IN44A Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Aux: S. Astroza, J. Gacitúa, R. Lagos, Ch. Thraves

Pauta Control 3

Jueves 18 de Junio de 2009

Pregunta 1

Sea $\{X_t, t = 1, 2, ..\}$ Cadena de Markov que representa la demanda diaria en el balneario. El conjunto de estados será $E = \{A, N, B\}$ y ma matriz de transiciones P será la que se muestra en el enunciado. De acuedo a la notación de cadenas de markov con beneficios, buscamos $V_A(5)$, que cumple la fórmula:

$$V_A(5) = 5g + W_A - (P^5 W)_A$$

Por calcular π, g, r, W,

$$\begin{array}{rcl} \pi^T & = & \pi^T \cdot P \\ \sum_{i \in E} \pi_i & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 0{,}324 \\ 0{,}434 \\ 0{,}243 \end{pmatrix}$$

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix}; \ g = \pi^T \cdot \hat{r} \Rightarrow g = 989,189$$

Calculando W, con $W + ge = \hat{r} + PW$:

$$\begin{pmatrix} W_A \\ W_N \\ W_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 989,189 \\ 989,189 \\ 989,189 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0,3W_A & 0,5W_N & 0,2W_B \\ 0,3W_A & 0,4W_N & 0,3W_B \\ 0,4W_A & 0,4W_N & 0,2W_B \end{bmatrix}$$

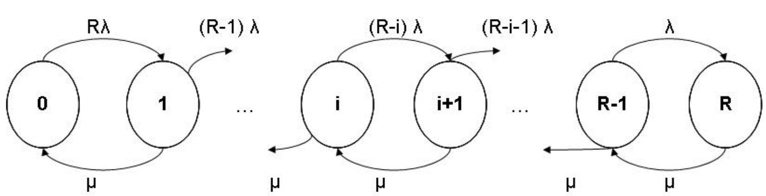
$W_A = 0 \Rightarrow$

$$W = \begin{bmatrix} 0 \\ -522,544 \\ -747,758 \end{bmatrix}$$

$$V_A(5) = 5 \cdot 989,189 + 0 + (0,434 \cdot 522,544 + 0,243 \cdot 747,758) \Rightarrow V_A(5) = 5354,434$$

Pregunta 2

1. Se plantea una cola $M/M/1/R/R$, donde R es la cantidad de repartidores que se contratarán, μ es la tasa de atención y cada entidad llega a tasa λ. En otras palabras, tenemos un proceso de nacimiento y muerte como la figura:



El problema a resolver es

$$\begin{array}{cl} \min\limits_{\substack{R \in N \\ \mu \geq 0}} & \bar{\lambda} = \mu(1-\pi_0) \end{array}$$

s.a.

$$\begin{aligned} \pi_0^{-1} &= \sum_{i=0}^{R} \binom{R}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{i!} \\ aR + c\mu &\leq B \end{aligned}$$

2. Para plantear el problema en una variable basta con considerar que la restricción presupuestaria es activa en el óptimo. Se cumplirá entonces $R = \left\lfloor \frac{B-c\mu}{a} \right\rfloor$. Aplicando esta relación en el modelo anterior, el problema en una variable quedará de la forma

$$\min_{\mu \geq 0} \bar{\lambda} = \mu(1-\pi_0)$$

s.a.

$$\pi_0^{-1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{B-c\mu}{a} \right\rfloor} \binom{\left\lfloor \frac{B-c\mu}{a} \right\rfloor}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1}{i!}$$

Pregunta 3

1. Estamos frente a una cola $M/M/1$, con una única grúa atendiendo a tasa $N\mu$ y camiones llegando a tasa λ. En el largo plazo y con $\rho < 1$ la tasa media de atención es igual a la tasa media de entrada. El consumo promedio de la planta será

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot k \left[\frac{m^3}{hora}\right]$$

Donde k es la capacidad de cada camión.

2. Sea L el número promedio de camiones en la fila, resolvemos

$$\min_{N \geq 0} f(N) = L(Q) \cdot a + N \cdot b$$

Reemplazamos L y aplicamos las CPO,

$$\min_{N \geq 0} f(N) = \frac{\lambda}{N\mu - \lambda} a + Nb$$

$$\begin{aligned} CPO: \frac{-\mu\lambda a}{(N\mu-\lambda)^2} + b &= 0 \\ \Rightarrow N^* &= \frac{\lambda}{\mu} + \sqrt{\frac{a\lambda}{b\mu}} \end{aligned}$$

3. Para este problema existen dos posibles enfoques: Cuando la decisión la toma el camión (enfoque a) y cuando la decisión la toma un planificador general (enfoque b).

Solución Enfoque (a) Cuando llega cada camión al sistema, se observa la cola y se decide si va o no a acopio. Si se verifica lo siguiente

$$costo\ esperado\ en\ cola \geq costo\ de\ acopio$$

Entonces el camión irá al acopio, de lo contrario el camión se irá a la cola.

Cuando el camión llega al sistema y ve una cola de largo Q, entonces su costo esperado de espera por entrar a la cola será $\$\frac{(Q+2)}{\mu N}a$. En cambio, si se decide ir al acopio, pagará $\$d$. (NOTA: $Q+2$ aparece porque se debe esperar los Q camiones adelante en la cola, más el que está en grúa, más él mismo). El largo de cola óptimo Q^* verificará entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{(Q^*+2)a}{\mu N} &= d \\
Q^* &= \frac{\mu d N}{a} - 2
\end{aligned}$$

Reemplazando N^* de la parte anterior,

$$Q^* = \left\lfloor d\left(\frac{\lambda}{a} + \sqrt{\frac{\mu\lambda}{ab}} - 2\right)\right\rfloor$$

Solución Enfoque (b) Una segunda forma de enfrentar el problema es planteando la función de costos del sistema y buscar el mínimo. El modelo de costos a minimizar será de la forma

$$\min_{Q\in N} aL(Q) + d\lambda\pi_{Q+1}$$

Donde $L(Q)$ y π_{Q+1} están calculados sobre una cola $M/M/1/Q+1$. (Basta con plantear el problema)

4. En este caso tenemos una cola de la forma $M/M/1/S^*$, donde $S^* = Q^*+1$. La fracción de camiones que se va a la cola sería π_S*, que corresponde a la fracción del tiempo que la cola está llena. (Aquí se utiliza la propiedad PASTA)

$$\begin{aligned}
\pi_{S^*} &= \pi_0\rho^{S^*} \\
&= \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{S^*+1})}\rho^{S^*} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu N^*}
\end{aligned}$$

5. El número de grúas debería ser menor porque el costo de espera en una cola muy larga ahora está acotado gracias a la política de la cancha de acopio.

6. BONO El problema es de la forma,

$$\min_{\substack{S\in N \\ N\geq 0}} \quad \Omega(S,N) = a\sum_{i=0}^{S} i\pi_i + \lambda\pi_S d + Nb$$

s.a.

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{S+1})}\rho^i \\
\rho &= \frac{\lambda}{\mu N}
\end{aligned}$$

Usando que $\sum_{k=0}^{n} ka^{k-1} = [1-(n+1)a^n + na^{n+1}]/(1-a)^2$ podemos reescribir la F.O. en la forma,

$$\Omega(S,N) = \frac{a\rho[1-(s+1)\rho^S + S\rho^{S+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{S+1})} + \lambda d\frac{(1-\rho)}{1-\rho^{S+1}}\rho^S + N\mu$$