DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2002
Prof: A. Barrientos, A. Sauré, N. Yanković.
P. Aux: G. Parada, M. Goić, D. Sauré.

Control 3

Miércoles 19 de Junio de 2002

Pregunta 1

Una empresa generadora de energía eléctrica desea evaluar su capacidad de respuesta frente a posibles fallas en las centrales generadoras que posee dentro del país.

Esta empresa posee N centrales generadoras a lo largo de Chile, las cuales permiten abastecer adecuadamente la demanda energética del país. Cada una de las centrales mencionadas puede trabajar sin sufrir fallas durante un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\lambda}$ horas. Cuando ocurre una falla en una o más centrales entra en funciones un procedimiento de contingencia, el cual redistribuye la producción energética, permitiendo que el sistema opere satisfactoriamente.

Para hacer frente a las fallas, cada central cuenta con un equipo de personal especializado en reparación, el cual demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$ horas en restablecer la producción energética de la central afectada.

1. (2,5 ptos) Modele el número de centrales en reparación como una Cadena de Markov de tiempo continuo. Determine si existen probabilidades de estado estacionario justificando su respuesta. Plantee las ecuaciones necesarias para calcular las probabilidades estacionarias.
2. (0,5 ptos) En promedio ¿cuánto demora en ser reparada una central que falla y deja de operar?.
3. (1,5 ptos) Calcule el número de fallas por unidad de tiempo que afectan al sistema generador de energía.
4. (1,5 ptos) Usando la Fórmula de Little, calcule el número promedio de centrales en estado de falla.

Bonus (1,0 ptos) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar detenida en el largo plazo a una central en particular?

Observación: Las partes (c) y (d) pueden quedar expresadas en función de las probabilidades estacionarias, no así las partes (b) y el Bonus, que deben formularse en función de los parámetros del problema.

Pregunta 2

Una alumna del departamento se ha dado cuenta que tiene una lista interminable de amigos deseosos de pololear con ella, por lo que ni tonta ni perezosa, ha decidido tener 2 pololos simultáneamente, los que por confidencialidad llamaremos A y B.

Para ser justa en sus visitas ha determinado gastar un tiempo aleatorio, exponencialmente distribuido de tasa λ, con cada uno de ellos, de manera que si un instante está con A en un tiempo exponencialmente distribuido irá a visitar a B y viceversa. Todos los viajes pueden ser considerados instantáneos.

Por otra parte, sabe que mientras está con B el pololo A puede llamarla a su celular para que inmediatamente vaya a visitarlo, lo que ocurre según un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_A. Ante esta solicitud la alumna inventa su mejor excusa e interrumpe abruptamente su visita al pololo B para ir a reunirse con A.

La alumna sabe que si bien el pololo B es bastante tolerante no soportará más de tres interrupciones, consecutivas o no, por el inoportuno llamado del otro. Por esto, cada vez que se contabilizan tres interrupciones nuestra querida alumna procede a apagar el celular y a ser especialmente cariñosa la siguiente vez que visita al pololo B, demorándose en esta visita un tiempo exponencialmente distribuido de tasa λ_B ($\lambda_B > \lambda$). Esta visita "especial" permite anular todas las interrupciones que este ha tenido, por lo que al ir a reunirse con A vuelve a encender su celular.

1. (2,5 ptos) Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las condiciones para que exista estado estacionario y plantee las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias.

En el largo plazo y en función de las probabilidades de estado estacionario determine:

2. (1,0 ptos) ¿Cuál será el número esperado de llamadas del pololo A, por unidad de tiempo, que terminarán en el buzón de voz de nuestra alumna?.
3. (1,5 ptos) ¿Cuál será la fracción de las visitas de B que terminan interrumpidas por la llamada de A?.
4. (1,0 ptos) Si la alumna desea elegir λ_B para asegurarse que en promedio pasará la misma cantidad de tiempo con cada uno de sus dos pololos, ¿cuál será el procedimiento a seguir? (no haga cálculos, solo explique qué se debería hacer).

Bonus (1,0 ptos) Suponga ahora que si el pololo A realiza 3 llamados consecutivos sin recibir respuesta se aburrirá y abandonará a la alumna, la que no tendrá ningún problema en conseguir otro pololo de las mismas características para reemplazar a A apenas termine su visita al fiel pololo B. Modifique el modelo anterior para incluir esta nueva situación.

Pregunta 3

El taller mecánico de una prestigiosa marca de automóviles recibe clientes según un Proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. En `la entrada` del taller los clientes esperan que tanto sus datos como los del auto sean ingresados en el sistema de registros que maneja la empresa. Esta labor es realizada por un único empleado que demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu_1}$ [horas] en digitar los datos.

Un automóvil ya registrado es conducido hasta una `zona de diagnóstico`, donde espera para ser revisado por el supervisor del taller. El tiempo que demora éste en revisar un auto y determinar el procedimiento a seguir se distribuye exponencialmente con media $\frac{1}{\mu_2}$ [horas]. El supervisor sabe que una fracción r de los autos que revisa por primera vez deben ser conducidos hasta la `zona de mantención de rutina` mientras que el resto pasa a ser reparado por `mecánicos especializados`.

El área de mecánica especializada cuenta con dos empleados, cada uno de los cuales demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_3}$ [horas] en reparar un auto. Una fracción s de los autos reparados por el personal especializado, independiente de todo lo demás, es llevada directamente a la `zona de salida`, el resto debe entrar nuevamente al área de mecánica especializada por seguir presentando fallas.

Por su parte, cualquiera de los dos empleados asignados al área de mantención rutinaria tarda un tiempo distribuido exponencialmente de media $\frac{1}{\mu_4}$ [horas] en realizar la mantención de un automóvil. Además, se sabe que estos operadores envían a una fracción t de los autos que revisan a un nuevo diagnóstico por parte del supervisor, mientras que el resto es enviado a la zona de salida. En la segunda revisión, que al igual que la primera demora un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa μ_2, el auto con probabilidad e es enviado a la zona de mecánica especializada y con probabilidad $1-e$ es enviado a la zona de salida.

En la zona de salida existe una máquina de lavado, que permite atender a un automóvil a la vez, la cual demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu_5}$ [horas] en limpiar un auto, dejándolo listo para su entrega al cliente.

1. (2,5 ptos) Modele el sistema descrito como una red de colas, indicando a que tipo de sistema de espera (notación de Kendall) corresponde cada uno de los subsistema descritos. Determine las tasas efectivas para cada subsistema y las condiciones para que exista estado estacionario. Justifique su respuesta.
2. (1,0 ptos) En el largo plazo, ¿qué fracción de los autos reparados por mecánicos especializados ha sido revisado en la zona de mantención rutinaria?
3. (1,5 ptos) Suponga que la totalidad de los autos que son llevados al taller por una falla grave son conducidos a la zona de mecánica especializada luego del diagnóstico del supervisor. ¿Cuánto deberá esperar en promedio un cliente que lleva su auto por este tipo de problema?
4. (1,0 ptos) ¿Cuáles serían buenos indicadores de desempeño para este sistema?. Si el supervisor del taller no estuviera conforme con los índices de desempeño obtenidos para el sistema, qué tipo de medidas le sugeriría analizar.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.
  $X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \forall\, x \geq 0$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $\text{Var}(X) = \lambda$
  $X \rightsquigarrow \text{geomtrica}(p)$: $\Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k$ $E(X) = \frac{p}{1-p}$ $\text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$
- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.
- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.
  $M/M/1$
  $$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \Pi_0 = 1-\rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$
  $M/M/2$
  $$L = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2} \qquad \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$$