Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Rafael Epstein, Pablo Rey, Denis Sauré.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A.Neely, D. Yung.

Control 3

17 de Junio, 2005

Problema 1

Considere un paradero de colectivos a los cuales llega gente a esperar transporte de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Suponga que la gente llega a este paradero durante las 24 horas del día y que el paradero es lo suficientemente grande para soportar cualquier largo de cola.

Por su parte los colectivos llegan al paradero de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa μ. Sin embargo, este paradero no es el paradero terminal del colectivo, por lo que probablemente los colectivos lleguen con pasajeros a nuestro paradero. Considere que con probabilidad p_k un colectivo llegará con k lugares disponibles ($k = 0, 1, 2, 3$). Considere que los colectivos toman un tiempo despreciable en recoger a los pasajeros en el paradero, y que si al llegar no encuentran pasajeros simplemente no se detendrán.

1. (1,0 pto.) Modele el estado de ocupación del paradero como una Cadena de Markov, plantee condiciones de estado estacionario y calcule las probabilidades estacionarias.

Un inspector municipal ha detectado irregularidades en el funcionamiento del paradero en cuestión, y asegura que en dicho paradero no pueden haber más de N personas simultáneamente esperando transporte. Así, ha decidido clausurar el paradero en el instante en que hayan N personas esperando un colectivo.

2. (2,5 ptos.) Entregue una expresión para el tiempo esperado que demora el inspector en clausurar el paradero, si cuando este llega a inspecionarlo el paradero lleva mucho tiempo funcionando.

Usted, que curiosamente vive por el vecindario, ha llegado al paradero en cuestión y nota que hay exactamente n personas antes que usted. Además, sabe que el viaje en colectivo hasta su casa demora exactamente T_c minutos y que caminar hasta su casa desde el paradero toma exactamente T_p minutos. Finalmente usted está consciente de que el inspector está esperando que se junten N personas para suspender el servicio, con lo que los colectivos dejarán de pasar por ese paradero, que es el único paradero en el camino a casa.

3. (2,5 ptos.) Plantee el problema que usted debe resolver para decidir, en cualquier instante del tiempo, si debe irse a casa caminando o seguir esperando el colectivo, con el objetivo de minimizar el tiempo esperado para llegar a su casa.

Problema 2

Los vecinos de un barrio capitalino están muy preocupados porque en la esquina donde se encuentran las calles A y B se están produciendo demasiados accidentes. Dada esta situación han solicitado a las autoridades que implementen un plan de control del tránsito para disminuir los siniestros en este sector.

Para ello se ha dispuesto que un carabinero controlará el tránsito en dicha esquina. Este carabinero tiene la capacidad de controlar el tránsito que circula por sólo una de las calles. Independientemente de cuál de ellas se trate, el carabinero permanecerá controlando la misma calle durante un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\varphi$ [horas], si no se registra ninguna infracción en esa calle durante ese tiempo y pasará a controlar la otra calle.

Si el carabinero detecta un infractor, lo detiene y emite un parte. En esta tarea, ocupa un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\lambda$ [horas] y durante este tiempo deja de controlar el tránsito. Luego de emitir el parte, el carabinero puede comunicarse con la central y reportar los últimos partes que ha emitido o bien, continuar controlando el tránsito.

La mitad de las veces que emite un parte realiza el reporte, lo que le lleva un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\delta$ [horas] durante el cual no puede controlar el tránsito. La mitad restante, sigue controlando el tránsito, eligiendo equiprobablemente la calle a vigilar.

Una vez que termina de realizar un reporte, continua controlando el tránsito, eligiendo equiprobablemente la calle que vigilará.

La llegada de infractores a la esquina por cualquiera de las dos calles puede ser modelado como un proceso de Poisson de tasa μ [infractores/hora]. Además, lo que sucede en una de las calles es independiente de lo que sucede en la otra. Considere que el carabinero siempre detecta las infracciones que se producen en la calle que está controlando y nunca las que se producen en una calle que no esté controlando en el momento de la infracción.

1. (1,5 ptos.) Justifique por qué las actividades que realiza el carabinero se pueden modelar como un cadena de Markov en tiempo continuo Plantee dicha cadena. Especifique claramente los estados y las tasas de transición.
2. (1,0 pto.) Considere la cadena propuesta en el punto anterior. ¿Esta cadena admite probabilidades estacionarias?

   En caso afirmativo, justifique. En caso contrario, plantee qué condiciones adicionales se deben satisfacer para que la cadena admita probabilidades estacionarias.
3. (1,0 pto.) Plantee un sistema de ecuaciones que permitan calcular las probabilidades estacionarias de la cadena del punto 1.
4. (1,5 ptos.) Suponga que el carabinero acaba de terminar de enviar un reporte. ¿Cuál es la probabilidad que en los proximos 15 minutos (1/4 hora), detecte *al menos* a un infractor?

A continuación considere que se cumplen las condiciones de estado estacionario y que las probilidades estacionarias de la cadena son conocidas.

5. (0,5 ptos.) En promedio, ¿cuántos partes emite el carabinero por hora?
6. (0,5 ptos.) Suponga que usted llega a la esquina en un momento t cualquiera en el “largo plazo”:
   - ¿Cuál es la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle A en ese instante t?
   - ¿Cuál es la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle A en el instante $t + 3$?

Problema 3

El poderoso hombre fuerte del software mundial, Bill King, está decidido a conquistar el mundo de los videojuegos. Después de varias reuniones con sus asesores de marketing, han decidido relanzar al mercado los antiguos clásicos. El principal lanzamiento se centrará en el rediseño del clásico juego MarioMoto ©.

Para hacer más atractivo el viejo clásico han decidido incorporar nuevos elementos en la dinámica del juego. Al principio, MarioMoto podrá comenzar a jugar con dos motocicletas. Podrá partir con una motocicleta violeta (V) y otra amarilla (A). La probabilidad de que MarioMoto comience con una de estas motos es p_k, $k \in \{V, A\}$ $(p_A + p_V = 1)$.

Una vez que MarioMoto inicia su travesía en una de las dos motos, comenzará a recorrer los diversos mundos de los Mario Bros. En su viaje, podrá abastecerse de energía para su motocicleta a medida que encuentra *barriles* con una substancia combustible. El número de barriles que aparecen en el juego puede modelarse como un Proceso de Poisson de tasa λ [barriles/minuto]. Adicionalmente, para agregar dificultad y emoción se ha determinado que la probabilidad de que un barril cualquiera le sirva a la motocicleta de color k es $p_k, k \in \{V, A\}$ [1]. Esto quiere decir que con probabilidad p_A un barril de substancia combustible le servirá a la motocicleta amarilla y con probabilidad p_V le servirá a la motocicleta violeta.

En el transcurso de su viaje, MarioMoto consumirá la substancia combustible que ha ido obteniendo a lo largo del juego. De esta forma, un barril de substancia combustible que sirve para la motocicleta de color k, será consumido

[1] La probabilidad de que un barril de combustible le sirva a la moto de color k es la misma de comenzar utilizando dicha moto p_k.

en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_k. Suponga que para efectos del juego, MarioMoto puede acumular en el estanque de su motito todos los barriles de combustibles que aparezcan [2].

Si en algún momento MarioMoto agota la substancia combustible de su motocicleta, perderá el juego y deberá reiniciar su travesía eligiendo una nueva moto. Los expertos, para incentivar largas horas de juego de los aficionados, han considerado que MarioMoto tendrá infinitas vidas.

Conscientes de su capacidad, los asesores le han pedido ayuda con el modelamiento y análisis del juego.

1. (1.5 ptos.) Modele la dinámica del juego como una cadena de Markov en tiempo continuo. Explicite los estados y muestre las tasas de transición entre ellos. Además, determine las condiciones que se deben cumplir para la existencia de estado estacionario y plantee las ecuaciones que le permiten obtener las probabilidades estacionarias.

2. (1,5 pto.) Sea E el conjunto de todos los estados posibles para esta cadena. Sea Q la matriz de tasas de transición y sus componentes q_{ij} $\forall\ i, j \in E$ definidos como:

   $q_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \nu_i \cdot p_{ij} & \sim \end{cases}$

   Donde ν_i es la tasa asociada al tiempo de permanencia en el estado E_i y p_{ij} la probabilidad de que el sistema evolucione a E_j desde E_i.

   Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias π_i $\forall\ i \in E$. Demuestre que $\forall\ A \subset E$ se cumple que:

   $$\sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A} \pi_j \cdot q_{jk} \quad = \quad \sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A} \pi_k \cdot q_{kj}$$

   Indicación: Comience su demostración a partir de las ecuaciones de flujo para cada uno de los estados.

3. (1 pto.) Utilizando el punto anterior resuelva en función de los parámetros las ecuaciones que permiten obtener las probabilidades estacionarias.

4. (1 pto.) Utilizando las probabilidades estacionarias calculadas en la parte anterior, determine cuántos barriles de combustible que tendrá MarioMoto, en promedio, en el largo plazo.

Los asesores han decidido hacer más atractivo el juego aumentando el número de motocicletas disponibles en un principio. Suponga que inicialmente existen K motocicletas de colores distintos. La probabilidad de que MarioMoto comience con la moto de color k es p_k tal que $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$.

Además, suponga que los barriles de substancia combustible siguen llegado según un Proceso de Poisson de tasa λ [barriles/minuto] y que la probabilidad de que un barril le sea útil a la motocicleta de color k es p_k. Por último, la motocicleta de color k consume barriles de combustible en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ_k.

5. (1 pto.) Extienda el modelo realizado en la parte 1 para esta nueva situación. Señale los estados necesarios y las condiciones que garanticen las existencia de probabilidades estacionarias. Encuentre además las ecuaciones que permitan obtener las probabilidades estacionarias (no las resuelva).

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.
  $X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda)$: $\quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \forall\, x \geq 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$: $\quad \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$
  $X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p)$: $\quad \Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k \quad E(X) = \frac{p}{1-p} \quad \text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$
- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.

[2] Suponga que los barriles de substancia combustible se consumen en el orden en que se recolectan