IN44A / IN3702: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, R. Lagos, C. Thraves
Semestre Primavera 2009

Pauta Control 2

Pregunta 1

a) Dado que la esperanza de un proceso de Poisson de tasa λ es $E(N(t)) = \lambda t$ entonces, si se desea que en t=1[hr] el promedio de buses despachados sea 6, se requiere que $\lambda = 6\ [buses/hora]$.

b) Sabemos que X_i, el tiempo entre buses, se distribuye exponencialmente con parámetro λ. Por pérdida de memoria de la exponencial, no importa a qué hora llegue el pasajero al paradero, la esperanza de tiempo para que pase el próximo bus siempre es $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = 10$ minutos.

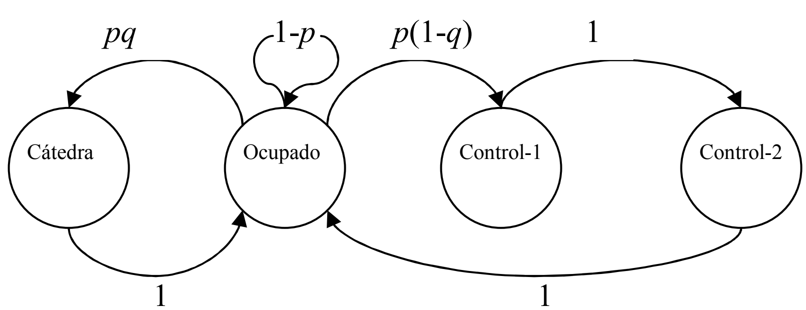
c) Sabemos que cada pasajero llega según un proceso de Poisson en un intervalo de 10 minutos, el tiempo de llegada entre dos buses. Por lo tanto, la distribución del instante de su llegada en cualquiera de esos intervalos es uniforme, por lo que la esperanza de tiempo de espera es 5 minutos.

d) Para el proceso determinístico se requieren 12 buses, para poder sacar un bus cada 10 minutos durante 2 horas. Para el proceso de Poisson, la cantidad de buses que salen en 2 horas puede ser infinita. Dado que se requieren más buses y el tiempo de espera es mayor con un proceso de Poisson, es más conveniente para la empresa despachar los buses determinísticamente.

Pregunta 2

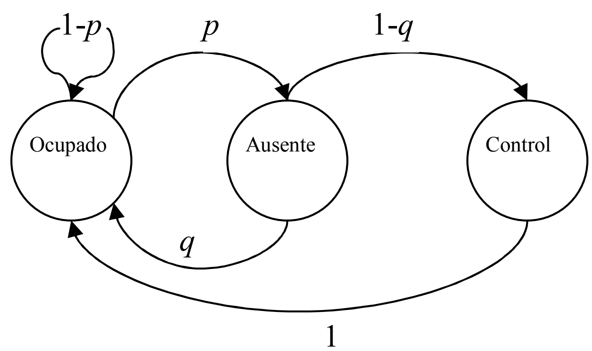
a) Estados: el estado del monitor en cada stand {Ocupado, Cátedra, Control-1, Control-2}.

Se puede modelar como CMHTD pues la transición entre los estados depende solamente del estado en que se encuentra actualmente.



Hay 1 clase recurrente con todos los estados de la cadena.

Alternativamente, el sistema se puede modelar de la siguiente forma:



b)

$$\pi_o = \pi_o(1-p) + \pi_{cat} + \pi_{c2}$$
$$\pi_{cat} = \pi_o pq$$
$$\pi_{c1} = \pi_o p(1-q)$$
$$\pi_{c2} = \pi_{c1}$$
$$\pi_o + \pi_{cat} + \pi_{c1} + \pi_{c2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \pi_o = \frac{1}{1-pq+2p} \qquad \pi_{cat} = \frac{pq}{1-pq+2p} \qquad \pi_{c1} = \pi_{c2} = \frac{p(1-q)}{1-pq+2p}$$

c)

i. La probabilidad que un stand se encuentre vacío es $1-\pi_o = \pi_{cat} + \pi_{c1} + \pi_{c2}$

ii. $p_k = \binom{N}{k}\pi_o^{\,N-k}(1-\pi_o)^k$

iii. La probabilidad que haya al menos un stand vacío es el complemento de que todos los stands estén ocupados: $1-p_0 = 1-\pi_o^{\,N}$.

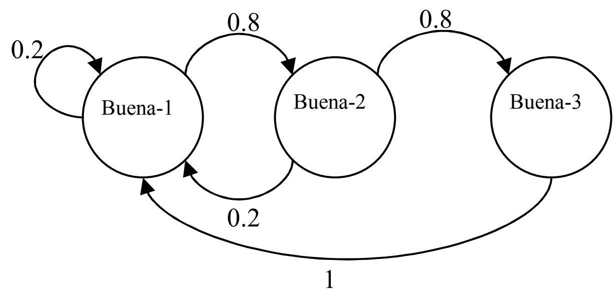
iv. Suponiendo que los monitores de reserva son para todos los stands, se necesitan $n_{\min} = \min\left\{ n \,/\, \sum_{k=1}^{n} \binom{N}{k} \pi_o^{\,k} (1-\pi_o)^{N-k} \geq 0{,}95 \right\}^{*}$

* Se aceptan otros resultados en la medida que los supuestos estén bien justificados.

Pregunta 3

a)

i.



Se tiene que el costo esperado después de tres periodos sin fallar es la esperanza entre que la máquina falle o se compre una nueva, o sea, \$600. Por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= 200 \\ \hat{r}_2 &= 200 \\ \hat{r}_3 &= 600 \end{aligned} \qquad \wedge \qquad \begin{aligned} \pi_1 &= \pi_1 0.2 + \pi_2 0.2 + \pi_3 \cdot 1 \\ \pi_2 &= \pi_1 0.8 \\ \pi_3 &= \pi_2 0.8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \pi_1 &= 0.41 \\ \pi_2 &= 0.33 \\ \pi_3 &= 0.26 \end{aligned}$$

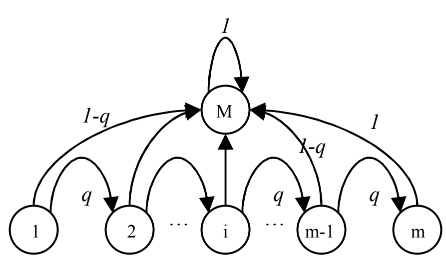
Por lo que el costo de una transición en el largo plazo es $g = \pi^T \cdot \hat{r} = \$305$.

ii. Necesitamos encontrar W para despejar $V_8 = 8 \cdot ge + W + P^8 (V_0 - W)$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad W + g\hat{e} = \hat{r} - PW \quad \Rightarrow \quad W = \begin{pmatrix} -295 \\ -164 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_8 = \begin{pmatrix} 2640 \\ 2754 \\ 2896 \end{pmatrix}$$

Por lo que el costo esperado de partir con una máquina nueva es $V_8{}^C = \$2.640.$ †

b) Esta pregunta la podemos resolver como la cantidad de transiciones necesarias para llegar al estado F cuando la máquina falla.



† Tiene todo el puntaje si no se obtuvo la solución final, pero se estableció correctamente el sistema.

Sabemos que esto se calcula como $W_T = (I_T - P_{TT})^{-1} \cdot e_T$, por lo que sólo se debe encontrar P_{TT} y despejar el sistema $(I_T - P_{TT}) \cdot W_T = e_T$. Se tiene que:

$$P_{TT} = \begin{bmatrix} 0 & q & & \cdots & 0 \\ & 0 & q & & \vdots \\ & & \ddots & q & \\ \vdots & & & 0 & q \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I_T - P_{TT} = \begin{bmatrix} 1 & -q & & \cdots & 0 \\ & 1 & -q & & \vdots \\ & & \ddots & -q & \\ \vdots & & & 1 & -q \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad W_i = 1 + W_{i+1} \cdot q \quad \forall i \neq m \quad \wedge \quad W_m = 1$$

$$\Rightarrow \quad W_i = \sum_{k=0}^{m-i} q^k$$

Por lo que la esperanza de periodos para que la máquina funcione sin fallar es $1 + q + q^2 + \cdots q^{m-1}$.‡

‡ Tiene todo el puntaje si no se obtuvo la solución final, pero se estableció correctamente el sistema.