternativa a tomar. Indique la condición de régimen estacionario para la nueva configuración e indique si será satisfecha dada la situación actual del sistema. ¿Bajo qué condiciones de congestión del sistema ambas configuraciones tienden a ser equivalentes en términos del indicador bajo análisis?. Justifique.

   b) (1.5 pts.) El Gerente de la sucursal decide implantar la nueva configuración en el sector de Cajas, pero le plantea la siguiente inquietud. "*Creo que al tener menor tiempo en el sistema de Cajas, la zona de Atención al Cliente puede colapsar, para esto propongo realizar una campaña de información a mis clientes con la que pretendo disminuir la probabilidad **r** con la que los clientes de las Cajas se dirigen a este zona, o bien aumentar la cantidad de servidores en la sección de Atención al Cliente*". ¿Es fundada la preocupación del Gerente?. Justifique su respuesta.

3. (1.5 pts.) Se pronostica que para el próximo año la tasa de llegada de clientes a la oficina se duplicará para ambos tipos de clientes. Debido a que una parte importante de esta demanda será de clientes nuevos, se estima que existirá una fracción **v** de personas que luego de salir de la sección de Atención al Cliente, volverán a ponerse en la fila del mismo sistema, debido a su inexperiencia en el uso de los servicios del local. Considerando como base la situación inicial modelada en la parte 1, entregue una expresión que le permita determinar con cuantos funcionarios debe contar como mínimo en la sección de Atención al Cliente, para que el sistema no colapse y por lo menos el 50 % del tiempo no existan servidores ociosos.

Pregunta 3

Desde un terminal de Santiago salen 2 tipos de buses. Buses Grandes que pueden transportar hasta G [pasajeros] y los buses Chicos que tienen capacidad para C [pasajeros], con $G > C$

Los buses llegan vacíos al terminal y son abordados por todos los pasajeros que estén esperando y puedan hacerlo dada la capacidad del bus. Es decir, si hay más pasajeros que la capacidad disponible, el vehículo se llena y los pasajeros restantes quedan en el terminal esperando el próximo bus respetando el orden de llegada. Suponga que el tiempo para abordar los buses es despreciable y que el terminal cuenta con capacidad ilimitada para personas esperando.

La empresa tiene la siguiente política para asignar buses a los servicios: si quedaron pasajeros esperando, el próximo servicio se realiza con un bus Grande; si todos los pasajeros consiguieron subir a un bus, el próximo servicio se realiza con un bus Chico.

1. Considere que los buses parten cada intervalos de tiempo discretos de T[horas] y que la probabilidad de que lleguen i pasajeros entre la partida de un bus cualquiera y la partida del siguiente es α_i.

   a) (2.0 pts.) Modele el número de pasajeros esperando en el terminal en el instante siguiente de la partida de un bus como una cadena de Markov en tiempo discreto.

   Suponga que la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y que éstas son conocidas. Responda las siguientes preguntas sobre el comportamiento del sistema en el largo plazo.

   b) (0.5 pto.) En promedio, ¿Qué fracción de los buses utilizados son Grandes?

   c) (1.0 pto.) En promedio, ¿Qué fracción de los buses Grandes parte lleno?,

2. Considere ahora que el tiempo entre la partida de un bus y la partida del siguiente puede ser representado por una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\mu$ [horas] y que los pasajeros llegan al terminal de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [pasajeros/hora]. Además la política de asignación de buses al servicio se mantiene tal como en la parte 1.

   a) (2.0 pts.) Modele el número de pasajeros esperando en el terminal en cualquier momento tiempo como una cadena de Markov de tiempo continuo. Para esto utilice estados definidos como pares (i, "tipo") donde i es el número de pasajeros en el terminal y "tipo" indica si el próximo bus que llegará al terminal será Grande o Chico.

   Considere los casos genéricos (i, Chico) para $i \leq C$ e $i > C$ e (i, Grande) para $i \leq G$ e $i > G$.

   b) (0.5 ptos.) Suponga que la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y que éstas son conocidas. En instante cualquiera del tiempo en el largo plazo, ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo bus que salga del terminal sea Grande?

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones

  $X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \forall\, x \geq 0$ $\quad E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

  $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $\quad E(X) = \lambda$ $\quad \text{Var}(X) = \lambda$

  $X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p)$: $\Pr[X = k] = (1-p) \cdot p^k$ $\quad E(X) = \frac{p}{1-p}$ $\quad \text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$

- Algunas sumas

  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ $\qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ si $|a| < 1$

  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$ si $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

- Sistemas elementales de espera en estado estacionario

  $M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \pi_0 = 1 - \rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

  $M/M/2$

$$L = \frac{2 \cdot \rho}{1-\rho^2} \qquad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$