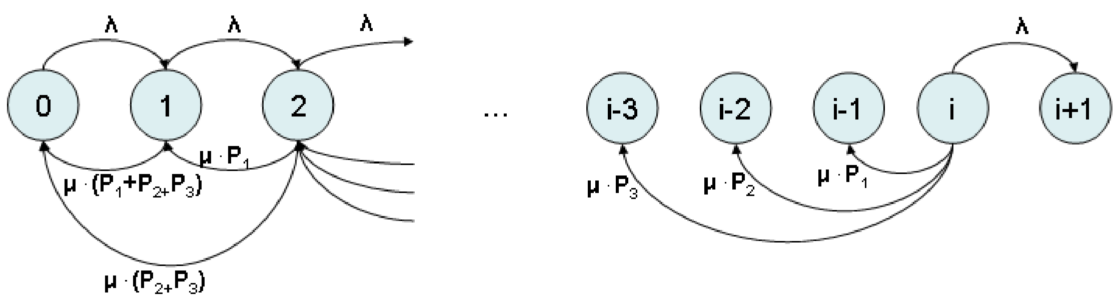
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Rafael Epstein, Pablo Rey, Denis Sauré.
Aux : C. Berner, M. Guajardo, A.Neely, D. Yung.

Pauta Control 3 Otoño 2005

Problema 1

1. (1,0 pto.) La cadena de Markov es la que se muestra en la siguiente figura.



Las ecuaciones de balance son las siguientes:

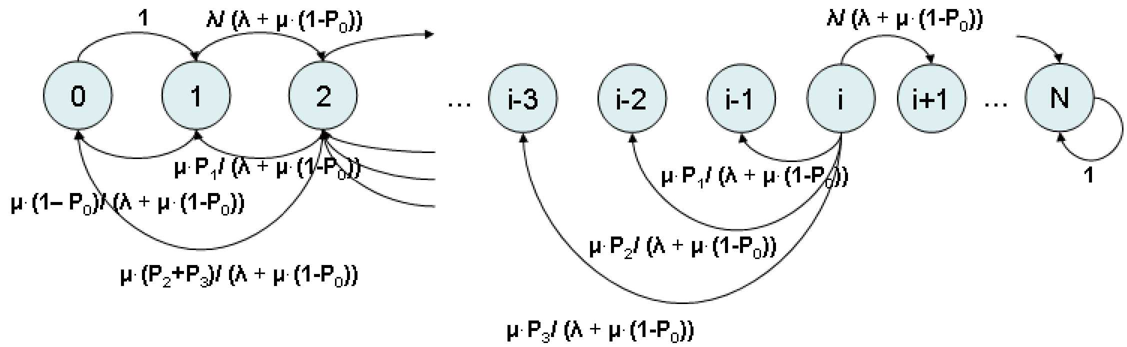
$$\begin{aligned}
\pi_0 \cdot \lambda &= \pi_1 \cdot \mu \cdot (1 - P_0) + \pi_2 \cdot \mu \cdot (P_2 + P_3) + \pi_3 \cdot \mu \cdot P_3 \\
\pi_i \cdot (\lambda + \mu \cdot (1 - P_0)) &= \pi_{i-1} \cdot \lambda + \pi_{i+1} \cdot \mu \cdot P_1 + \pi_{i+2} \cdot \mu \cdot P_2 + \pi_{i+3} \cdot \mu \cdot P_3 \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Ahora supongo que conozco las probabilidades estacionarias de la cadena anterior.

2. (2,5 ptos.) La expresión buscada es la siguiente:

$$E[T] = \sum_i \pi_i \cdot E[T_i]$$

Con T_i = tiempo esperado de demora si al llegar el inspector encuentra i personas en el paradero. Es decir, simplemente calcularemos la esperanza condicionada, para luego extender el resultado utilizando las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte anterior. Ahora debemos calcular los $E[T_i]$. Para esto utlizaremos la siguiente cadena de Markov en tiempo **DISCRETO**:



Notamos que la matriz de probabilidades asociada a la cadena es la misma de la cadena anterior (no especificamos tasas, sino que las probabilidades). La excepción es que hemos colocado al estado N como un estado absolvente, el único estado recurrente. Ahora, y en el contexto de Markov con beneficios, adoptamos la siguiente estructura de beneficios:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{\lambda} \\ r_i &= \frac{1}{\lambda + \mu \cdot (1 - P_0)} \end{aligned}$$

Es decir, el beneficio de permanencia en un estado es la esperanza del tiempo que se permanece en este. Así, para encontrar el tiempo T_i simplemente resolvemos el problema de beneficios con esta estructura. El resultado es el siguiente. Sea P_{TT} la sub matriz de transiciones entre estados transientes.

$$Q = [I - P_{TT}]^{-1}$$
$$T = Q \cdot r$$

Entonces T_i es la componente $i-$ésima del vector T. Notar que las formulas anteriores corresponden al calculo del tiempo en el transiente, solo que el vector de beneficios no es el vector e (lleno de unos) si no que el vector r.

3. (2,5 ptos.) Este problema de decision de debe abordar mediante programación dinámica:

- Periodos: Cada vez que hay un cambio en el estado de la cadena (cambio en el largo de la fila).
- Estado:
  - q_i, largo de la cola en la etapa i.
  - a_i, personas delante del tomador de decision en la cola, en la etapa i.
- Decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{irse a pie} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Recurrencia

$$V_i(q_i, a_i) = \text{mín}\{T_p, T_c + E[V_{i+1}(q_{i+1}, a_{i+1})]\}$$

donde :

$$\begin{aligned} E[V_{i+1}(q_{i+1}, a_{i+1}] &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu \cdot (1 - P_0)} \cdot V_{i+1}(\text{mín}\{q_i + 1, N\}, a_i) \\ &+ \frac{\mu \cdot P_1}{\lambda + \mu \cdot (1 - P_0)} \cdot V_{i+1}(q_i - 1, 0, a_i - 1) \\ &+ \frac{\mu \cdot P_2}{\lambda + \mu \cdot (1 - P_0)} \cdot V_{i+1}(q_i - 2, 0, a_i - 2) \\ &+ \frac{\mu \cdot P_3}{\lambda + \mu \cdot (1 - P_0)} \cdot V_{i+1}(q_i - 3, 0, a_i - 3) \end{aligned}$$

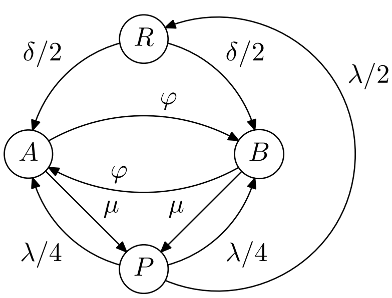
- Condiciones de borde:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= n \\
a_1 &= n-1 \\
V_i(N, a_i) &= T_p \quad \forall\, a_i \geq 0 \\
V_i(q_i, a_i) &= T_c \quad \forall\, a_i < 0\,,\, q_i < N
\end{aligned}
$$

Problema 2

1. (1,5 ptos.) Justifique por qué las actividades que realiza el carabinero se pueden modelar como un cadena de Markov en tiempo continuo Plantee dicha cadena. Especifique claramente los estados y las tasas de transición.

   En la figura se muestra la cadena. El estado P corresponde al cuando está emitiendo un parte, el estado R a cuando está haciendo el reporte y los estados A, B, a cuando está controlando las calles.



2. (1,0 pto.) Considere la cadena propuesta en el punto anterior. ¿Esta cadena admite probabilidades estacionarias?

   En caso afirmativo, justifique. En caso contario, plantee qué condiciones adicionales se deben satisfacer para que la cadena admita probabilidades estacionarias.

   La cadena del punto anterior admite propbabilidades estacionarias ya que es finita e irreductible.

3. (1,0 pto.) Plantee un sistema de ecuaciones que permitan calcular las probabilidades estacionarias de la cadena del punto 1.

   Éstas se pueden calcular resolviendo el sistema:

$$
\begin{aligned}
(\mu + \varphi)\,\pi_A &= \lambda 4\,\pi_P + \delta 2\,\pi_R + \varphi\,\pi_B \\
\lambda\,\pi_P &= \mu\,\pi_A + \mu\,\pi_B \\
\delta\,\pi_R &= \lambda 2\,\pi_P \\
\pi_P + \pi_R + \pi_A + \pi_B &= 1
\end{aligned}
$$

4. (1,5 ptos.) Suponga que el carabinero acaba de terminar de enviar un reporte. ¿Cuál es la probabilidad que en los proximos 15 minutos (1/4 hora), detecte, al menos, a un infractor?

   Para contestar esta pregunta, consideremos el proceso de llegada de infractores a la esquina por cualquiera de ambas calles. Este proceso es la suma de dos procesos de Poisson independientes de tasa μ. Por lo tanto, es un proceso de Poisson de tasa 2μ.

   Por el procedimiento descrito, el carabinero estará observando una de las dos calles hasta que detecte a un infractor. No debería ser difícil ver (usando las probabilidades estacionarias y el hecho que las calles son independiente y se comportan de la misma manera) que, cuando un infractor llega a la esquina, la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle por la que llega es 1/2.

De esta manera, el proceso de los infractores que serían detectados si el carabinero sólo controlara el trásito es un proceso de Poisson de tasa μ.

Entonces, el próximo parte que emitirá el carabinero corresponde a la llegada del primero de estos infractores. Por lo tanto, si llamamos a este proceso $N(t)$ lo que queremos saber es:

$$P(N(1/4) \geq 1) = 1 - P(N(1/4) = 0) = 1 - e^{-t\mu/4}$$

Considere que se cumplen las condiciones de estado estacionario y que las probilidades estacionarias de la cadena son conocidas y responda.

5. (0,5 ptos.) En promedio, ¿cuántos partes emite el carabinero por hora?

   Esto es la tasa "efectiva" de entrada al estado P: $\mu(\pi_A + \pi_B)$.

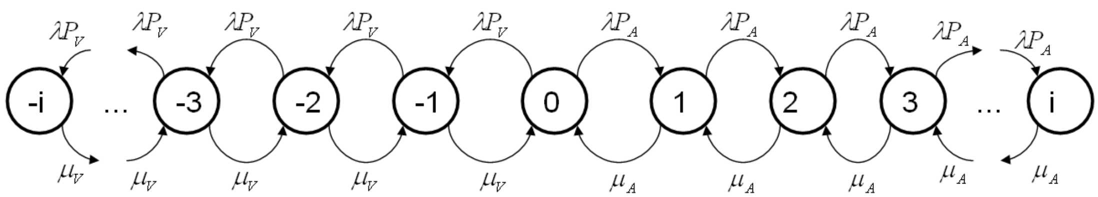
6. (0,5 ptos.) Suponga que usted llega a la esquina en un momento t cualquiera en el "largo plazo":

   - ¿Cuál es la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle A en ese instante t?
   - ¿Cual es la probabilidad que el carabinero esté vigilando la calle A en ese instante $t + 3$?

   En ambos casos, se pregunta por la probabilidad estacionaria en el estado A: π_A.

Problema 3

1. La cadena queda de la siguiente forma (se deben especificar las tasas de transición en lugar de las probabilidades de transición)



   Lo anterior se cumple debido a que solo hay dos motos en juego, es necesario saber qué tipo de moto se está ocupando y cuántos barriles de bencina le queda por gastar. Considerando los casos negativos como cuando va en la moto color violeta y los positivos cuando va en la moto amarilla. Vale destacar, que el módulo del número de cada nodo presenta cuantos barriles quedan. Otro antecedente es que dada la probabilidad de que un barril sea amarillo o violeta, se puede ver el proceso de las llegadas como un poisson filtrado, por lo que las tasas se multiplican para cada caso como lo muestra la figura. El problema puede ser visto como la unin entre dos cadanas M/M/1 por lo que las condiciones a cumplir para convergencia a probabilidades estacionarias será:

$$\frac{\lambda P_A}{\mu_A} < 1$$
$$\frac{\lambda P_V}{\mu_V} < 1$$

   Las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades en estado estacionario son:

$$\begin{aligned}
\pi_0 \lambda &= \pi_1 \mu_A + \pi_{-1} \mu_V \\
\pi_1(\mu_A + \lambda P_A) &= \pi_0 \lambda P_A + \pi_2 \mu_A \\
\pi_{-1}(\mu_V + \lambda P_V) &= \pi_0 \lambda P_V + \pi_{-2} \mu_V \\
\\
\pi_i(\mu_A + \lambda P_A) &= \pi_{i-1} \lambda P_A + \pi_{i+1} \mu_A \\
\pi_{-i}(\mu_V + \lambda P_V) &= \pi_{-i+1} \lambda P_V + \pi_{-i-1} \mu_V \\
\\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

2. En esta parte de la pregunta debemos demostrar que:

$$\sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A}\pi_j \cdot q_{jk} \quad = \quad \sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A}\pi_k \cdot q_{kj}$$

Para esto, se procede de la siguiente forma: tomamos un subconjunto de nodos $(A) \subseteq (E)$ cualquiera y para cada uno de esos nodos hacemos su ecuación de flujo, es decir, si estamos en el nodo j decimos que la probabilidad estacionaria del estado j multilicada por la suma de todas sus tasas de salida será igual a la suma de todas las tasas de llegada por la probabilidad estacionaria del nodo desde donde llega cada tasa es decir:

$$\pi_j \cdot (\sum_{k\in E} q_{jk}) = \sum_{k\in E} q_{kj}\pi_k$$

Si repetimos esta ecuación para cada uno de los nodos en el conjunto A y las sumamos hacia abajo llegamos a lo siguiente:

$$\sum_{j\in A}\pi_j \cdot \sum_{k\in E} q_{jk} = \sum_{j\in A}\sum_{k\in E} q_{kj}\pi_k$$

Rearreglando la igualdad anterior llegamos a que:

$$\sum_{j\in A}\sum_{k\in E}\pi_j \cdot q_{jk} = \sum_{j\in A}\sum_{k\in E} q_{kj}\pi_k$$

Sin embargo lo anterior es igual a:

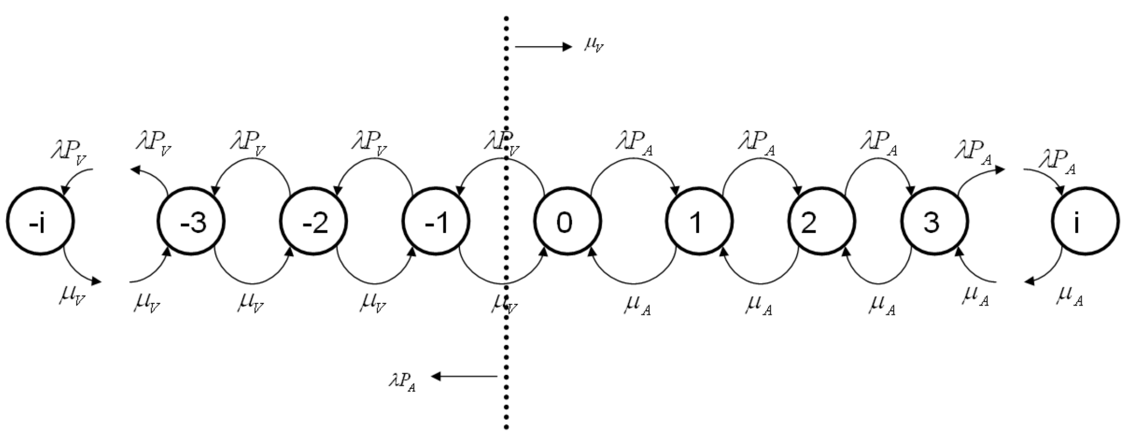
$$\sum_{j\in A}\sum_{k\in A}\pi_j \cdot q_{jk} + \sum_{j\in A}\cdot\sum_{k\in E\setminus A}\pi_j \cdot q_{jk} = \sum_{j\in A}\sum_{k\in A} q_{kj}\pi_k + \sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A} q_{kj}\pi_k$$

Sin embargo el primer término del lado derecho de la igualdad es exactamente igual que el primer término del lado derecho de la ecuacin. Con lo anterior se llega a que:

$$\sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A}\pi_j \cdot q_{jk} = \sum_{j\in A}\sum_{k\in E\setminus A} q_{kj}\pi_k$$

que es lo que nos pedían demostrar.

3. Considerando la parte anterior, se puede realizar un corte (es decir tomar un subcinjunto infinito desde el -1 hacia la izquierda)en cualquier parte de la cadena, en particular donde muestra la figura:



lo que nos lleva a decir mediante el uso del teorema que:

$$\pi_0 \lambda P_V = \pi_{-1}\mu_V$$

Adems si hacemos otro corte simétrico al anterior pero esta vez en los números positivos se llega a:

$$\pi_0 \lambda P_A = \pi_{-1} \mu_A$$

Así reemplazando en los valores obtenidos en la primera parte del problema llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \pi_0 \cdot \rho_A \\
\pi_k &= \pi_0 \cdot {\rho_A}^k \\
\pi_{-1} &= \pi_0 \cdot \rho_V \\
\pi_{-k} &= \pi_0 \cdot {\rho_V}^k \\
\rho_A &= \frac{\lambda P_A}{\mu_A} \\
\rho_V &= \frac{\lambda P_V}{\mu_V}
\end{aligned}$$

Con esto para obtener el valor de π_0 y posteriormente cada una de las probabilidades estacionarias solo nos queda imponer que $\sum_{i;-i} \pi_i = 1$ llegando a que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{-k} + \pi_0 = 1 = \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} {\rho_A}^k + \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} {\rho_V}^k + \pi_0$$

Despejando π_0 se obtiene que:

$$\pi_0 = \frac{1}{\frac{\rho_V}{1-\rho_V} + \frac{\rho_A}{1-\rho_A} + 1}$$

Así mediante el uso de las ecuaciones planteadas más arriba se puede determinar el valor de la probabilidad estacionaria asociada a cada uno de los nodos en cuestión.

4. Sabemos que Mariomoto tendrá k barriles de bencina en el largo plazo con probabilidad $(\pi_k + \pi_{-k})$. Así la esperanza de barriles estará dada por:

$$\mathbb{E}[barriles] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (\pi_k + \pi_{-k})$$

$$= \pi_0 \cdot (\frac{\rho_V}{(1-\rho_V)^2} + \frac{\rho_A}{(1-\rho_A)^2}) = (\frac{\rho_V}{(1-\rho_V)^2} + \frac{\rho_A}{(1-\rho_A)^2}) \cdot \frac{1}{\frac{\rho_V}{1-\rho_V} + \frac{\rho_A}{1-\rho_A} + 1}$$

5. En esta parte lo nico que se debe hacer es lo mismo que antes, pero para k colores diferentes. La cadena quedará con tantas ramas como colores de moto haya y cada estado deber guardar dos tipos de información: El color i y el nmero de barriles del mismo(n). Lo que se debe hacer es para cada color i definir P_i como la probabilidad de que la bencina sea de ese color y por ende asociar a ese proceso una tasa de λP_i. Asimismo, se le debe asociar una tasa μ_i a la tasa de gasto de combustible. Así, extendiendo desde la forma anterior (razonamiento similar) nos queda:

   para color i:

$$\rho_i = \frac{\lambda P_i}{\mu_i}$$

   Además para las probabilidades estacionarias se cumplirá que:

$$\pi_{1;n} = (\rho_i)^n \cdot \pi_0$$

   con

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} (\frac{\rho_i}{1-\rho_i}) + 1}$$

Vale destacar que hacer le dibujo no vale la pena dada la simetría del problema. Otro antecedente es que la suma de todas las probabilidades P_i deben ser igual a uno. Además la condición lógica para convergencia es que cada una de las subseries converja por lo que se debe cumplir que $\rho_i < 1 \quad \forall i; \quad i = 1, ..., k$

Dudas, consultas y comentarios a

crberner@ing.uchile.cl