DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2003
Prof: P. Rey, A. Schilkrut.
P. Aux: J. Guajardo, P. Hernández, J.A. Muñoz.

PAUTA CONTROL 3
21 de Noviembre, 2003

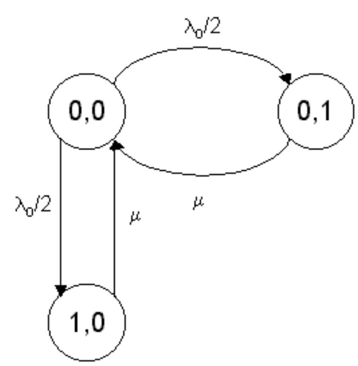
Problema 1

Para simplificar la notación, definimos $\lambda_k = \lambda \cdot q_k$

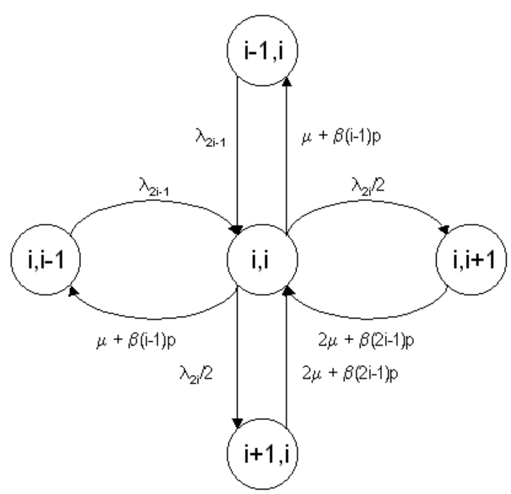
1. A continuación se modela la situación descrita utilizando la notación recién definida.

   Para modelar el sistema descrito usando pares ordenados como una cadena de Markov en tiempo continuo, basta con determinar las tasas de transición para los siguientes 2 casos:

   Caso 1:



   Caso 2: $i > 0$.



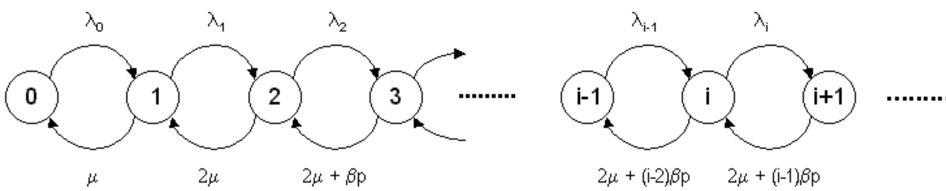
Para determinar la condición de régimen estacionario debemos fijarnos en un estado genérico (i,i) con $i > 0$.

La condición de régimen estacionario es que $\exists i^*$ tal que $\forall i > i^*$ se cumpla que:

$$\lambda_i \leq (2\mu + 2\beta(i-1)p)$$

Observando la espresión anterior nos damos cuenta de que la tasa de entrada está acotada por λ, mientras que la tasa de salida es creciente con el número de personas en el sistema por lo que **SIEMPRE** existen probabilidades estacionarias.

2. El proceso de Nacimineto y Muerte queda como sigue:

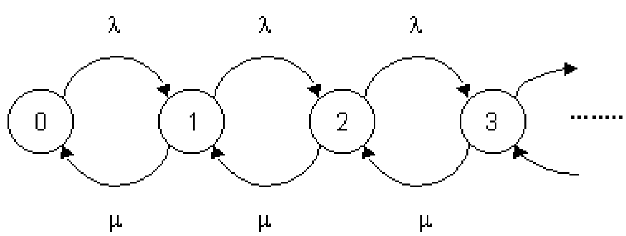


Dado que la situación modelada es la misma que en la parte 1 el argumento para la existencia de probabilidades estacionarias es la misma, es decir, **SIEMPRE** existen probabilidades estacionarias.

Problema 2

1. *a*) La condición de estacionariedad de este sistema es $\lambda < \mu$ (o bien, $\rho < 1$ si se define $\rho = \lambda/\mu$).

   b) El sistema queda como sigue:



Y las ecuaciones para calcular las probabilidades estacionarias, se calculan como sigue:

$$\pi_i = \prod_{l=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda_l}{\mu_{l+1}} \right) \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0 = \rho^i \pi_0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1\,. \tag{2}$$

Sustituyendo en (2), según (1) tenemos que

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \pi_0 = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \pi_0 \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

y por lo tanto

$$\pi_i = \rho^i(1-\rho)\,, \text{ para } i \geq 0\,.$$

c) Para calcular el número promedio de entidades en el sistema (L) , se tiene que:

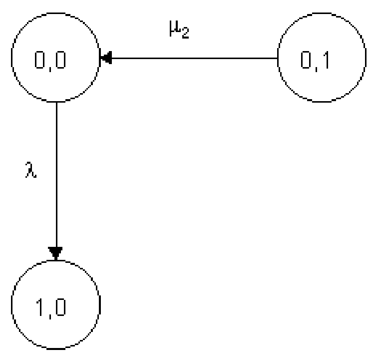
$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)}\,.$$

Para calcular el tiempo esperado que pasa una entidad en el sistema, en estado estacionario, aplicamos Little:

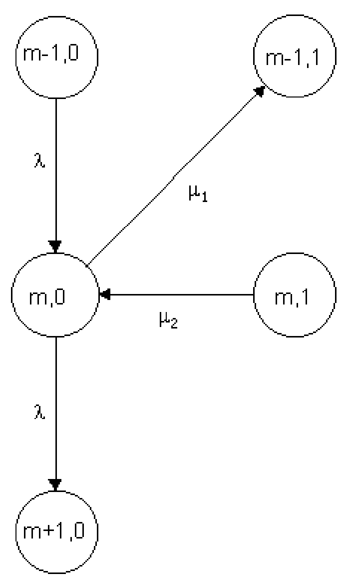
$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{(1-\rho)}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu-\lambda}\,.$$

2. *a*) La cadena de Markov que resulta tiene estados que se pueden clasificar en cuatro grupos.

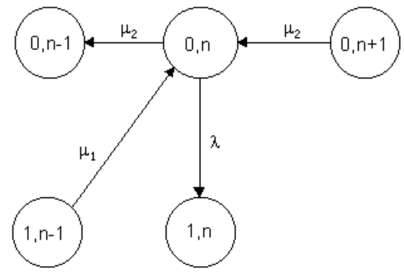
1) Caso $(0,0)$:



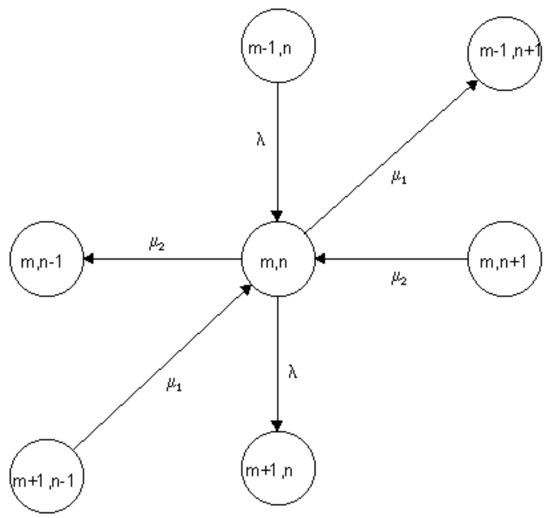
2) Caso $(m,0)$, $m \neq 0$:



3) Caso $(0, n)$, $n \neq 0$:



4) Caso (m, n), $m, n \neq 0$:



El sistema se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo continuo ya que:

- los tiempos de permanencia en cada estado se distribuyen exponencialmente;
- las tasas de transición sólo dependen del estado actual y del estado al que se va.

b) Denotando por $\pi_{m,n}$ la probabilidad estacionaria asociada al estado (m, n), $m, n \geq 0$ las ecuaciones que deben satisfacerse son:

1) Caso $(0, 0)$:

$$\lambda \pi_{0,0} = \mu_2 \pi_{0,1} \, ,$$

2) Caso $(m, 0)$, $m \neq 0$:

$$(\lambda + \mu_1)\pi_{m,0} = \lambda \pi_{m-1,0} + \mu_2 \pi_{m,1} \, ,$$

3) Caso $(0, n)$, $n \neq 0$:

$$(\lambda + \mu_2)\pi_{0,n} = \mu_1 \pi_{1,n-1} + \mu_2 \pi_{0,n+1} \, ,$$

4) Caso (m, n), $m, n \neq 0$:

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi_{m,n} = \lambda \pi_{m-1,n} + \mu_1 \pi_{m+1,n-1} + \mu_2 \pi_{m,n+1} \, ,$$

5) Sumatoria igual a UNO:

$$\sum_{m,n \geq 0} \pi_{m,n} = 1 \, .$$

3. Para calcular el número promedio de personas en el sistema completo, lo dividimos en partes:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \,,$$

donde L_j es el número promedio de personas en el subsistema correspondiente al j-ésimo servidor ($j = 1, 2, 3$).

a) Los subsistemas correspondientes al primer y segundo servidor son colas $M/M/1$, por lo tanto, para $j = 1, 2$ se tiene que:

$$L_j = \frac{\rho_j}{1-\rho_j}\,, \qquad \text{donde } \rho_j = \frac{\lambda}{\mu_j}\,.$$

b) Para el tercer servidor, calculamos $W_3 = W_q + W_s$ y después aplicamos Little.

- W_q: El subsistema que tenemos es una cola $M/G/1$ (por el Teorema de Burke, el proceso de entrada al tercer servidor es un proceso de Poisson de tasa λ), por lo tanto

$$W_q = \frac{\lambda[S^2]}{2(1-\lambda[S])} = \frac{\lambda \cdot (4/3)\tau^2}{2(1-\lambda\tau)} = \frac{2\lambda\tau^2}{3(1-\lambda\tau)}\,,$$

donde S a la variable aleatoria que representa al tiempo de servicio.
Observación. Para este cálculo fue necesario calcular $[S^2]$. Puede ser obtenido, a partir de la varianza de la siguiente manera:

$$\frac{\tau^2}{3} = \frac{(2\tau)^2}{12} = \mathrm{Var}(S) = [S^2] - ([S])^2 = [S^2] - \tau^2$$

y por lo tanto $[S^2] = (4/3)\tau^2$.

- W_s: El tiempo medio de servicio es simplemente la media de una variable aleatoria $U(0, 2\tau)$, es decir: $W_s = \tau$.
- L_3: De los resultados anteriores concluimos que

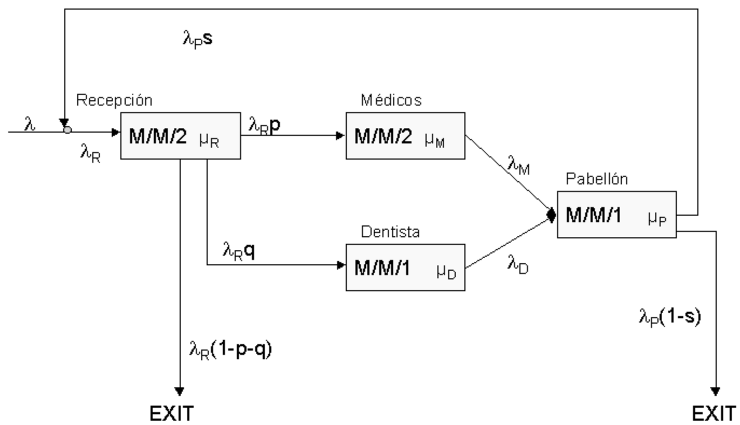
$$W_3 = W_q + W_s = \frac{2\lambda\tau^2}{3(1-\lambda\tau)} + \tau$$

y por lo tanto (por Little)

$$L_3 = \lambda W_3 = \lambda\left(\frac{2\lambda\tau^2}{3(1-\lambda\tau)} + \tau\right)\,.$$

Problema 3

1. El modelo queda como sigue:



2. Las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Recepción	λ_R	$\frac{\lambda}{1-s(p+q)}$
Médicos	λ_M	$\frac{\lambda p}{1-s(p+q)}$
Dentistas	λ_D	$\frac{\lambda q}{1-s(p+q)}$
Pabellón	λ_P	$\frac{\lambda(p+q)}{1-s(p+q)}$

Y las condiciones de Régimen Estacionario:

Sistema	Condición
Recepción	$\frac{\lambda_R}{\mu_R} < 1$
Médicos	$\frac{\lambda_M}{2\mu_M} < 1$
Dentistas	$\frac{\lambda_D}{2\mu_D} < 1$
Pabellón	$\frac{\lambda_P}{\mu_P} < 1$

3. En el Largo Plazo se tiene que:

   a) La cantidad promedio de entidades en el sistema está dado por:

$$L_T = L_R + L_M + L_D + L_P = \frac{2\rho_R}{1-\rho_R^2} + \frac{2\rho_M}{1-\rho_M^2} + \frac{\rho_D}{1-\rho_D} + \frac{\rho_P}{1-\rho_P}$$

   donde:

$$\rho_R = \frac{\lambda_R}{\mu_R} \qquad \rho_M = \frac{\lambda_M}{2\mu_M} \qquad \rho_D = \frac{\lambda_D}{2\mu_D} \qquad \rho_P = \frac{\lambda_P}{\mu_P}$$

b) Por otro lado el tiempo promedio en el sistema está dado por:

$$W_T = \frac{L_T}{\lambda}$$

Dudas, Consultas y/o Errores
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl