Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A : Investigación Operativa
Profesores: P. Rey, D. Sauré, A. Schilkrut
Auxiliares: M. Guajardo, J.Guajardo,
C. Berner, P. Hernandez

Control 3

Viernes 18 de Junio, 2004

# Problema 1

Una multitienda nacional, apostando a la reactivación económica del país, ha decidido inaugurar un nuevo local en un exclusivo barrio de la capital. Dicho local, donde se venderá ropa de última temporada, dispone de un total de $C$ probadores. Se sabe que la tienda recibe demanda proveniente de tres grupos de clientes: Hombres, Mujeres, y Niños. En particular, se ha estimado que la llegada de clientes de cada grupo a la tienda sigue un proceso de Poisson de tasa $\lambda_H$, $\lambda_M$, $\lambda_N$ [clientes/hora], para los hombres, mujeres y niños, respectivamente.

En un arrebato de creatividad, la Gerencia de Marketing ha determinado que lo más conveniente para el posicionamiento de la companía es implantar un curioso sistema para el uso de probadores con las siguientes características. Si en un instante se encuentran todos los probadores vacíos y llega un hombre, entonces se permitirá únicamente el ingreso de hombres a los probadores, hasta que estén todos los probadores vacíos nuevamente; si al llegar un hombre en esta situación encuentra que todos los probadores están ocupados, pasará a la zona de espera, la cual tienen capacidad infinita. De esta manera, todas las mujeres y niños que lleguen cuando haya al menos un hombre en la zona de probadores deberán retirarse decepcionados de la tienda. Análogamente, cuando la primera persona que llega es mujer, todos los hombres y niños que lleguen mientras haya alguna mujer en probadores no podrán hacer uso de los mismos debiendo retirarse indignados de la tienda. Finalmente y de la misma manera, si la primera persona en llegar a la tienda es un niño, los hombres y mujeres que lleguen mientras haya algún niño en probadores deberán retirarse de la tienda sin poder efectuar ninguna compra.

Por otra parte, de acuerdo a datos históricos se sabe que el tiempo que demora una persona en la zona de probadores se distribuye de acuerdo a una exponencial de tasa $\mu_H$, $\mu_M$ y $\mu_N$ [1/hora], para un hombre, mujer y niño, respectivamente.

1. (2.0 ptos.) Modele el número de personas en la zona de probadores, incluyendo clientes en espera, como una cadena de Markov en tiempo continuo, con estados de la forma (H,M,N) donde las componentes representan las cantidades de cada tipo de clientes.
2. (0.5 ptos.) ¿Cuál es la condición de existencia de régimen estacionario para esta cadena?
3. (3.0 ptos.) Asumiendo que se cumple la condición de estacionariedad, muestre que las probabilidades estacionarias pueden ser escritas en función de la del estado (0,0,0), de manera similar a un proceso de Nacimiento y Muerte. Entregue una expresión para la probabilidad estacionaria del estado (0,0,0).
4. (0.5 ptos.) Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias calcule la tasa efectiva de salida de clientes del área de probadores.

## Problema 2

El Metro de Santiago lo ha contratado a ud. para analizar la situación de la estación Universidad de Chile que es una de las más concurridas por los usuarios. En particular le interesa analizar el servicio desde dicha estación hasta la Estación Terminal San Pablo.

A la estación en estudio llegan trenes de dos tipos. Los trenes tipo 1 realizan el servicio hasta la Estación Terminal San Pablo, mientras que los tipo 2 llegan sólo hasta Las Rejas. El tiempo entre arribos de los trenes a la estación Universidad de Chile son variables aleatorias i.i.d. exponenciales de parámetro $\mu_1$ y $\mu_2$, respectivamente. Por otro lado la capacidad disponible de todos los trenes de ambos tipos se supone constante e igual a **R** pasajeros. Las personas que requieren viajar hacia el poniente de la capital, llegan a la estación bajo estudio según un Proceso de Poisson de tasa $\lambda$[pasajeros/hora]. Si al momento de la llegada hay $j$ personas esperando, cada nuevo usuario ingresará al sistema con probabilidad $q_j$, y en caso contrario preferirá realizar su viaje en micro. Una vez que un pasajero entra, se ubica en una cola única con acceso directo al andén. Se sabe que el destino de un fracción $p$ de los pasajeros es una estación entre la estación Moneda y Las Rejas, por lo que independiente del tren que llegue intentarán abordarlo. Por otro lado una fracción $1-p$ de los usuarios se dirije a una estación posterior a Las Rejas, por lo que sólo tomarán los trenes que lleguen hasta el terminal.

Los pasajeros que desean viajar en un tren determinado comenzarán a subir respetando el orden de llegada y la capacidad disponible. Por otra parte, los usuarios que deciden no tomar el tren y los que se quedaron abajo por falta de capacidad conservarán su prioridad en la fila remanente. Finalmente suponga que el tiempo que demoran los pasajeros en abordar un tren es despreciable, y que la estación Universidad de Chile tiene una capacidad para **3R** pasajeros esperando. Las personas que llegan a la estación y encuentran el sistema lleno, preferirán realizar su viaje en microbús ($q_{3R} = 0$).

1. (0.5 ptos) Si en un instante del tiempo hay $k$ personas esperando en la estación y llega un tren tipo 2, ¿cuál es la probabilidad de que $i$ personas tengan intenciones de abordar el tren?. Denote a esta probabilidad $\beta_{ik}$. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo menos $i$ personas tengan intenciones de abordar el tren?. Denote a esta probabilidad $\beta_{ik}^{+}$. $(0 \leq i \leq k)$

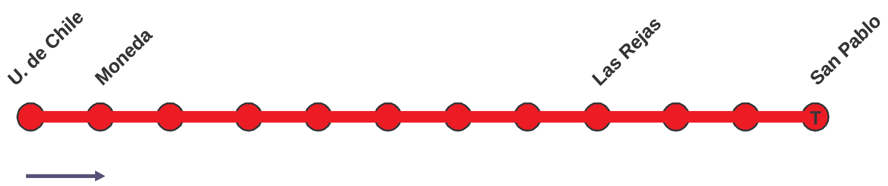
2. (2.5 ptos) Modele la cantidad total de personas esperando en la estación Universidad de Chile como una cadena de Markov en tiempo continuo. Determine las transiciones posibles y las tasas involucradas, en función de los parámetros del problema y de las probabilidades $\beta_{ik}$ y $\beta_{ik}^{+}$ . Generalice estados para los casos particulares que estime convenientes. Indique la condición de existencia de régimen estacionario.

3. Suponga que la cadena anterior admite régimen estacionario y que usted conoce el vector $\Pi$. Entregue expresiones para:

   *a*) (1.0 ptos) La tasa efectiva de arribo de personas a los trenes.

   *b*) (1.0 ptos) La esperanza de la cantidad de personas que en un hora llegan a la estación, pero no entran y realizan su viaje en microbus.

   *c*) (1.0 ptos) El tiempo promedio de espera de los pasajeros que ingresan a la estación, hasta abordar el tren que lo llevará a su destino.




# Problema 3

A una nueva sucursal bancaria se estima que llegarán clientes según un proceso de Poisson de tasa $\lambda$ [clientes/minuto]. El Gerente de Operaciones del banco está evaluando tres posibilidades para el sistema de atención de las cajas.

A. Una cola única con dos servidores, con tiempos de atención exponencial de media $1/\mu$ [minutos] para cada servidor.

B. Una cola única con un servidor con tiempo de atención exponencial de media $\frac{1}{2\mu}$ [minutos].

C. Dos colas independientes cada una con un servidor, con tiempos de atención exponenciales de media $1/\mu$ [minutos] para cada uno de ellos. Los clientes eligen equiprobablemente cualquiera de las colas y no es posible el cambio de cola.

1. (4.0 pts) Analíticamente, ordene las tres políticas anteriores en términos del tiempo medio de espera de los clientes en el sistema. Suponga que bajo todas las configuraciones se logra régimen estacionario.

2. (2.0 pts) Un consultor externo le propone al Gerente de Operaciones, una nueva alternativa, la cual se describe acontinuación:

   > Dos colas independientes cada una con un servidor, con tiempos de atención exponenciales de media $1/\mu$ [minutos] para cada uno de ellos. Los clientes entran a la cola más corta, ante empates eligen equiprobablemente y, se cambian de cola si al irse a la otra fila hay menos personas delante de él.

   Compare esta nueva política con la mejor configuración encontrada obtenida en la parte 1, en función del tiempo medio de espera de los clientes en el sistema.

<u>Indicaciones Generales y Fórmulas</u>

- Algunas distribuciones

$$X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda): \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \forall\, x \geq 0, \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda): \quad \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad E(X) = \lambda, \qquad \text{Var}(X) = \lambda.$$

$$X \rightsquigarrow \text{U}(a,b): \quad f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Algunas colas

Sistemas M/M/1

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Sistemas M/M/2

$$L = \frac{2\rho}{1-\rho^2}, \quad \text{donde } \rho = \frac{\lambda}{2\mu}.$$

- Algunas series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \text{ si } |a| < 1.$$