Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Antoine Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

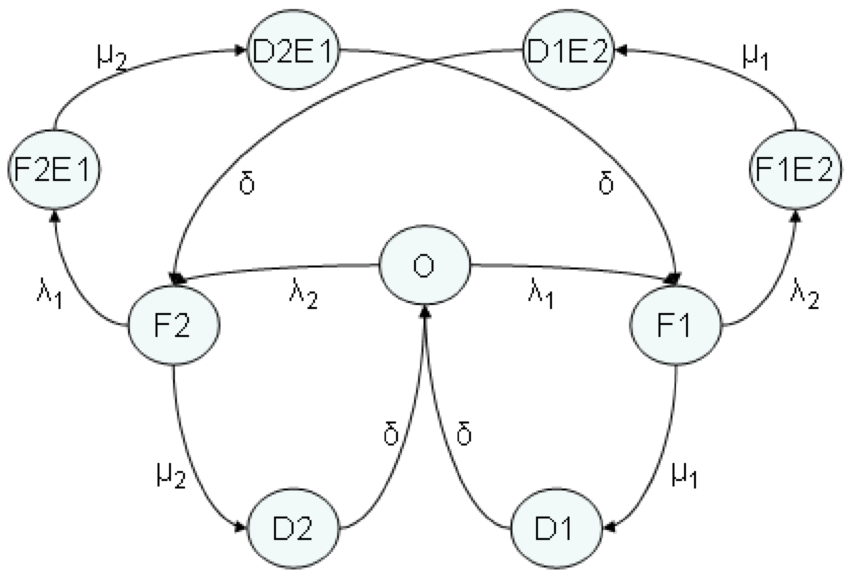
Pauta Control 3 IN44A, Viernes 20 de Junio del 2003

Problema 1

1. Existen varias formas de modelar la cadena Escogeremos un cadena de 9 estados, ya que facilitara responder las preguntas formuladas a partir del modelo. Los estados de la cadena son los siguientes:

O	:	Ocioso, espera por llamadas.
Fi	:	Sastre fabricando el traje cliente i, no existen pedidos pendientes
FiEj	:	Sastre fabricando el traje para el cliente i, existe un pedido pendiente del cliente j
Di	:	Sastre descansa hasta que venga el cliente i, no existen pedidos pendientes
DiEj	:	Sastre descansa hasta que venga el cliente i, existe un pedido pendiente del cliente j

Así, la cadena toma la siguiente forma:



Estamos frente a una cadena finita, por lo que aseguramos la existencia de probabilidades estacionarias.

2. Los estados donde se fabrica el traje para el cliente 1 son $F1$ y $F1E2$. Los estados donde se fabrica un traje son $F2$ y $F2E1$, F_1 y $F1E2$. De esto vemos que la prob. de estar trabajando en el traje 1 es:

$$\frac{\pi_{F1} + \pi_{F1E2}}{\pi_{F1} + \pi_{F2} + \pi_{F1E2} + \pi_{F2E1}}$$

3. Para calcular la fracción de llamadas perdidas seguimos los pasos dados en el enunciado:

   a) Los únicos estados donde podemos perder llamados son los Di, dado que descanso y el cliente j sigue llamando. Así:

$$E[\text{Llamadas perdidas}] = \lambda_1 \cdot \pi_{D_2} + \lambda_2 \cdot \pi_{D_1}$$

b) Ahora identificamos los estados desde donde se producen llamados:

$$E[\text{Llamadas realizadas}] = \lambda_1 \cdot \pi_{D_2} + \lambda_2 \cdot \pi_{D_1} + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \pi_o + \lambda_2 \cdot \pi_{F1} + \lambda_1 \cdot \pi_{F2}$$

c) Ahora solo dividimos el resultado de la parte a por el resultado de la parte b.

4. Supondremos que actualmente se esta trabajando en el traje 1 y no hay pedidos pendientes (en este caso hay solo 1 traje 1 consecutivo). Sea N el número de trajes 1 fabricados en forma consecutiva. Entonces:

$$\begin{aligned}
E[N] &= E[N|\text{Paso a F1E2}] \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + E[N|\text{Paso a D1}] \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \\
&= 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + E[N|\text{Paso a D1}|\text{Paso a O}] \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \\
&= 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + (E[N|\text{Paso a D1}|\text{Paso a O}|\text{Paso a F1}] \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&\quad + E[N|\text{Paso a D1}|\text{Paso a O}|\text{Paso a F2}] \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}) \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1} \\
&= 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_1} + ((E[N] + 1) \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&\quad + 1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}) \cdot \frac{\mu_1}{\lambda_2 + \mu_1}
\end{aligned}$$

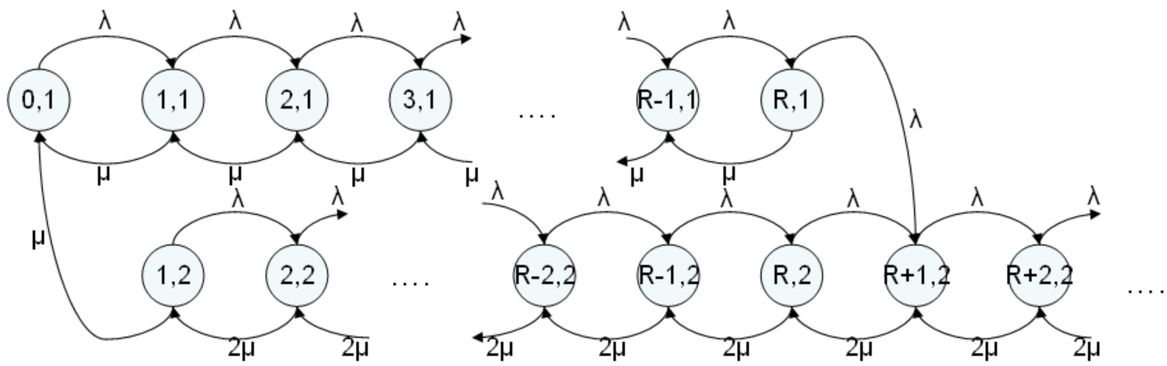
Entonces:

$$E[N] = \frac{1}{1 - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

Problema 2

1. No podemos modelar tan solo el número de personas en el sistema, puesto para un mismo número de entidades en el sistema podemos tener un distinto número de personas atendiendo. Esto es relevante dado que determina la tasa de atención del sistema. Entonces necesito saber cuantos cajeros se encuentran operando.

2. Modelamos los estados como pares ordenados que me indican cuanta gente hay en el sistema y cuantas personas se encuentran atendiendo a los clientes. La cadena es la siguiente:



3. La condición de estado estacionario es la misma de una cola M/M/2, $\frac{\lambda}{2\mu} < 1$. Las ecuaciones que permiten calcular las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_{0,1} \cdot \lambda &= \pi_{1,1} \cdot \mu + \pi_{1,2} \cdot \mu \\
\pi_{i,1} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{i+1,1} \cdot \mu + \pi_{i-1,1} \cdot \lambda \\
\pi_{R,1} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{R-1,1} \cdot \lambda \\
\pi_{R+1,2} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{R,1} \cdot \lambda + \pi_{R-1,2} \cdot \lambda + \pi_{R+1,2} \cdot 2\mu \\
\pi_{i,2} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{i+1,2} \cdot 2\mu + \pi_{i-1,2} \cdot \lambda \\
\pi_{1,2} \cdot (\lambda + 2\mu) &= \pi_{2,2} \cdot 2\mu \\
\sum \pi_{i,j} &= 1
\end{aligned}$$

Donde las ecuaciones genéricas se aplican a los estados no listados en forma individual.

4. Don Güilly se encuentra atendiendo en todos los estados donde hay dos cajeros. interpretando las probabilidades estacionarias como la fracción de tiempo que (en el largo plazo) el sistema se encuentra en un estado tendremos que:

$$E[\,\%\ \text{Tiempo atendiendo}] = \sum_i \pi_{i,2}$$

5. Claramente cuando hay dos cajeros, y dada la pérdida de memoria de la distribución exponencial, la probabilidad de que me atienda el guardia es la misma probabilidad que me atienda la cajera. Entonces:

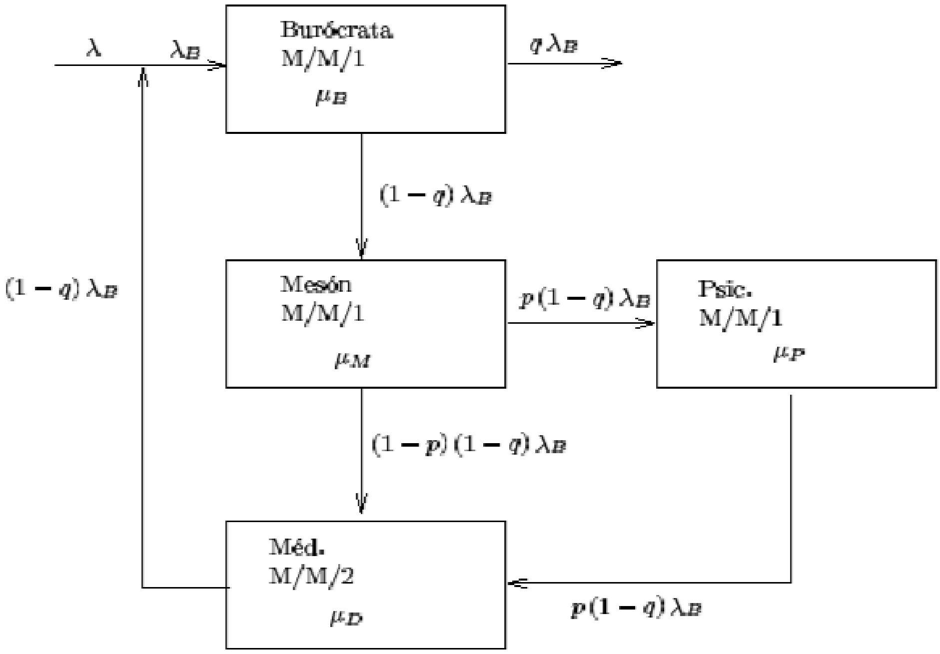
$$P[\text{Atiende el Guardia}] = \frac{1}{2}$$

6. Cuando el sistema se encuentra en el estado $(i, 2)$ con $i > 1$ las personas atendidas por el cajero salen del banco con tasa μ. Cuando el estado es el $(1, 2)$ con prob $\frac{1}{2}$ los clientes son atendidos por el guardia. Filtrando el proceso de salida de clientes vemos que los atendidos por el guardia salen con tasa $\frac{1}{2}\mu$. Entonces:

$$E[\text{Clientes atendidos por el guardia}] = \mu \cdot (\frac{1}{2} \cdot \pi_{1,2} + \sum_{i>1} \pi_{i,2})$$

Problema 3

1. El servicio de entrega de certificados puede ser modelado con la siguiente red de colas:



2. Llamando λ_B a la tasa efectiva de entrada de entidades en el sistema del burócrata se tiene que:

$$\lambda_B = \lambda + (1-q)\lambda_B$$

y por lo tanto, $\lambda_B = \lambda/q$. Otra forma de deducir esto es considerar que las tasas de entrada y salida del sistema completo, en regimen estacionario, tienen que ser iguales. Por lo tanto, $\lambda = q\lambda_B$.

Con este valor podemos calcular

- $\lambda_M = (1-q)\,\lambda_B = \frac{1-q}{q}\,\lambda$
- $\lambda_P = p\,\lambda_M = \frac{p\,(1-q)}{q}\,\lambda$
- $\lambda_D = (1-p)\,\lambda_M = \frac{(1-p)(1-q)}{q}\,\lambda$

Las condiciones para alcanzar el estado estacionario son: $\lambda_i/\mu_i < 1$ para $i \in \{B, M, P\}$ y $\lambda_D/(2\mu_D) < 1$. O equivalentemente, $\lambda_i < \mu_i$ para $i \in \{B, M, P\}$ y $\lambda_D < 2\mu_D$.

3. Para calcular el número promedio de personas en el sistema completo, calculamos el número promedio de personas en cada sistema y luego los sumamos:

$$\begin{aligned}
L &= L_B + L_M + L_P + L_D \\
&= \frac{\lambda}{q\,\mu_B - \lambda} + \frac{(1-q)\,\lambda}{q\,\mu_B + (q-1)\,\lambda} + \frac{p\,(1-q)\,\lambda}{q\,\mu_B + p\,(q-1)\,\lambda} + \frac{4\,q\,(1-p)\,(1-q)\,\lambda\,\mu_D}{4\,q^2\mu_B - (1-p)^2(1-q)^2\lambda^2} \\
&= \lambda\left(\frac{1}{q\,\mu_B - \lambda} + \frac{(1-q)}{q\,\mu_B + (q-1)\,\lambda} + \frac{p\,(1-q)}{q\,\mu_B + p\,(q-1)\,\lambda} + \frac{4\,q\,(1-p)\,(1-q)\,\lambda\,\mu_D}{4\,q^2\mu_B - (1-p)^2(1-q)^2\lambda^2}\right)
\end{aligned}$$

donde el número promedio de personas en cada sistema se obtiene aplicando las fórmulas para colas M/M/1 y M/M/2 utilizando las tasas efectivas de entrada a cada sistema:

- $L_B = \dfrac{\rho_B}{1-\rho_B} = \dfrac{\lambda_B}{\mu_B - \lambda_B} = \dfrac{\lambda}{q\,\mu_B - \lambda}$;
- $L_M = \dfrac{\rho_M}{1-\rho_M} = \dfrac{\lambda_M}{\mu_M - \lambda_M} = \dfrac{(1-q)\,\lambda}{q\,\mu_B + (q-1)\,\lambda}$;
- $L_P = \dfrac{\rho_P}{1-\rho_P} = \dfrac{\lambda_P}{\mu_P - \lambda_P} = \dfrac{p\,(1-q)\,\lambda}{q\,\mu_B + p\,(q-1)\,\lambda}$;
- $L_D = \dfrac{2\,\rho_D}{1-\rho_D^2} = \dfrac{4\,\lambda_D\,\mu_D}{4\,\mu_D^2 - \lambda_B^2} = \dfrac{4\,q\,(1-p)\,(1-q)\,\lambda\,\mu_D}{4\,q^2\mu_B - (1-p)^2(1-q)^2\lambda^2}$;

4. Considerando el sistema como un todo, aplicamos la fórmula de Little con el valor de L calculado en el punto anterior y con la tasa de entrada al sistema, λ:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{q\,\mu_B - \lambda} + \frac{(1-q)}{q\,\mu_B + (q-1)\,\lambda} + \frac{p\,(1-q)}{q\,\mu_B + p\,(q-1)\,\lambda} + \frac{4\,q\,(1-p)\,(1-q)\,\lambda\,\mu_D}{4\,q^2\mu_B - (1-p)^2(1-q)^2\lambda^2}$$

`Dudas, consultas y comentarios a`
`dsaure@dii.uchile.cl`