

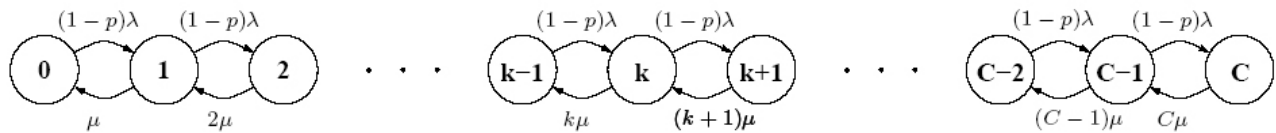
Auxiliar 9: Teoría de Colas

Martes 27 de Octubre de 2009

Problema 1

- Una cadena que modela el estado de ocupación de las camas se puede definir utilizando estados $0, 1, \dots, C$ que representan el número de camas ocupadas.

La cadena resultante se muestra en la figura:



- La cadena admite probabilidades estacionarias porque es finita e irreducible.

Definamos $\rho = \frac{(1-p)\lambda}{\mu}$. Con esta notación, las probabilidades estacionarias cumplen las relaciones

$$\pi_k = \frac{\rho^k}{k!} \pi_0$$

Por lo tanto,

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \frac{\rho^i}{i!}}$$

La suma en el denominador no tiene expresión cerrada conocida.

- La probabilidad que se termine de atender al último paciente de urgencia que llegó, antes que llegue otro paciente de urgencia es igual a

$$\frac{\mu}{(1-p)\lambda + \mu}$$

- a) En promedio, por día, son derivados al otro hospital de la zona $\lambda(1-p)\pi_C$ pacientes.

$$b) \text{ En promedio hay } \sum_{k=0}^C k\pi_k = \sum_{k=1}^C k\pi_k \text{ camas ocupadas.}$$

Problema 2

- El modelo es un proceso de nacimiento y muerte con conjunto de estados $\{0, 1, 2, \dots, L\}$. Las tasas de transición son:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (E - i)\lambda \\ \mu_i &= i\mu. \end{aligned}$$

Este sistema de espera puede ser representado, en la notación de Kendall como $M/M/L/L/E$: un sistema con llegadas markovianas, con tiempos de atención exponenciales, L servidores (las líneas), capacidad L y llegadas originadas en una población de tamaño E .

Este sistema siempre tiene régimen estacionario ya que es un proceso de nacimiento y muerte (por lo tanto, una cadena irreducible) finito.

2. a) Fracción del tiempo promedio que pasa una línea desocupada: $\sum_{i=0}^L \frac{L-i}{L} \pi_i$.
- b) Llamadas no realizadas en una hora: $(E-L)\lambda\pi_L$.
- c) Se debe encontrar L ($0 \leq L \leq E$) que minimice el costo esperado por hora:

$$C \cdot L + K(E-L)\lambda\pi_L + \left(\mu \sum_{i=1}^L i\pi_i \right) Y$$

o

$$C \cdot L + K(E-L)\lambda\pi_L + \left(\lambda \sum_{i=0}^{L-1} (E-i)\pi_i \right) Y.$$

3. En el caso que $L = E$, se tiene que $\lambda_i = (E-i)\lambda$ y $\mu_{i+1} = (i+1)\mu$, para $i \in \{0, 1, \dots, E-1\}$. Entonces, para $k = 1, 2, \dots, E$,

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(E-i)\lambda}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{E(E-1) \cdots (E-k+1)}{k(k-1) \cdots 1} = \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \pi_0.$$

Por lo tanto,

$$1 = \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^E \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right] = \left[\sum_{k=0}^E \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right] \pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)^E \pi_0 = \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^E \pi_0$$

de donde concluimos que

$$\pi_0 = \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^E.$$

4. Los estados siguen siendo los mismos.
 Las tasas de nacimiento cambian a $\lambda_i = (E-i)\lambda + \delta$. Las tasas de muerte siguen siendo las mismas.
 El sistema cambia a un $M/M/L/L$; las llamadas se originan a partir de una población *infinita*.
 La cadena sigue siendo finita e irreducible, por lo que admite probabilidades estacionarias.