DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2003
Prof: P. Rey, A. Schilkrut.
P. Aux: J. Guajardo, P. Hernández, J.A. Muñoz.

CONTROL 3

21 de Noviembre, 2003

Problema 1

DonKingTicket, empresa encargada de la venta de entradas para el concierto de despedida de Pepe y los Markovianos, lo ha contratado a ud. para estudiar el actual sistema de venta de boletos.

Don King ha dispuesto de un único lugar para la venta, el cual cuenta con 2 servidores con colas independientes. La atención de cada uno de ellos, es una variable aleatoria de distribucióon exponencial de media $1/\mu$ [horas]. Los fanáticos llegan al local de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora]. Si en el momento que arriba un cliente la cantidad de personas en el sistema es igual a k, éste decide entrar con probabilidad q_k y en caso contrario se retira resignado a ver el evento por las pantallas de TBM. Cuando una persona decide ingresar, siempre elige la cola más corta y ante empates en el largo de las colas eligen equiprobablemente.

Una vez en el sistema, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que entra al local hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media $1/\beta$ [horas]. Consciente de lo anterior Don King ha dispuesto una pantalla gigante en la cual se revisan momentos históricos de la conocida banda. Dado lo anterior, una persona que está esperando en la cola y se agota su paciencia, con probabilidad p decidirá irse y en caso contrario renovará sus intenciones de seguir esperando.

Además los clientes que se encuentran al final de cada fila, se cambian instantáneamente a la cola del otro servidor si es que al cambiarse la cantidad de personas que quedan delante de él, es menor al de la cola en que se encuentra actualmente.

1. (3,0 ptos.) Modele el número de personas en cada subsistema, incluyendo los clientes en atención, como una cadena de Markov en tiempo continuo. No es necesario que dibuje toda la cadena, sino que puede indicar las transiciones para estados genéricos. ¿Cuál es la condición de régimen estacionario?
Indicación: Observe que la diferencia entre la cantidad de personas en cada subsistema nunca es mayor que 1.

2. (3,0 ptos.) Modele la CANTIDAD TOTAL de personas en el sistema como un proceso de Nacimiento y Muerte. ¿Cuál es la condición de régimen estacionario?

Problema 2

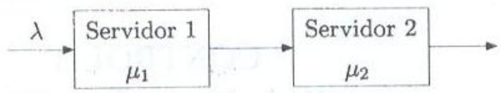
1. Considere un sistema M/M/1 con proceso de llegada de tasa λ y tiempos de atención con distribución exponencial de parámetro μ.

   a) (0,2 ptos.) ¿Cuál es la *condición de estacionariedad* de este sistema?

   b) (1,0 pto.) Suponiendo que el sistema cumple la condición de estacionariedad, calcule las probabilidades estacionarias en función de λ y μ.

   c) (1,0 pto.) Calcule el número promedio de entidades en el sistema y el tiempo esperado que pasa una entidad en el sistema, en régimen estacionario.

2. Considere un sistema de atención con dos servidores en *serie* (como se muestra en la figura):



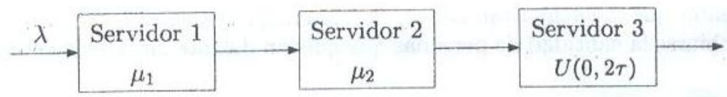
La atención funciona de la siguiente manera: Toda entidad que entra al sistema debe pasar primero por el Servidor 1 y luego por el Servidor 2, para posteriormente abandonar el sistema. Las entidades que llegan a los servidores y no pueden ser atendidas de inmediato, esperan formando una cola. No hay límite en la capacidad de entidades esperando antes de cada servidor.

Los tiempos de atención se distribuyen exponencialmente en ambos servidores, con medias $1/\mu_1$ y $1/\mu_2$, respectivamente. El proceso de llegada al sistema es un proceso de Poisson de tasa λ.

a) (1,5 ptos.) Modele el número de personas en el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo cuyos estados están definidos por el número de entidades en cada subsistema (servidor más cola de espera para ese servidor). Justifique por qué el sistema puede ser modelado como una cadena de Markov en tiempo continuo.

b) (1,3 ptos.) Proponga un sistema de ecuaciones que permitiría obtener las probabilidades estacionarias del sistema.

3. (1,0 pto.) Considere un sistema de tres servidores en *serie*: los dos primeros con tiempos de atención distribuídos exponencialmente con tasas μ_1 y μ_2, respectivamente. El tiempo de atención en el Servidor 3 se distribuye uniformemente en $[0, 2\tau]$, ver figura:



El proceso de llegada al sistema es un proceso de Poisson de tasa λ. ¿Cuál es el número promedio de entidades en el sistema en estado estacionario?

Pregunta 3

En un pueblo del sur de Chile, la unidad de cirugías de un centro asistencial atiende a sus pacientes tal como se indica a continuación. Los pacientes llegan al centro asistencial según un proceso de Poisson de tasa $\lambda\,[\frac{\text{pacientes}}{\text{hora}}]$. Dichos pacientes llegan a la recepción del recinto y son atendidos por alguna de las dos amables recepcionistas presentes en el lugar. Al final de la atención, que demora un tiempo exponencialmente distribuído de media $1/\mu_R$ [horas], los pacientes son derivados con probabilidad p hacia el box de algún doctor y con probabilidad q hacia la consulta del dentista. Los pacientes que no son enviados a ningún especialista se retiran del centro asistencial debido a que su dolencia no amerita atención médica.

Una vez derivados los pacientes hacia la zona de atención de los médicos, uno de los dos doctores que trabajan en el centro asistencial atiende a los pacientes. Cada consulta a los médicos dura un tiempo exponencialmente distribuído de media $1/\mu_M$ [horas].

Por otra parte, los pacientes que son derivados hacia la zona de atención odontológica, son atendidos por el único dentista con que cuenta el centro asistencial. Cada consulta odontológica dura un tiempo exponencialmente distribuído de media $1/\mu_D$ [horas].

Luego de la atención de cualquiera de los facultativos del centro (médicos o dentista), los pacientes son derivados al pabellón de cirugía para que el cirujano realice la intervención correspondiente (el cirujano también atiende problemas dentales graves).

La intervención quirúrgica tarda un tiempo exponencialmente distribuído de media $1/\mu_P$ [horas]. Luego de ella, una fracción s de los pacientes operados necesita volver a consultar a algún facultativo.

Dichos pacientes deben volver a la zona de recepción del centro asistencial para y comenzar todo el proceso de nuevo (considere que desde el punto de vista de las recepcionistas, un paciente que vuelve a consultarlas, lo hace de la misma forma que uno que llega por primera vez al recinto, es decir las probabilidades que sea derivado a un médico o dentista, los tiempos de atención, etc. son los mismos que los que enfrenta un paciente que ingresa al centro asistencial por primera vez; en particular, un paciente podría permanecer en el ciclo indefinidamente). Los pacientes que no necesitan volver a ser examinados se retiran completamente satisfechos del centro asistencial para continuar con sus labores habituales.

El director del hospital, como una forma de mejorar la calidad del servicio que se brinda en la sección de cirugías, le ha encargado a ud. un estudio de la situación actual. Para ello realice lo siguiente:

1. (2,0 ptos.) Modele la situación actual de la sección de cirugías del hospital como una red de colas.
2. (2,0 ptos.) Encuentre las tasas efectivas de entrada a cada uno de los subsistemas y plantee las condiciones para que exista estado estacionario.
3. Considerando que el hospital lleva mucho tiempo operando, en un momento cualquiera del día:
   a) (1,0 pto.) ¿Cuál es la cantidad de personas que en promedio se encuentran dentro del recinto?
   b) (1,0 pto.) ¿Cuánto demora en promedio un paciente en retirarse, desde que ingresó por primera vez al recinto asistencial?

Indicaciones Generales y Fórmulas

- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
- Algunas distribuciones

$$X \rightsquigarrow \mathrm{EXP}(\lambda): \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \;\forall x \geq 0, \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \rightsquigarrow \mathrm{U}(a,b): \quad f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p): \quad \Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^{k-1}, \qquad E(X) = \frac{1}{1-p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

- Algunas colas

Sistemas M/M/1

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Sistemas M/M/2

$$L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{2\mu}.$$

Sistemas M/G/1, con tasa de llegada λ

$$W_q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])}.$$

- Algunas series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \text{ si } |a| < 1.$$