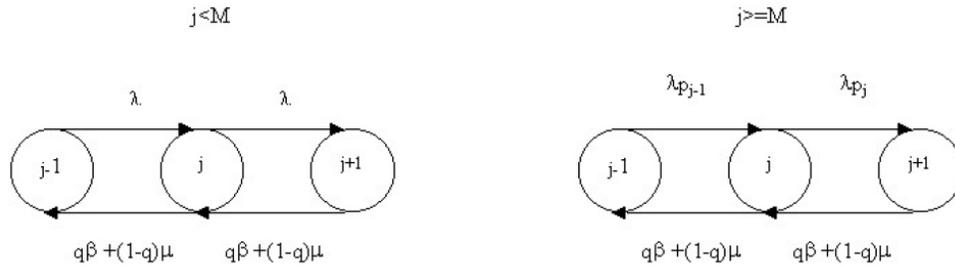


## Auxiliar 10: Teoría de Colas

Martes 3 de Noviembre de 2009

### Problema 1

1.  $p_j = 1 - (1 - p)^j$



2.

Existen probabilidades estacionarias ya que la cadena es finita. (Estados de 0 a N)

3. a) Tasa efectiva de entrada  
 $\lambda_E = \lambda \sum_{j=0}^{M-1} \Pi_j + \sum_{j=M}^N \lambda p_j \Pi_j$   
 b) Tiempo esperado en el sistema  
 $W = \frac{L}{\lambda_E}$  Donde  $L = \sum_{j=0}^N j \Pi_j$   
 c) Costo esperado para la empresa  
 $CE = WK\lambda_E + \sum_{j=0}^N \Pi_j C_j$

4. Bajo esta nueva situación, la tasa de entrada ya no depende de la probabilidad de colarse, pues el que llega siempre se coloca en la fila. Esto quiere decir que la tasa de llegada es igual a la de entrada. La tasa de muerte para cada estado es simplemente el doble para cada estado, a excepción de pasar del estado donde hay una sola persona a ninguna, la cual sigue siendo  $q\beta + (1 - q)\mu$ . Si N tiende infinito la cadena se transforma en una M/M/2

Las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\Pi_j = 2\rho^j \pi_0 \text{ con } \rho = \frac{\lambda}{2(q\beta + (1-q)\mu)} \text{ y } \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

5. a) Tasa efectiva de entrada a la cola  
 Como se dijo anteriormente, es igual a la de llegada que es  $\lambda$   
 b) Número de personas en el sistema

$$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$$

- c) Tiempo esperado en la cola sin ser atendido  
 Esto es  $W_{sistema} - W_{atencion} = \frac{L}{\lambda} - \frac{1}{q\beta + (1-q)\mu}$

### Problema 2

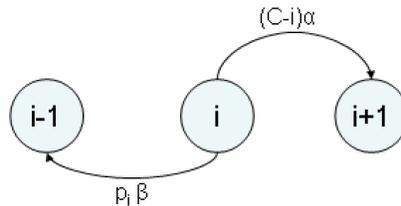
1. El tiempo que demora cada uno de los  $k$  empleados en llegar al local se distribuye exponencial de tasa  $\alpha$ . El tiempo del primero de estos que llega sigue la distribución del mínimo de  $k$  exponenciales de tasa  $\alpha$ . Sabemos que esta distribución es exponencial de tasa  $k \cdot \alpha$ .

- Mientras haya  $i$  autos en la concesionaria la probabilidad de compra de un cliente será  $p_i$ . Utilizando división de procesos de Poisson vemos que el proceso de compra de autos es Poisson de tasa  $\beta \cdot p_i$ . Entonces el tiempo entre compras se distribuye exponencial de tasa  $\beta \cdot p_i$ .
- Modelamos los estados como el número de automóviles en el local. La cadena queda de la siguiente forma:



Vemos que la cadena tiene la estructura de un proceso de nacimiento y muerte.

Para definir la cadena completamente debemos especificar las tasas de transición entre estados. Cuando hay  $i$  autos en la concesionaria habrán  $C - i$  empleados conduciendo automóviles al local, por lo tanto la tasa de transición al estado  $i + 1$  será  $(C - i) \cdot \alpha$ . En la misma situación la tasa de compra será  $\beta \cdot p_i$  (parte 2). Con esto las tasa quedan de la siguiente forma.



En la figura anterior debemos obviar las transiciones desde  $C$  a  $C + 1$  y desde  $0$  a  $-1$  (no existen).

- La cadena es irreducible y finita. Condición suficiente.

Para calcular las probabilidades estacionarias utilizamos las formulas de procesos de nacimiento y muerte.

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (C - j) \cdot \alpha}{\prod_{j=1}^i p_j \cdot \beta} \cdot \pi_0$$

$$\sum_{i=0}^C \pi_i = 1$$

- Supondremos conocidas las probabilidades estacionarias.

En este caso la tasa efectiva de entrada de autos al sistema es (en el largo plazo):

$$\lambda = \sum_{i=0}^C (C - i) \cdot \alpha \cdot \pi_i$$

La tasa efectiva de salida de autos del sistema es:

$$\mu = \sum_{i=0}^C p_i \cdot \beta \cdot \pi_i$$

6. Mientras nos encontramos en el estado  $i$  los empleados llegan a la tienda con tasa  $(C - i) \cdot \alpha$  por lo que el costo esperado por unidad de tiempo es simplemente:

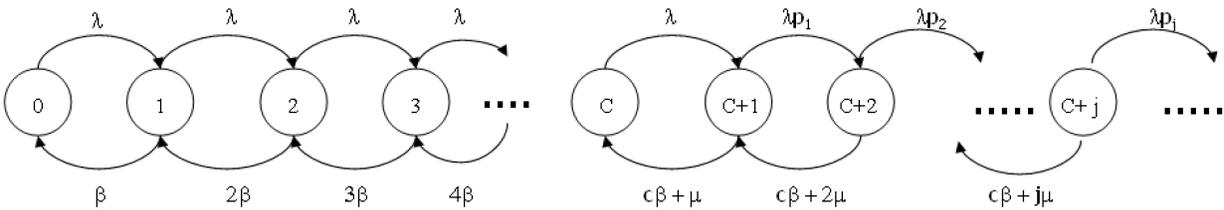
$$(C - i) \cdot \alpha \cdot X$$

Ahora si ajustamos este costo considerando que no me encuentro todo la unidad de tiempo en un estado, sino que solo estoy una fracción  $\pi_i$  (en términos esperados, en el largo plazo), tendremos que:

$$E[\text{Costo}] = \sum_{i=0}^C (C - i) \cdot \alpha \cdot X \cdot \pi_i = \lambda \cdot X$$

### Problema 3

1. Como es costumbre modelamos el número de personas en el sistema. La cadena toma la siguiente forma:



2. Al igual que en una cadena  $M/M/\infty$  solo necesitamos que  $\mu$  sea positivo, ya que la tasa de muerte es creciente y la de nacimiento está acotada por  $\lambda$ . Las expresiones necesarias para calcularlas son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i \cdot \pi_0 \quad , \quad \forall i \leq C$$

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu} \pi_0 \quad \forall i > C$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i + \sum_{i=C+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu}}$$

3. Supondremos conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.

- a) Razonamos calculando casos favorables sobre casos totales. Claramente los casos totales están dados por la cantidad de clientes que llegan en una hora ( $\lambda$ ). Los casos favorables son los siguientes:

$$C.F. = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot \lambda \cdot (1 - P_{i-C})$$

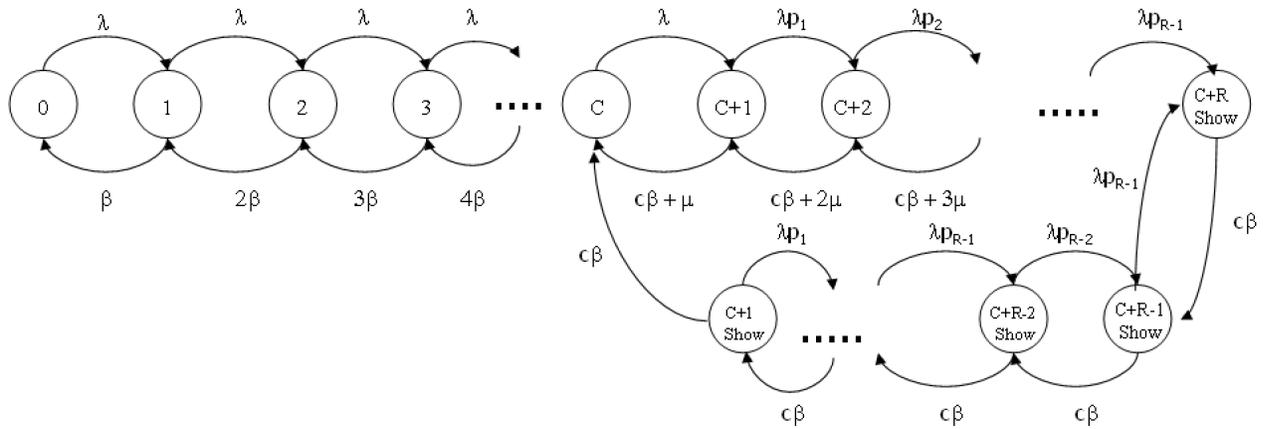
Entonces:

$$E[\% \text{ Clientes que no entran}] = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C})$$

- b) Considerando a todos los clientes:  $\lambda$  (sin comentarios)  
Sin considerar a los que entran:  $\lambda \cdot (1 - \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C}))$ .

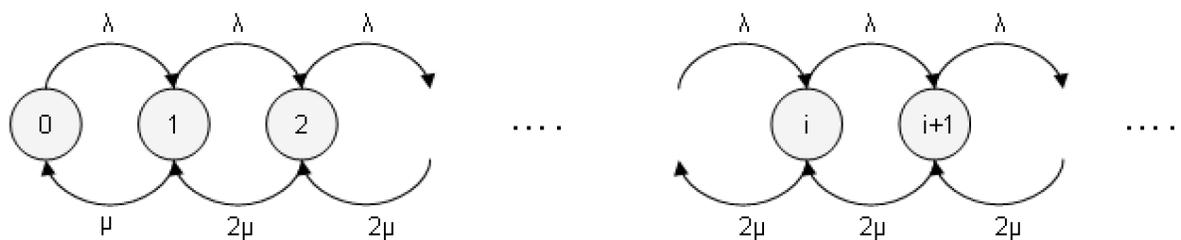
4. La nueva situación puede ser modelada de la siguiente forma:

Acá hemos diferenciado explícitamente los estados en los cuales el guardia se encuentra en el escenario.



### Problema 4

Primero debemos notar que el sistema en cuestión es una cola del tipo M/M/2 con la que se muestra a continuación:



1. Como condición de estado estacionario debemos imponer que:

$$\frac{\lambda}{2 \cdot \mu} < 1$$

2. Los resultados para la M/M/2 son conocidos:

$$\pi_i = 2 \cdot \rho^i \cdot \pi_0 \quad i \neq 0$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i}$$

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

con  $\rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$ .

Por otro lado, del enunciado sabemos que  $\pi_0 = 0,1$  Por lo tanto igualando términos obtenemos que:

$$\frac{1 - \rho}{1 + \rho} = 0,1 \Rightarrow \lambda \approx 1,64$$

3. Si calculamos el número medio de personas en el sistema, tendremos que:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \frac{\rho}{1 - \rho^2}$$

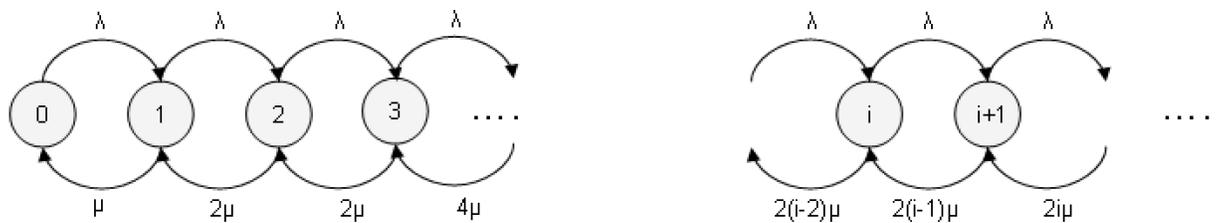
Entonces utilizando Little tendremos que:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \lambda}$$

Pero este W es el tiempo promedio en el sistema, entonces tenemos que restarle el tiempo de atención. Entonces el tiempo promedio de espera será:

$$W_{Cola} = W - \frac{1}{\mu}$$

4. En este caso la cadena toma la siguiente forma:



Claramente aquí no hay que imponer condición de estado estacionario (dado que la tasa de atención aumenta indefinidamente a medida que el sistema se llena, mientras que la tasa de llegada permanece constante)

5. Las ecuaciones de estado estacionario(nacimiento y muerte) son las siguientes:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$$

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \prod_{k=3}^i \frac{1}{2(k-2)} \quad i > 2$$

Con:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \prod_{k=3}^i \frac{1}{2(k-2)}}$$

Ahora si igualamos la expresión de  $\pi_0$  al valor dado (0.1) obtendríamos el valor de  $\lambda$  (mismo procedimiento que en la parte anterior).