

## Auxiliar 10: Teoría de Colas

Martes 3 de Noviembre de 2009

### Problema 1

Debido a la gran expectativa que genera la final del fútbol chileno entre albos y azules, se han vendido las  $N$  entradas disponibles para dicho evento a través de la empresa Ticket Master. Por motivos de seguridad, el ingreso al estadio se hará por una única entrada, en donde una persona corta los tickets en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa  $\mu$ . Con probabilidad  $q$  revisará al espectador para evitar la entrada de artículos peligrosos al evento. Esta revisión, incluido el tiempo en cortar el ticket, toma un tiempo exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$ . La llegada de cada hinchista se puede modelar según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  y su manera de entrar a la cola es la siguiente:

Si hay menos de  $M$  personas esperando por entrar, la persona se pondrá al final de la cola. Pero si hay  $M$  o más personas, el hinchista se desesperará y buscará un amigo para colarse. La búsqueda de éste comienza desde el origen. Cada persona en la fila es amigo con probabilidad  $p$ . Si ninguno de los que está esperando lo es, la persona se retira indignada y renuncia a entrar. Considere que el tiempo para buscar a un amigo es despreciable y que existe un costo para la empresa de  $C_j$  si hay  $j$  personas en la fila. Por otra parte, hay un costo asociado al tiempo promedio que demora una persona en ingresar al estadio (dado que se mete en la fila) de  $K$  por unidad de tiempo

1. Calcule la probabilidad de que una persona se pueda colar al llegar, cuando el número de personas en la cola es igual a  $j$ . ( $j \geq M$ ).
2. Modele el número de personas en la fila como un proceso de Markov, indicando las transiciones para estados genéricos. Indique bajo qué condiciones existen probabilidades estacionarias.
3. Calcular los siguientes datos, para el modelo en el largo plazo. Asuma conocidas las probabilidades estacionarias:
  - a) Tasa efectiva de entrada
  - b) Tiempo esperado en el sistema
  - c) Costo esperado para la empresa

El gurú del fútbol indicó que modelar el ingreso de esta forma en los estadios es poco realista, pues en Chile la gente siempre trata de colarse al llegar, no importando el número de personas en la fila. Además generalmente hay dos personas revisando los tickets.

4. Modele nuevamente el número de personas en la fila para ingresar al estadio, considerando las observaciones del gurú y suponiendo que el hinchista nunca se irá sin ingresar. Indique las transiciones para estados genéricos y calcule las probabilidades estacionarias cuando  $N$  tiende a infinito.
5. Usando lo anterior calcule en el largo plazo
  - a) Tasa efectiva de entrada a la cola
  - b) Número de personas en el sistema
  - c) Tiempo esperado en la cola sin ser atendido

## Problema 2

Armijo Catalán es el dueño de una concesionaria de automóviles de última generación, en cuyas dependencias caben a lo más  $C$  unidades de estos bólidos. En esta ocasión Armijo centrará su atención en la política de mantención del inventario, y no en los precios que cobrará.

Tras noches de insomnio, Armijo determino la siguiente política: cada vez que realice una venta, ordenará a su proveedor un nuevo automóvil. Dicho proveedor cada vez que recibe un pedido inmediatamente selecciona a uno de sus múltiples empleados para que conduzca el auto hasta la concesionaria. Independiente del conductor el tiempo de viaje entre la bodega del proveedor y el local de Armijo se comporta como una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\alpha}$  [horas]

Por otro lado la llegada de clientes a la concesionaria se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa  $\beta$  [Clientes/hora]. No todos los clientes compran, sino que la probabilidad de compra de un cliente esta directamente relacionada con la cantidad de automóviles presentes en el local. Sea  $p_i$  la probabilidad de compra cuando hay  $i$  autos en la concesionaria.

Suponga que inicialmente se cuenta con  $C$  autos en la concesionaria. Al respecto responda las siguientes preguntas:

1. Si en un instante hay  $k$  empleados manejando cada uno un automóvil hacia el local de Armijo, ¿como se distribuye el tiempo hasta que el primero de ellos llega a su destino?
2. Mientras haya  $i$  autos en la concesionaria, ¿como se distribuye el tiempo hasta que se vende el próximo automóvil?
3. Utilizando las partes anteriores modele el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo
4. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y escriba el sistema de ecuaciones que permitiría calcularlas.
5. Encuentre expresiones para la tasa efectiva de venta de automóviles y para la tasa efectiva de llegada de automóviles.
6. Suponiendo que Armijo entrega una pequeña propina de  $\$X$  a cada conductor que llega hasta su local, ¿Cual es el costo esperado por unidad de tiempo de la entrega de propinas?

## Problema 3

Don King, nuevamente requiere de nuestra ayuda para estudiar el sistema de atención de una de sus sucursales bancarias.

El banco cuenta con  $C$  cajas en paralelo y opera con una cola única de capacidad ilimitada. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [clientes/hora]. Si al llegar una persona al banco, hay  $j$  clientes en la fila, entra al sistema con probabilidad  $p_j$ , y en caso contrario, se va ( $P_0=1$ ).

Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media  $\frac{1}{\mu}$  [horas].

Además se sabe que cada la atención de cada uno de los cajeros, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$  [horas].

1. Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y entregue expresiones genéricas que le permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguiente preguntas:
  - a) ¿Qué fracción de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no ponerse en la cola y retirarse sin entrar al banco?

- b) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?

Ahora suponga que la capacidad para personas en cola es igual a  $R$  (Asuma  $p_R=0$ ). En el momento que el sistema se llena, Don Güilly, guardia del local, ágilmente se sube a un improvisado escenario dispuesto en el hall del banco, ha realizar una atrevida performance.

Según Don King, cuando el guardia está actuando, inhibe cualquier señal de aburrimento por parte de los clientes. Don Güilly mantiene su show, mientras existan personas en cola.

4. Modele esta nueva situación como una Cadena de Markov en tiempo continuo.

## Problema 4

Un centro de información telefónica cuenta con dos telefonistas cuyo tiempo de atención de llamadas es idénticamente distribuido y corresponde a una distribución exponencial de media igual a 1 minuto.

Dado que la operación de este call center está recién comenzando, no se cuenta con suficientes datos históricos como para determinar la distribución de probabilidad de la entrada de llamadas, aunque se puede suponer que los tiempos entre estas son exponenciales. Además, en los pocos días de funcionamiento se ha advertido que el 10 % del tiempo ambas operadoras están desocupadas.

Si una persona llama y ambas operadoras están ocupadas su llamada quedará en espera hasta que alguna se desocupe y pueda atenderlo. Suponiendo que no existe una restricción sobre el número de llamadas que pueden quedar en espera, y que los clientes son infinitamente pacientes, responda:

1. ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?.
2. Determine la tasa de entrada de llamadas ( $\lambda$ ).
3. Calcule el número promedio de llamadas en espera y el tiempo promedio de espera de un cliente antes de ser atendido.

Suponga ahora que las operadoras cuando ven que hay llamadas en espera apuran las atenciones. Los tiempos de atención siguen siendo variables aleatorias exponenciales, pero ahora la tasa con que una operadora atiende a un cliente cuando hay  $i$  clientes esperando es  $i \cdot \mu$ .

4. ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario? Explique.
5. Determine la ecuación que permitiría calcular la tasa de entrada de llamadas  $\lambda$ .