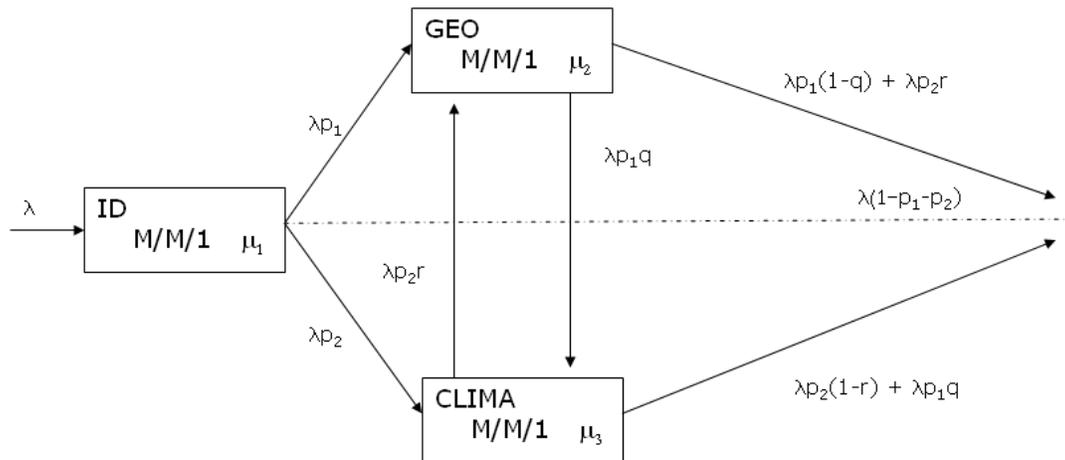


Pauta Auxiliar 11: Redes de Colas y Markov con Decisiones

Martes 17 de Noviembre de 2009

Problema 1

1. El sistema de colas es el que se presenta a continuación:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

| Sistema | Tasa Efectiva | Valor |
|---------|-------------------|-------------------------------------|
| ID | λ_{ID} | λ |
| GEO | λ_{GEO} | $\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot r)$ |
| CLIMA | λ_{CLIMA} | $\lambda \cdot (p_1 \cdot q + p_2)$ |

Las condiciones de estado estacionario son las siguientes:

| Sistema | Condición |
|---------|------------------------------|
| ID | $\lambda_{ID} \leq \mu_1$ |
| GEO | $\lambda_{GEO} \leq \mu_2$ |
| CLIMA | $\lambda_{CLIMA} \leq \mu_3$ |

2. Calculamos el número esperado de personas en el sistema como la suma del número esperado de personas en cada subsistema. Ocupando los resultados de la M/M/1:

$$\begin{aligned}
 L_{TOTAL} &= L_{ID} + L_{GEO} + L_{CLIMA} \\
 &= \frac{\lambda_{ID}}{\lambda_{ID} + \mu_1} + \frac{\lambda_{GEO}}{\lambda_{GEO} + \mu_2} + \frac{\lambda_{CLIMA}}{\lambda_{CLIMA} + \mu_3}
 \end{aligned}$$

3. Para esto ocupamos Little:

$$W_{TOTAL} = \frac{L_{TOTAL}}{\lambda}$$

4. El costo por unidad de tiempo de la espera será el siguiente:

$$C_{ESPERA} = L_{TOTAL} \cdot C_W$$

El costo de atención será:

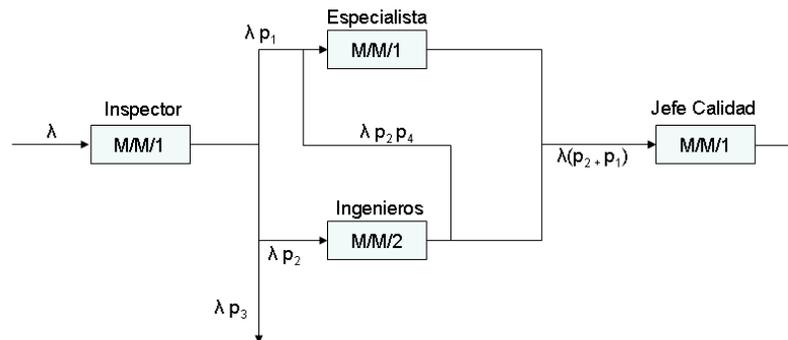
$$\begin{aligned} C_{ATENCIÓN} &= (1 - \pi_0^{ID}) \cdot C_1(\mu_1) + (1 - \pi_0^{GEO}) \cdot C_2(\mu_2) + (1 - \pi_0^{CLIMA}) \cdot C_3(\mu_3) \\ &= \frac{\lambda_{ID}}{\mu_1} \cdot C_1(\mu_1) + \frac{\lambda_{GEO}}{\mu_2} \cdot C_2(\mu_2) + \frac{\lambda_{CLIMA}}{\mu_3} \cdot C_3(\mu_3) \end{aligned}$$

Claramente tanto el costo de espera como el costo de atención presentan dependencias respecto a las tasas de atención dado que ellas condicionan los valores de las probabilidades estacionarias. De esta forma el problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$P = \min_{u_i > 0} \{C_{ESPERA}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) + C_{ATENCIÓN}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\}$$

Problema 2

1. Sean $p_1 = 10\%$, $p_2 = 5\%$, $p_3 = 85\%$ y $p_4 = 20\%$, el sistema queda como sigue:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

| Sistema | Tasa Efectiva | Expresión | Valor |
|--------------|-----------------|--------------------------------|----------------------|
| Inspector | λ_{ins} | λ | λ |
| Especialista | λ_{esp} | $\lambda(p_1 + p_2 \cdot p_4)$ | $0.11 \cdot \lambda$ |
| Ingenieros | λ_{ing} | $\lambda \cdot p_2$ | $0.05 \cdot \lambda$ |
| Jefe Calidad | λ_{cal} | $\lambda \cdot (p_1 + p_2)$ | $0.15 \cdot \lambda$ |

2. Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

| Sistema | Condición |
|--------------|------------------------------------|
| Inspector | $\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1} < 1$ |
| Especialista | $\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2} < 1$ |
| Ingenieros | $\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3} < 1$ |
| Jefe Calidad | $\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4} < 1$ |

3. La fracción de productos que llegan al departamento y que son analizados por el especialista en fallas menores es :

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4)}{\lambda} = 11 \%$$

4. En esta parte hay dos formas posibles de proceder:

Forma 1:

Calculando los largos promedios de cada uno de los subsistemas usando las expresiones conocidas, se obtiene:

| Sistema | L_i | ρ_i |
|--------------|---|--------------------------------|
| Inspector | $\frac{\rho_{ins}}{1-\rho_{ins}}$ | $\frac{\lambda_{ins}}{\mu_1}$ |
| Especialista | $\frac{\rho_{esp}}{1-\rho_{esp}}$ | $\frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$ |
| Ingenieros | $\frac{2 \cdot \rho_{ing}}{1-\rho_{ing}^2}$ | $\frac{\lambda_{ing}}{2\mu_3}$ |
| Jefe Calidad | $\frac{\rho_{cal}}{1-\rho_{cal}}$ | $\frac{\lambda_{cal}}{\mu_4}$ |

Luego:

$$L_{total} = L_{ins} + L_{esp} + L_{ing} + L_{cal}$$

Finalmente usando la fórmula de Little, se obtiene:

$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

Forma 2:

Calculando los tiempos de permanencia promedio en cada subsistema como:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

donde λ_i representa la tasa efectiva de entrada al sistema i, el tiempo de permanencia en el sistema total se puede obtener de la siguiente forma:

$$W_{total} = W_{ins} + W_{esp} \cdot (p_1 + p_2 \cdot p_4) + W_{ing} \cdot p_2 + W_{cal} \cdot (p_1 + p_2)$$

5. Bajo estas condiciones el subsistema del Inspector se transforma de una cola M/M/1 a una M/M/1/50. Con esto las salidas de esta sistema y por lo tanto la entrada a los subsiguientes deja de ser poissoniana y el sistema no se podría estudiar con los modelos estudiados, a no ser que las tasas de entrada y atención sean tales que nunca se alcance la capacidad máxima del sistema.
6. Si se agrega un número ilimitado de especialistas ese subsistema se transforma en una cola M/M/ ∞ , en la cual el número de productos en el sistema tiene una distribución de Poisson de media $L = \frac{\lambda_{esp}}{\mu_2}$. El tiempo promedio que permanece un producto en en este subsistema es $\frac{1}{\mu_2}$; ya que al existir capacidad ilimitada en la atención no se forma cola y el tiempo en el sistema es igual al tiempo de atención.

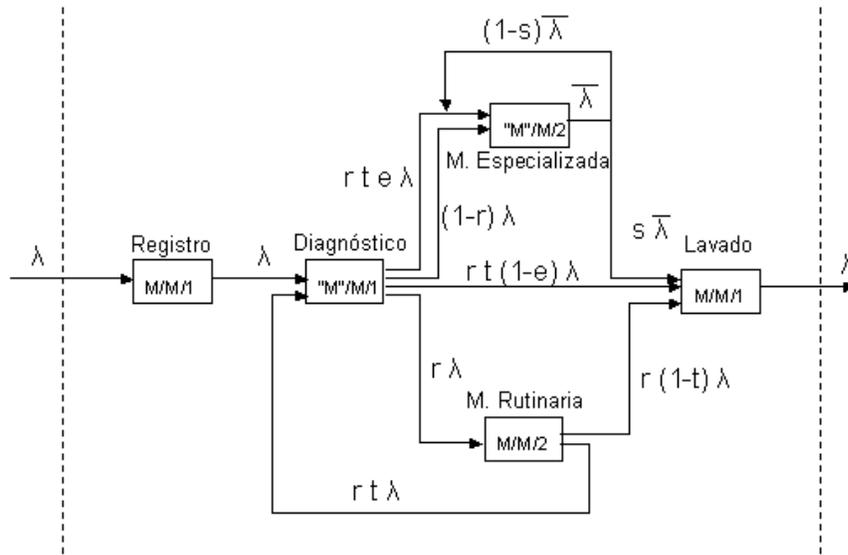
Con lo anterior es posible calcular un nuevo W_{total_2} de las mismas dos formas posibles mostradas en la parte 4 y se puede cuantificar la disminución del tiempo en el sistema como :

$$\delta = W_{total} - W_{total_2}$$

donde W_{total} es el calculado en la parte 4.

Problema 3

1. El sistema queda de la siguiente forma:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

| Sistema | Tasa Efectiva | Valor |
|------------------|------------------|---|
| Registro | λ_{Reg} | λ |
| Diagnóstico | λ_{Diag} | $\lambda + \lambda r t$ |
| M. Especializada | λ_{Esp} | $\frac{\lambda \cdot (e t r + (1-r))}{s}$ |
| M. Rutinaria | λ_{Rut} | $r \lambda$ |
| Salida | λ_{Sal} | λ |

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

| Sistema | Condición |
|------------------|------------------------------------|
| Registro | $\frac{\lambda_{Reg}}{\mu_1} < 1$ |
| Diagnóstico | $\frac{\lambda_{Diag}}{\mu_2} < 1$ |
| M. Especializada | $\frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3} < 1$ |
| M. Rutinaria | $\frac{\lambda_{Rut}}{2\mu_4} < 1$ |
| Salida | $\frac{\lambda_{Sal}}{\mu_5} < 1$ |

2. Procedemos como siempre:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda r t e}{\lambda r t e + (1-r)\lambda}$$

3. Para esta parte utilizamos las formulas de los sistemas de colas clásicos y la formula de Little. De esta forma, dado que se conoce completamente la trayectoria que seguirá el auto, se puede ver que:

$$E(\text{Tiempo}) = E(\text{T Registro}) + E(\text{T Diagnóstico}) + E(\text{T especialista}) + E(\text{T Salida})$$

Utilizando los resultados elementales la expresión queda:

$$E(\text{Tiempo}) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda_{Diag}} + E(\text{T especialista}) + \frac{1}{\mu_3 - \lambda_{Sal}}$$

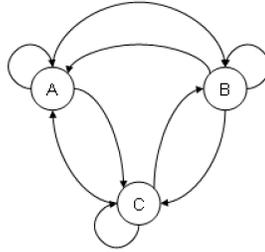
Por otro lado se puede calcular el tiempo en el subsistema de Especialistas condicionando sobre N= Número de veces que se reingresa al sistema de especialistas. De esta forma:

$$E(T \text{ Especialista}) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{Esp} \cdot k \cdot (1-s)^{k-1} \cdot s = \frac{1}{s} W_{Esp}$$

donde : $W_{Esp} = \frac{2\rho_{Esp}}{\lambda_{Esp}(1-\rho^2)}$ con $\rho_{Esp} = \frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3}$

Problema 4

1. La cadena queda se muestra en la figura.



Las políticas de decisión pueden ser especificadas como combinaciones de las políticas puras de publicidad y no publicidad. Sólo basta con especificar las matrices de transición para estas últimas (ver el enunciado).

Respecto a los beneficios asociados a las políticas estos serán:

$$r^{Sin} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad r^{Pub} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Esto no es más que resolver una programación dinámica donde el estado son las ventas y las decisiones son hacer o no publicidad. Esto queda de la siguiente forma (ojo, que el número de estados es 3 por lo que podemos especificar la función de beneficios para cada uno):

Etapa 0 (contando desde el final hacia atrás):

$$V(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Etapa k:

$$V_A(k) = \max \left\{ 3 + (0,5 \quad 0,3 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 5 + (0,2 \quad 0,5 \quad 0,3) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_M(k) = \max \left\{ 1 + (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 3 + (0,1 \quad 0,4 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_B(k) = \max \left\{ -1 + (0,4 \quad 0,6 \quad 0,0) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 1 + (0,0 \quad 0,3 \quad 0,7) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

3. Utilizaremos el algoritmo de Howard:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} A \rightarrow Sin \\ M \rightarrow Sin \\ B \rightarrow Pub \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a esta política es la siguiente:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,0 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el vector \bar{W} :

$$\bar{W} + g \cdot \vec{e} = \bar{r} + \bar{M} \cdot \bar{W}$$

Desde $\Pi = \Pi \cdot \bar{M}$ y $\sum_i \Pi_i = 1$ tenemos que:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,22 \\ 0,48 \\ 0,30 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$g = \sum_i \Pi_i \cdot \bar{r}_i = 2,2$$

Por lo tanto:

$$(I - \bar{M})\bar{W} = \bar{r} - g \cdot e$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,5 \\ -0,4 & -0,6 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_M \\ W_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,79 \\ 0,79 \\ -3,2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} W_A = 5,2 \\ W_M = 2,4 \\ W_B = 0,0 \end{matrix}$$

Ahora debemos construir la próxima política estacionaria.

$$S(A) = \begin{cases} 5 + (0,2 \ 0,5 \ 0,3) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 7,2 \\ 3 + (0,5 \ 0,3 \ 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6,34 \end{cases} \Rightarrow Sin$$

$$S(M) = \begin{cases} 3 + (0,1 \ 0,4 \ 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,5 \\ 1 + (0,4 \ 0,4 \ 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,06 \end{cases} \Rightarrow Sin$$

$$S(B) = \begin{cases} 1 + (0,0 \ 0,3 \ 0,7) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,7 \\ -1 + (0,4 \ 0,6 \ 0,0) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,5 \end{cases} \Rightarrow Pub$$

Pero hemos reconstruido la política $\bar{S} \Rightarrow \bar{S}$ es la política óptima.