

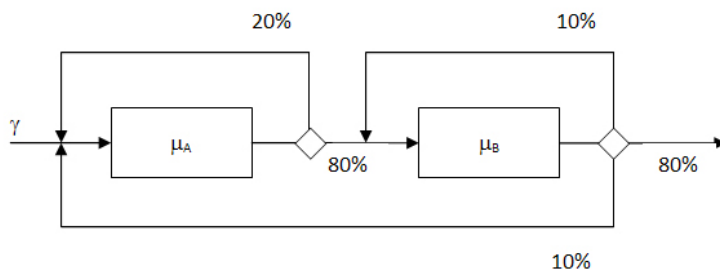


## Examen

Viernes 10 de Julio de 2009

### Problema 1

Un proceso productivo consta de dos etapas consecutivas,  $A$  y  $B$ . Procesar una unidad en la etapa  $A$  toma un tiempo exponencial de parámetro  $\mu_A = 20$  [unidades/hora], en tanto en la etapa  $B$  el proceso toma un tiempo exponencial de parámetro  $\mu_B = 10$  [unidades/hora]. Lamentablemente los procesos en las etapas  $A$  y  $B$  generan defectos: un 20 % de las unidades procesadas en  $A$  deben ser reprocesadas; un 10 % de las unidades procesadas en  $B$  deben ser reprocesadas sólo en la etapa  $B$ ; y un 10 % de las unidades procesadas en  $B$  deben ser completamente reprocesadas (i.e., reingresar a la etapa  $A$ ). El proceso productivo se alimenta de acuerdo a un proceso de poisson de parámetro  $\gamma$  [unidades/hora].



- (1.5 puntos) Determine la tasa máxima  $\gamma$  de alimentación del proceso de forma de que sea estable en el largo plazo.
- (1.5 puntos) Suponga ahora que usted puede redistribuir las capacidades de producción de ambas etapas de forma que la suma  $\mu_A + \mu_B = 30$  [unidades/hora]. ¿Cuál es la nueva tasa máxima  $\gamma$  de alimentación del proceso de forma de que sea estable en el largo plazo? ¿Cómo debe balancear las capacidades?
- (1.5 puntos) Suponga ahora que  $\gamma = 5$  [unidades/hora]. Calcule el tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema (con  $\mu_A = 20$  y  $\mu_B = 10$ ).
- (1.5 puntos) Suponga nuevamente que usted puede redistribuir las capacidades de producción de ambas etapas de forma que la suma  $\mu_A + \mu_B = 30$  [unidades/hora] y que  $\gamma = 5$  [unidades/hora]. ¿Cómo debe balancear las capacidades de forma que, en promedio, las unidades pasen el menor tiempo posible en el sistema?



## Problema 2

En la mañana del día  $t$ , el jefe de bodega de un minorista se encuentra con  $X_t$  unidades de un determinado producto. En ese momento debe decidir cuántas unidades pedir al centro de despacho para quedar con  $Y_t$  unidades en inventario al abrir el local (el despacho es inmediato). La bodega del local tiene capacidad  $C$ . Durante el día los consumidores demandan  $D_t$  unidades, que depende del nivel de inventario:  $P[D_t = i \mid Y_t = j] = q_{ij}$ , para  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq C$ , donde  $N$  corresponde a la demanda máxima en un período.

Para decidir cuánto ordenar, el jefe de bodega considera el costo de mantener inventario, que es de  $h$  pesos por unidad en inventario por unidad de tiempo (i.e.,  $h[Y_t - D_t]_+$  por cada día), y el costo de reaprovisionamiento que es de  $c$  pesos por unidad (i.e.,  $c(Y_t - X_t)$  por cada día). Por otra parte el jefe considera que cada unidad vendida genera  $v$  pesos a la compañía (i.e.,  $v \min\{Y_t, D_t\}$  por cada día).

- a ) (3 puntos) Formule el problema de decisión del jefe de bodega como un proceso de decisión markoviano donde se quiere maximizar las ganancias medias estacionarias por período.
- b ) (3 puntos) Suponga que  $C = N = 2$ ,  $c = 2$ ,  $h = 3$ ,  $v = 6$  y que las probabilidades  $q_{ij}$  están dadas por la siguiente matriz:

Prob	$Y_t = 0$	$Y_t = 1$	$Y_t = 2$
$D_t = 0$	0,4	0,1	0
$D_t = 1$	0,3	0,4	0,4
$D_t = 2$	0,3	0,5	0,6

Aplique el algoritmo de Howard para determinar la política óptima de reaprovisionamiento.

## Problema 3

Un recorrido de buses pasa por un paradero según un proceso de poisson de tasa  $\lambda$ . Los pasajeros llegan al paradero según un proceso de poisson de tasa  $\mu$ . Podemos suponer que el bus tiene suficiente capacidad para que todos los pasajeros esperándolo se suban.

- a ) (2 puntos) Sea  $\pi_k$  la probabilidad que en estado estacionario hayan  $k$  personas esperando en el paradero. Calcule  $\pi_k$  para todo  $k$ .
- b ) (2 puntos) Calcule el tiempo promedio de espera de un pasajero en el paradero.
- c ) (2 puntos) ¿Cuál es el número esperado de personas en el paradero?