IN44A / IN3702: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, R. Lagos, C. Thraves

Pauta CTP 4: Markov Continuo

Martes 27 de Octubre de 2009

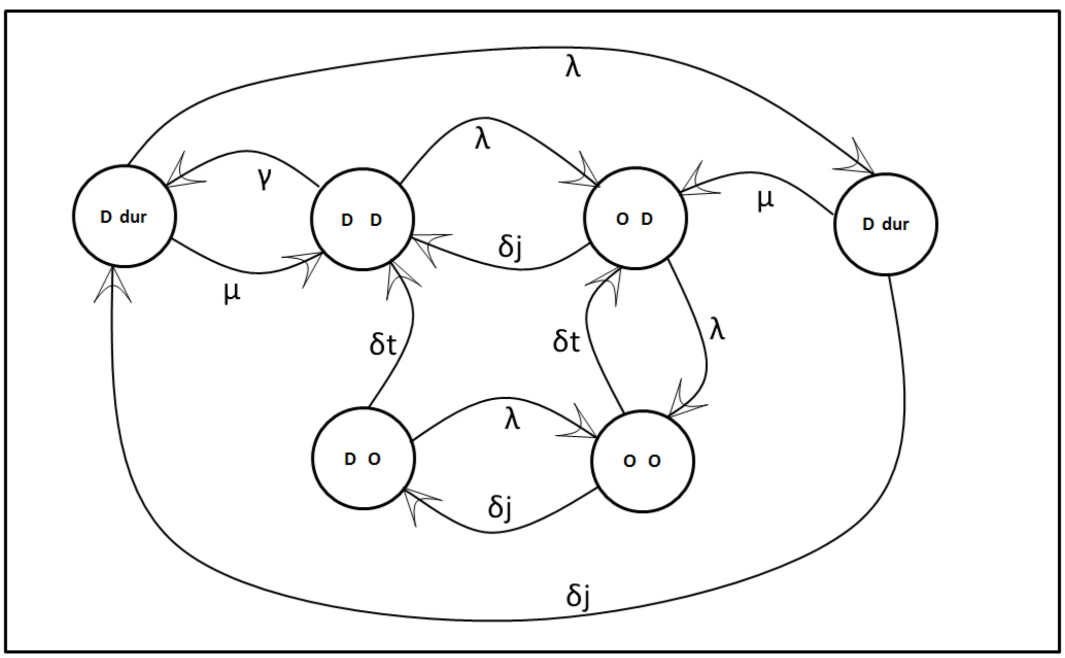
Una prestigiosa `Escuela de Ingeniería` afectada por una serie de robos los últimos meses,ha decidido aumentar los niveles de seguridad dentro de sus dependencias. Debido a que las medidas de supervisación de entrada (por ejemplo exigir una tarjeta de identificación a todos los que entren a la facultad) han sido más impopulares que efectivas, se ha decidido contratar a 2 guardias (`Jack` y `Tony`) que vigilarán desde el interior del recinto.

Se sabe que los ladrones entran a la facultad según un `proceso de Poisson` de tasa λ [ladrones/hora]. Si un ladrón entra y está disponible alguno de los guardias, comenzará una persecución desenfrenada entre el guardia y el ladrón, persecución que dura un tiempo aleatorio según una `distribución exponencial` de media $1/\delta_j$ [horas/persecución] para `Jack` y $1/\delta_t$ [horas/persecución] para `Tony`. En la persecución el guardia siempre apresa al ladrón, lo deja detenido y luego sale inmediatamente a seguir con su turno. Si un ladrón entra y no hay guardias disponibles, roba la mochila a alguno de los indefensos estudiantes y sale del campus al instante (considere que el tiempo que se demora en elegir a su víctima, robar y escapar es despreciable). Considere además que si entra un ladrón cuando los dos guardias están disponibles, siempre será `Jack` el que lo persiga (quedando `Tony` disponible por si ingresa otro ladrón).

Lamentablemente `Tony` no es muy responsable con su trabajo y se duerme ocasionalmente. El tiempo que permanece despierto es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con media $1/\gamma$ [horas/periodo-despierto]. La improvisada siesta (o tiempo que pasa dormido) toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\mu}$ [horas/siesta], tiempo después del cual despierta y sigue con su turno inmediatamente (esperando que nadie se haya dado cuenta). Considere que `Tony` no está disponible cuando se encuentra dormido y que no puede comenzar a dormir mientras ocurre una persecución (ya sea suya o de `Jack`).

1. `(1.5 puntos)` Modele el estado de ocupación de los guardias en la facultad con una `Cadena de Markov` en `tiempo continuo`.

   `Solución:`



(0.7 puntos) por los estados, (0.8 puntos) por las *flechitas*.

`Observación:` descontar poco (0.3 puntos) a quienes se confundieron y pensaron que si Jack iniciaba una persecución y Tony dormía, éste lo despertaría.

2. `(1.0 punto)` Justifique la existencia de `probabilidades estacionarias` y plantee el sistema de ecuaciones que permitirían calcularlas.

   `Solución:`

   La cadena admite probabilidades estacionarias porque es irreductible y finita (0.2 puntos).

   El sistema a resolver es:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{Ddur}\,(\mu+\lambda) &= \Pi_{DD}\cdot\gamma + \Pi_{Odur}\cdot\delta_j && (1)\\
\Pi_{DD}\,(\lambda+\gamma) &= \Pi_{DO}\cdot\delta_t + \Pi_{OD}\cdot\delta_j + \Pi_{Ddur}\cdot\mu && (2)\\
\Pi_{OD}\,(\lambda+\delta_j) &= \Pi_{OO}\cdot\delta_t + \Pi_{DD}\cdot\lambda + \Pi_{Odur}\cdot\mu && (3)\\
\Pi_{Odur}\,(\mu+\delta_j) &= \Pi_{Ddur}\cdot\lambda && (4)\\
\Pi_{DO}\,(\lambda+\delta_t) &= \Pi_{OO}\cdot\delta_j && (5)\\
\Pi_{OO}\,(\delta_t+\delta_j) &= \Pi_{DO}\cdot\lambda + \Pi_{OD}\cdot\lambda && (6)\\
1 &= \Pi_{Ddur} + \Pi_{DD} + \Pi_{OD} + \Pi_{Odur} + \Pi_{DO} + \Pi_{OO} && (7)
\end{aligned}
$$

   (0.1 punto por cada una de las primeras 6 ecuaciones y 0.2 punto por la última).

3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias y que el sistema lleva operando por mucho tiempo, responda las siguientes preguntas:

   a) `(1.0 punto)` ¿Cuál es el número medio de robos por unidad de tiempo en el largo plazo?

   `Solución:`

$$\lambda(\Pi_{OO} + \Pi_{Odur})$$

   b) `(1.0 punto)` En el largo plazo, ¿cuál es la tasa de ocupación de cada uno de los guardias (fracción de su tiempo que están en persecuciones)?

   `Solución:`

$$TasaOcup_{Jack} = \Pi_{OO} + \Pi_{OD} + \Pi_{Odur}$$

$$TasaOcup_{Tony} = \Pi_{OO} + \Pi_{DO}$$

   c) `(1.0 punto)` Si `Jack` acaba de empezar a perseguir a un ladrón, estando `Tony` disponible. ¿Cuál es la probabilidad de que `Jack` termine de capturar al ladrón antes de que `Tony` inicie una persecución?

   `Solución:`

   Se debe hacer una carrera de exponenciales entre el tiempo de persecución de Jack (se distribuye $exp(\delta_j)$) y el tiempo que demora llegar un nuevo ladrón para que Tony lo persiga (distribuye $exp(\lambda)$). Luego el resultado pedido es:

$$\frac{\delta_j}{\delta_j + \lambda}$$

   d) `(0.5 puntos)` Considere que un robo le genera una pérdida de C pesos a la universidad. Encuentre el valor en pesos por hora de w, el máximo que la universidad estaría dispuesta a pagar por el tiempo que cada uno de los guardias pasa persiguiendo ladrones.

   `Solución:`

   Se debe cumplir que

$$C\lambda(\Pi_{OO} + \Pi_{Odur}) = w(\Pi_{DO} + 2\Pi_{OO} + \Pi_{OD} + \Pi_{Odur})$$

   Luego:

$$w = \frac{C\lambda(\Pi_{OO} + \Pi_{Odur})}{\Pi_{DO} + 2\Pi_{OO} + \Pi_{OD} + \Pi_{Odur}}$$

   `Observación:` Pueden haber considerado w como un pago conjunto a los dos guardias. Considérenlo bueno también