

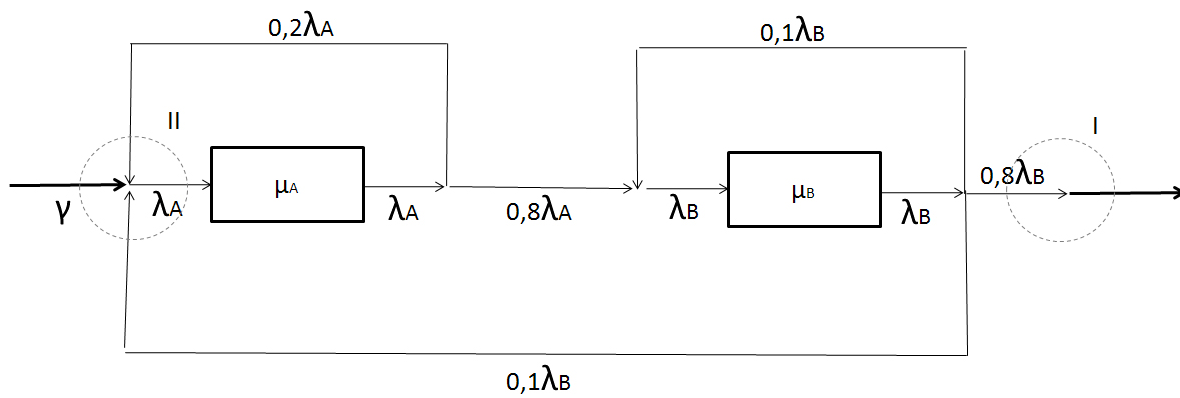


## Pauta Examen

Viernes 10 de Julio de 2009

### Problema 1

- a ) (1.5 puntos) Primero encontraremos las tasas efectivas de cada proceso, para ello consideraremos el siguiente esquema:



Realizando una conservación de flujo en I:

$$0,8\lambda_B = \gamma$$

Luego

$$\lambda_B = \frac{5}{4}\gamma$$

Ahora realizamos conservación de flujo en II:

$$\gamma + 0,2\lambda_A + 0,1\lambda_B = \lambda_A$$

Lo que implica que

$$\lambda_A = \frac{9}{8}\lambda_B = \frac{45}{32}\gamma$$

Para determinar la condición de estabilidad del problema imponemos condición de estacionariedad en ambas etapas ( $\rho < 1$ ).

$$\rho_A < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1 \Rightarrow \gamma < \frac{32}{45}\mu_A$$

$$\rho_B < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_B}{\mu_B} < 1 \Rightarrow \gamma < \frac{4}{5}\mu_B$$

La tasa máxima de alimentación del sistema será la condición más restrictiva de las dos anteriores, es decir:

$$\gamma_{max} = \min \left\{ \frac{32}{45}\mu_A, \frac{4}{5}\mu_B \right\} = \min \left\{ \frac{32}{45} \cdot 20, \frac{4}{5} \cdot 10 \right\} = 8 \text{ [unidades/hora]}$$

b ) (1.5 puntos) De la parte anterior sabemos que

$$\gamma_{max} = \min \left\{ \frac{32}{45}\mu_A, \frac{4}{5}\mu_B \right\}$$

Utilizando que  $\mu_A + \mu_B = 30$

$$\gamma_{max} = \min \left\{ \frac{32}{45}\mu_A, \frac{4}{5}(30 - \mu_A) \right\}$$

Es fácil ver que lo anterior es equivalente a:

$$\gamma_{max}(\mu_A) = \begin{cases} \frac{32}{45}\mu_A & \text{si } \mu_A \in (0, \frac{270}{17}) \\ \frac{120}{5} - \frac{4}{5}\mu_A & \text{si } \mu_A \in (\frac{270}{17}, 30) \end{cases}$$

El balance debe hacerse justamente en  $\mu_A = \frac{270}{17} = 15,9 \text{ [unid/hora]}$  obteniéndose  $\gamma_A = \frac{192}{17} = 11,3 \text{ [unid/hora]}$ .

c ) (1.5 puntos) Se presentarán dos formas distintas de resolver esta parte.

- **Forma 1:** Se sabe que ambos procesos son  $M|M|1$  por lo que si utilizamos la fórmula conocida  $W_{M|M|1} = \frac{1}{\mu - \lambda}$  y consideramos que la cantidad de veces promedio que una entidad se repite un proceso es la esperanza de una geométrica con parámetro igual a la probabilidad del reflujo correspondiente se tiene:

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{E}[\text{Geom}(1/9)] \cdot (\mathbb{E}[\text{Geom}(0, 2)] \cdot W_A + \mathbb{E}[\text{Geom}(0, 1)] \cdot W_B) \\ &= \frac{1}{1 - 1/9} \cdot \left( \frac{1}{1 - 0,2} \cdot \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} + \frac{1}{1 - 0,1} \cdot \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} \right) \\ &= 0,44 \text{ [horas/unidad]} \end{aligned} \tag{1}$$

Notar que el parámetro de la geométrica que involucra el reflujo que se devuelve de  $B$  a  $A$  es  $1/9$  pues el final del sistema puede verse como que con probabilidad  $0,1$  se devuelve a  $B$  y con probabilidad  $0,9$  pasa. Luego que ha pasado con probabilidad  $8/9$  se va del sistema y con probabilidad  $1/9$  se devuelve a  $A$ .

- **Forma 2:**

$$\begin{aligned} L &= L_A + L_B \\ &= \frac{\rho_A}{1 - \rho_A} + \frac{\rho_B}{1 - \rho_B} \\ &= 2,20 \end{aligned}$$

Por Little sabemos que:

$$W = L/\lambda_{efec} = L/\gamma = 2,20/5 = 0,44 \text{ [horas/unidad]}$$

- d) (1.5 puntos) Usamos una de las expresiones para  $W$  deducidas en la parte anterior y además que  $\mu_B = 30 - \mu_A$ .

$$W(\mu_A) = \frac{1}{1 - 1/9} \cdot \left( \frac{1}{1 - 0,2} \cdot \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} + \frac{1}{1 - 0,1} \cdot \frac{1}{30 - \mu_A - \lambda_B} \right)$$

Notar que si  $\mu_A \rightarrow 0$  ó  $\mu_A \rightarrow 30$  sucede que el sistema es inestable, por lo que el mínimo no debiera estar en los extremos de la función.

Derivando se obtiene:

$$\frac{\partial W(\mu_A)}{\partial \mu_A} = \frac{9}{8} \cdot \left( \frac{5}{4} \cdot \frac{-1}{(\mu_A - \frac{225}{32})^2} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{(\frac{95}{4} - \mu_A)^2} \right)$$

Notar que la expresión anterior crece cuando  $\mu_A$  crece, por lo tanto  $W(\mu_A)$  es una función convexa y debe tener mínimo en el intervalo  $(0, 30)$ . Igualando a cero la derivada y despejando se obtiene:

$$\mu_A^* = 15,63 \text{ [unid/hora]}$$

Este valor además verifica que  $\rho_A < 1$  y  $\rho_B < 1$ .

## Problema 2

- a) (3 puntos)

- Estados: niveles posibles de stock ( $X_t$ )

$$E = \{0, 1, \dots, C\}$$

- Decisiones: número de unidades ordenadas al principio del día ( $Y_t - X_t$ )

$$A_i = \{0, 1, \dots, C - i\} \quad \text{con } i \in E$$

- Probabilidades de transición:

$$p_{ij}(a) = \mathcal{P}[X_{t+1} = j \mid X_t = i, a]$$

- caso  $j > i + a$ :  $p_{ij}(a) = 0$
- caso  $j > 0$  y  $j > i + a$ :  $p_{ij}(a) = 0$
- caso  $0 \leq j \leq i + a$ :

$$\begin{aligned} p_{ij}(a) &= \mathcal{P}[Y_t - D_t = j \mid Y_t = i + a, a] \\ &= \mathcal{P}[D_t = i + a - j \mid Y_t = i + a, a] \\ &= q_{i+a-j, i+a} \end{aligned}$$

- caso  $j = 0$ :

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(a) &= \mathcal{P}[Y_t - D_t \leq 0 \mid Y_t = i + a, a] \\
 &= \mathcal{P}[N \geq D_t \geq i + a \mid Y_t = i + a, a] \\
 &= \sum_{k=0}^{N-i-a} q_{i+a+k, i+a}
 \end{aligned}$$

En resumen:

$$p_{ij}(a) = \begin{cases} q_{i+a-j, i+a} & \text{si } 0 < j \leq i + a \\ \sum_{k=0}^{N-i-a} q_{i+a+k, i+a} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

■ Función de Beneficios:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_i(a) &= \mathbb{E}[v \min\{D_t, Y_t\} \mid X_t = i \wedge a = Y_t - X_t] - \mathbb{E}[h(Y_t - D_t) \mid X_t = i \wedge a = Y_t - X_t] - ca \\
 &= v \left[ \sum_{d=0}^{i+a} dq_{d, i+a} + (i+a) \cdot \sum_{d=i+a+1}^N q_{d, i+a} \right] - h \sum_{d=0}^{i+a} (i+a-d)q_{d, i+a} - ca
 \end{aligned}$$

b ) (3 puntos)

Las matrices de transición para cada decisión son:

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \quad P(1) = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P(2) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde por ejemplo

$$\begin{aligned}
 p_{10}(0) &= \text{Probabilidad de pasar de un stock de 1 a uno de 0 dado que no ordena nada al principio del día} \\
 &= q_{11} + q_{21} \\
 &= 0,4 + 0,5 \\
 &= 0,9
 \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de los beneficios encontrada en la parte a) se calcula:

$$\hat{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,1 \\ 8,4 \end{pmatrix} \quad \hat{r}(1) = \begin{pmatrix} 3,1 \\ 6,4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{r}(2) = \begin{pmatrix} 4,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La política estacionaria con la que iniciaremos el algoritmo es la que siempre elige tener stock de 2, es decir:

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego planteamos el sistema:

$$W^s + g^s e = \hat{r}^s + P^s W^s$$

$$\text{con } P^s = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \hat{r}^s = \begin{pmatrix} 4,4 \\ 6,4 \\ 8,4 \end{pmatrix}$$

El sistema es entonces:

$$w_0 = 4,4 - g + 0,6w_0 + 0,4w_1$$

$$w_1 = 6,4 - g + 0,6w_0 + 0,4w_1$$

$$w_2 = 8,4 - g + 0,6w_0 + 0,4w_1$$

Se impone  $w_2 = 0$  y se llega a  $w = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $g = 5,2$ . Luego recalculamos la política:

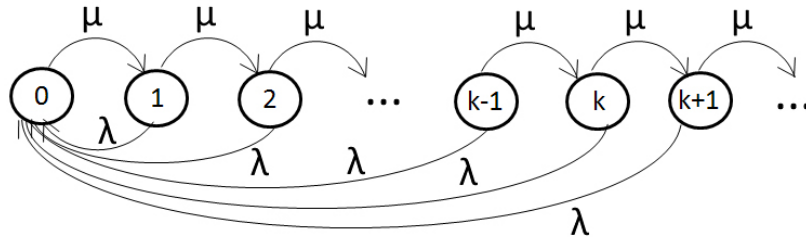
$$\bar{s}(i) = \arg \max_{a \in A_i} \left\{ \hat{r}_i(a) + \sum_j p_{ij}(a) W_j^s \right\}$$

Estado	Decisión	Valor
0	0	$0 + 1 \cdot (-4) = -4$
0	1	$3,1 + 0,9 \cdot (-4) + 0,1 \cdot (-2) = -0,7$
0	2	$4,4 + 0,6 \cdot (-4) + 0,4 \cdot (-2) = \boxed{1,2}$
1	0	$5,1 + 0,9 \cdot (-4) + 0,1 \cdot (-2) = 1,3$
1	1	$6,4 + 0,6 \cdot (-4) + 0,4 \cdot (-2) = \boxed{3,2}$

La nueva política es  $\bar{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Como  $s = \bar{s}$  se termina el algoritmo.

### Problema 3

Modelamos el problema con la siguiente cadena de Markov en tiempo continuo:



a ) (2 puntos) Utilizamos el principio de igualdas de tasas en todos los estados:

■ Estado 0:

$$\mu\pi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\pi_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = \lambda(1 - \pi_0)$$

Despejando se obtiene:

$$\pi_0 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

■ Estado 1:

$$\mu\pi_1 + \lambda\pi_1 = \mu\pi_0$$

Luego:

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

■ Estado k: En general

$$\mu\pi_k + \lambda\pi_k = \mu\pi_{k-1}$$

Por lo tanto

$$\pi_k = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \pi_{k-1} = \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^k \pi_0 = \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^k \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

c ) (2 puntos)

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^k \pi_0 \\ &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^k \\ &= \pi_0 \frac{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}{\left( 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^2} \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \end{aligned}$$

b ) (2 puntos) Usando Little:

$$W = \frac{L}{\mu} = \frac{1}{\lambda}$$

**Nota:** Se hizo la parte c) antes de la b) porque era la forma más fácil de abordar el problema. Existen varias maneras de realizar esta pregunta, incluso el  $W$  era deducible (si los buses llegan con tasa  $\lambda$  es claro que el tiempo promedio de espera es  $\frac{1}{\lambda}$ ).