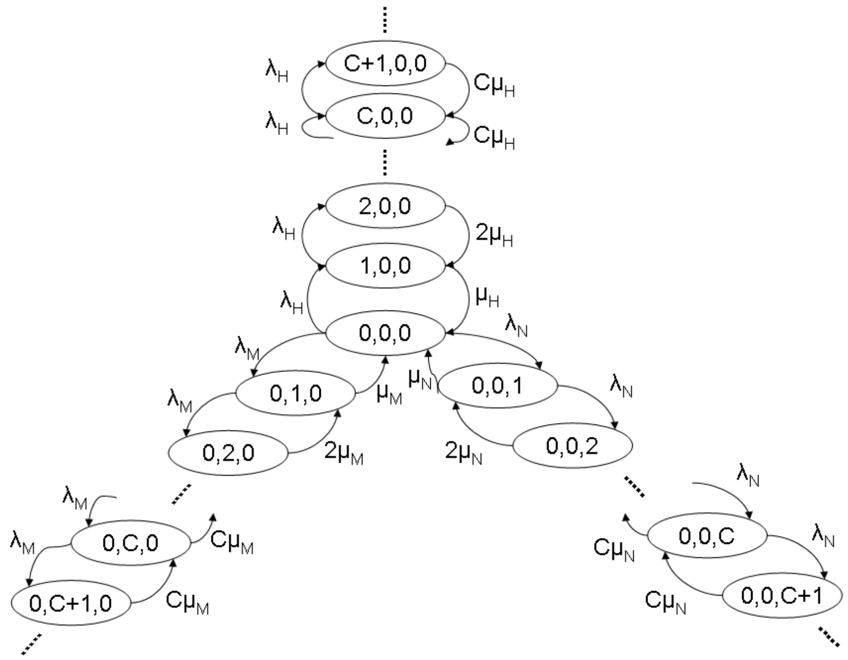
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Otoño 2004
Profs: P. Rey, D. Sauré A. Schilkrut.
P. Auxs: C. Berner, J. Guajardo, M. Guajardo, P. Hernández.

SOLUCIÓN CONTROL 3
Viernes 18 de Junio, 2004

Problema 1

1. Para representar el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo debemos definir un estado como un vector de 3 componentes donde la primera componente se refiere al número de hombres que se encuentran en el sistema, la segunda se refiere al número de mujeres y la tercera al número de niños. Claramente existe una gran cantidad de estados que resultan ser inalcansables. Dada la dinámica del sistema la cadena toma la siguiente forma.



   Vemos que una vez que el sistema deja de estar desocupado este adopta la configuración de una cadena del tipo $M/M/C/\infty$. Es tan solo en el estado $0,0,0$ donde se pueden producir desviaciones a este comportamiento.

2. Dado que cada vez que hay personas en cola el sistema se comporta como una $M/M/C/\infty$ es fácil ver que la condición de estado estacionario será la condición de cada uno de los sistemas $M/M/C/\infty$, es decir la condición pasa por no permitir que ninguna de estas tres colas "explote". Entonces la condición es:

$$\frac{\lambda_H}{C \cdot \mu_H} < 1 \qquad \frac{\lambda_M}{C \cdot \mu_M} < 1 \qquad \frac{\lambda_N}{C \cdot \mu_N} < 1$$

   La condición formal debe nacer de la posibilidad de calcular el vector de probabilidades estacionarias. Veremos esto en el siguiente punto.

3. Dado que la cadena es reversible (tiene forma de arbol) cumplirá con las ecuaciones de balance detalladas. Esto implica que:

$$\pi_{(i,0,0)} \cdot \lambda_H = \pi_{(i+1,0,0)} \cdot \mu_H \qquad \pi_{(0,i,0)} \cdot \lambda_M = \pi_{(0,i+1,0)} \cdot \mu_M \qquad \pi_{(0,0,i)} \cdot \lambda_N = \pi_{(0,0,i+1)} \cdot \mu_N$$

Es decir:

$$\pi_{(i+1,0,0)} = \pi_{(i,0,0)} \cdot \frac{\lambda_H}{\mu_H} \qquad \pi_{(0,i+1,0)} = \pi_{(0,i,0)} \cdot \frac{\lambda_M}{\mu_M} \qquad \pi_{(0,0,i+1)} = \pi_{(0,0,i)} \cdot \frac{\lambda_N}{\mu_N}$$

Es decir, podemos expresar la probabilidad estacionaria de cualquier estado en función del estado en el cual se encuentra una persona menos en el sistema. Si aplicamos estos resultados para i=1 veremos que podemos expresar las probabilidades de los estados $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ en función de la probabilidad estacionaria de $(0,0,0)$. Aplicando esto recursivamente obtenemos el resultado deseado. En particular tendremos que:

$$\pi_{(i,0,0)} = \begin{cases} \frac{\lambda_H^i}{\mu_H^i i!} \cdot \pi_{(0,0,0)} & si\ i \leq C \\ \frac{\lambda_H^i}{\mu_H^i C! C^{i-C}} \cdot \pi_{(0,0,0)} & \sim \end{cases}$$

El caso de las mujeres y los niños es análogo.

Además, para que el vector π sea efectivamente una distribución de probabilidades tenemos que:

$$\pi_{(0,0,0)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{C} \left(\frac{\lambda_H^i}{\mu_H^i i!} + \frac{\lambda_M^i}{\mu_M^i i!} + \frac{\lambda_N^i}{\mu_N^i i!} \right) + \frac{1}{C!} \cdot \sum_{i=C+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_H^i}{\mu_H^i C^{i-C}} + \frac{\lambda_M^i}{\mu_M^i C^{i-C}} + \frac{\lambda_N^i}{\mu_N^i C^{i-C}} \right)}$$

Aquí vemos que las condiciones de estacionaridad nacen de la necesidad de acotar el denominador de la expresión anterior.

4. Con un poco de algebra vemos que la probabilidad que un niño que ingrese al sistema lo haga con i personas antes de él es simplemente $\frac{\pi_{(0,0,i)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(0,0,k)}}$ (debido a la tasa constante de llegada de niños y contando casos probables versus casos totales). Ahora, si un niño llega y delante de él hay i personas, en terminos esperados tendrá que esperar el siguiente tiempo:

$$E[T|\text{i personas}] = \begin{cases} \frac{1}{\mu_N} & si\ i < C \\ \frac{1}{\mu_N} + \frac{i-C+1}{C \cdot \mu_N} & \sim \end{cases}$$

Con este resultado es fácil obtener el resultado pedido.

$$E[T] = \sum_{i=0}^{\infty} E[T|\text{i personas}] \cdot \frac{\pi_{(0,0,i)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(0,0,k)}}$$

Es posible realizar este calculo si se aplica la formula de Little sobre el sistema compuesto solo por la cola de niños, es decir sobre una $M/M/C/\infty$ de parámetros λ_N y μ_N. Sin embargo debemos notar que para esto debemos considerar las probabilidades estacionarias de la cola modificada y no las obtenidas en el punto anterior. Esto se debe a que las probabilidades estacionarias a utilizar para el calculo de medidas como el largo promedio de la cola deben encontrarse normalizadas, lo que no ocurriría si se utilizan las prob. originales. La razón acerca de por que es posible realizar este procedimiento es que la razón entre un par de la probabilidades de la cadena original se mantiene en la cadena modificada.

Problema 2

1. Para que un pasajero quiera abordar un tren tipo 2, su destino debe ser entre la estación Moneda y las Rejas, lo cual ocurre con probabilidad p. Luego:

$$\beta_{i,k} = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \qquad \forall\ 0 \leq i \leq k$$

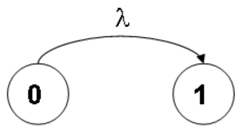
   Además:

$$\beta_{i,k}^{+} = \sum_{m=i}^{k} \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m} \qquad \forall\ 0 \leq i \leq k$$

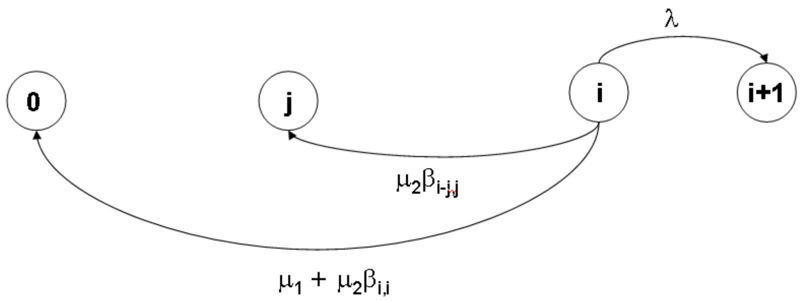
2. A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación definida en la parte 1.

   Para modelar la cantidad de personas en la estación como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 3 casos:

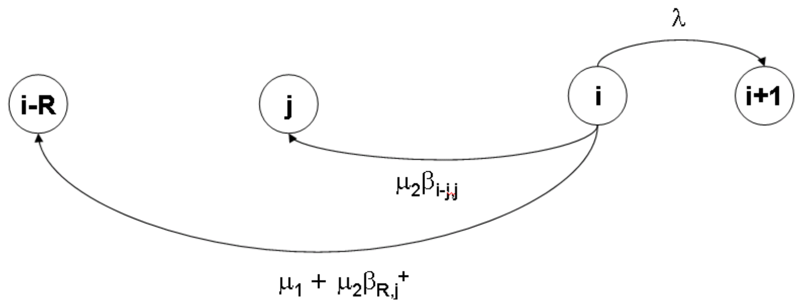
   Caso 1: $i = 0$



   Caso 2: $i \leq R$, $0 \leq j \leq i$.



Caso 3: $R < i$, $i - R < j \leq i$.



3. *a*) La tasa efectiva de arribo de pasajeros a los trenes está dada por:

$$\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{R-1} \pi_i \cdot i \cdot \mu_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\text{mín}(R-1,i)} \pi_i \cdot j \cdot (\mu_2 \beta_{j,i}) + \sum_{i=R}^{\infty} \pi_i \cdot R \cdot (\mu_1 + \mu_2 \beta_{R,i}^{+})$$

Dado que existe régimen estacionario, la tasa efectiva de salida de pasajeros de la estación es igual a la de entrada, por lo que un resultado equivalente al anterior y más directo de obtener decir directamente que la tasa pedida es igual a λ.

b) Podemos calcular la cantidad promedio de personas en el sistema y luego usando Little se obtiene el tiempo de espera. Esto es:

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i \Longrightarrow W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i}{\lambda}$$

c) La cantidad de trenes que salen llenos en una hora está dado por:

$$E[\text{trenes llenos}] = \pi_R(\mu_1 + \mu_2\beta_{R,R}) + \sum_{i>R}^{\infty} \pi_i(\mu_1 + \mu_2\beta_{R,i}^{+})$$

Problema 3

1. Para esta primera parte debemos obtener el tiempo de espera de las tres configuraciones:

- Política A: Este sistema se trata de una cola M/M/2 con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$. Para dicho sistema se tiene que:

$$L_A = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \qquad W_A = \frac{2\rho}{1-\rho^2} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

- Política B: Corresponde a una M/M/1 con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$. Luego:

$$L_B = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W_B = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

- Política B: Este caso corresponde a dos colas M/M/1 con $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$ cada una. Para ver el tiempo promedio de los clientes en el sistema, nos centramos en una de ellas:

$$L_C = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad W_C = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{2}{\lambda}$$

De lo anterior se tiene que:

$$W_A = \frac{1}{1+\rho} W_C \qquad W_C = 2W_B \qquad W_A = \frac{2}{1+\rho} W_B$$

De lo que se concluye que:

$$W_C > W_A > W_B$$

Luego la política más eficiente es la Configuración B.

2. En esto punto, basta con notar que lo propuesto por el consultor es equivalente en términos de medidas de efectividad a la política A. Aunque puede ser que los clientes se atiendan en otro orden las configuraciones son equivalentes. Luego la razón la tiene el Gerente porque ya se mostró que la política B es mejor que la A.

Dudas y/o Consultas:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl