Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Antoine Sauré
Aux : P. Hernández, J. Muñoz, D. Sauré.

Control 3 IN44A, Viernes 20 de Junio del 2003

Problema 1

Armijo Catalán encarna en esta ocasión a un esforzado sastre, que tan solo cuenta con 2 clientes. La dinámica de su negocio es la siguiente: Armijo, atento al teléfono de su local, espera por la llamada de alguno de sus clientes. Cuando esto ocurre comienza rápidamente a confeccionar el traje de acuerdo a la medida del cliente especifico. La experiencia le indica a Armijo que el tiempo que demora en confeccionar un traje para el cliente i es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa μ_i.

Una vez que Armijo termina el traje se dirige raudo hasta el domicilio de su cliente. Armijo estima que independiente del cliente en cuestión, el tiempo que demora en dicho trayecto es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa γ. Una vez en la casa del cliente Armijo cobra por su trabajo y vuelve hasta su local en taxi (considere que el tiempo de viaje en taxi es despreciable).

Armijo considera que el tiempo que transcurre entre la entrega de un traje del cliente i y el próximo llamado del mismo cliente es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa λ_i.

Mientras Armijo se encuentra trabajando en un traje existe la posibilidad que el otro cliente llame requiriendo un traje. Cuando esto sucede, Armijo toma nota de la orden y solo comienza a trabajar en ella una vez que vuelve de realizar la entrega del traje en el que trabaja.

Si el cliente i llama al local de Armijo mientras este se encuentra realizando una entrega, colgará e intentará nuevamente tras un tiempo aleatorio de distribución exponencial de tasa λ_i. Un cliente al que se le debe un traje no llamará por otro.

Armijo esta interesado en medir la calidad del servicio que esta entregando a sus clientes. Consiente de la dinámica Markoviana de su negocio a decidido utilizar sus conocimientos para tal fin.

1. (2,0 ptos.) Modele el sistema de atención del Sastre como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionaria y escriba el sistema de ecuaciones que permitiría calcularla.
2. (1,5 ptos) Considerando conocidas las probabilidades estacionarias entregue una expresión para el número de llamados perdidos en la tienda de Armijo en el largo plazo. Para esto siga los siguientes pasos:
   - Calcule el número de llamadas perdidas por el cliente 1 y el cliente 2 (por separado).
   - Calcule el número total de llamadas realizadas
   - Calcule la expresión requerida utilizando los puntos anteriores

Armijo ha realizado una encuesta de calidad de servicio a sus clientes. De ella se desprende que los clientes comprenden la ausencia de Armijo en el local, pero lo que no soportan es que sus trabajos sean demorados hasta después de la entrega de otro. Con esto en mente Armijo ha decidido implantar una nueva política de atención: Si al encontrarse trabajando en un traje es interrumpido por un llamado, tomara nota de él, pero no abandonara su local sino hasta haber terminado de confeccionar los trajes para sus 2 clientes. Así, realzará la entrega de ambos trajes de una sola vez, viajando desde su local hasta la casa del cliente que lleva esperando más, desde allí hasta la casa del otro cliente (para este fin considere que el tiempo de viaje entre el domicilio de un cliente y otro se distribuye exponencial de tasa γ) y desde allí en taxi hasta su local (es decir, en un tiempo despreciable).

3. (1,5 ptos.) Modele esta nueva situación como una cadena de Markov en tiempo continuo.

4. (0,5 pts.) En base al modelo de la parte 3, y suponiendo $\lambda_1 = \lambda_2$ entregue una expresión para el número de llamados perdidos por el cliente 1 en la tienda de Armijo en el largo plazo. Considere conocidas las probabilidades estacionarias.

5. (0,5 ptos.) En base al modelo de la parte 3, y suponiendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ calcule una expresión para número de llamados del cliente 1 que son perdidas. De ser necesario modifique la cadena de la parte anterior y considere conocidas las probabilidades estacionarias.

Problema 2

Don King, flamante gerente del único banco que existe en un pequeño pueblito llamado Larjentina, ha decidido implementar una novedosa política de atención.

En el banco existen 2 cajas, pero sólo una cajera, la cual tarda en atender a un cliente, un tiempo que sigue una variable aleatoria exponencial de parámetro μ.

Al comienzo del día, al abrirse las puertas del recinto, la cajera se ubica en su puesto de trabajo, mientras que la otra caja se encuentra cerrada.

Esta configuración se mantiene hasta que el largo de la cola de espera, alcanza las R personas, momento en el cuál el guardia del recinto, apodado Don Güily, ágilmente se ubica en la caja cerrada y comienza a atender público. Considere que bajo esta nueva situación se mantiene **una fila única**, y que el tiempo de atención de Don Güily, también sigue una distribución exponencial de parámetro μ.

El guardia se mantendrá en la caja, hasta que no queden personas en el sistema, instante en el cual volverá a sus labores de seguridad y la cajera quedará nuevamente atendiendo sola.

Por otro lado, la llegada de clientes al banco sigue un proceso de Poisson de tasa λ [clientes/hora].

Finalmente suponga que la capacidad del banco es ilimitada, y desde que el sistema parte vació estará operando por mucho tiempo.

1. (1.0 ptos) Argumente porqué no es posible modelar el sistema descrito como una cadena de Markov en tiempo continuo cuyos estados registren sólo el número de personas en el banco. ¿Qué información adicional es necesaria? Justifique.

2. (2.0 ptos) Modele la situacíon descrita como una cadena de Markov en tiempo continuo.

3. (1.5 pts) Encuentre la condición de existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitirían calcularas.

Considerando conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguientes preguntas:

4. (0.5 ptos) ¿Qué fracción del tiempo, Don Güily se encuentra atendiendo clientes en la caja?

5. (0.5 ptos) En promedio, ¿cuántos clientes son atendidos por el guardia en una hora?

6. (0.5 ptos) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que entra al sistema cuando hay 2 cajas operando, sea atendido por el guardia?

Problema 3

Un servicio que emite certificados de sanidad funciona de la forma que se describe a continuación.

Los interesados en el certificado llegan a la oficina de certificados según un proceso de Poisson de tasa λ[personas/hora].

Las personas que ingresan al servicio son atendidas por un burócrata. Con probabilidad q, e independiente de todo lo demás, el burócrata otorgara el documento sin pedir más documentación, con lo que los beneficiados se retiran felices del servicio. El tiempo de atención del burócrata se comporta como una variable aleatoria exponencial de parámetro μ_B.

Las personas que no consiguen el certificado (con probabilidad $(1-q)$), deben dirigirse a un consultorio donde se les realizará una serie de análisis.

Todas las personas que llegan al consultorio deben pasar por el mesón donde son atendidos por **una** simpática recepcionista que, en tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro μ_M, decide si deben realizar primero un test psicológico (con probabilidad p) o si pasan directamente al laboratorio médico.

El test psicológico demora un tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro μ_P y es realizado por **un** solo especialista. Luego del test todas las personas se dirigen al laboratorio médico.

En el laboratorio médico atienden **dos** doctores, atienden a los pacientes, que esperan formando una única fila. El tiempo de atención de cada doctor puede ser representado como una v.a. exponencial de parámetro μ_D. Una vez terminada la visita al laboratorio médico cada persona regresa a la oficina del burócrata con la esperanza que esta vez les entregue el certificado.

El burócrata los recibe y nuevamente decide, como en el caso de las personas que llega a su oficina por primera vez, en tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro μ_B, si les entrega el certificado (con probabilidad q) o si los manda de nuevo al consultorio (prob $(1-q)$.

1. (2,0 ptos.) Modele el servicio descrito como una red de colas.
2. (1,5 ptos.) Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema y escriba las condiciones de estado estacionario.
3. (1,0 ptos.) Calcule el número promedio de usuarios dentro del sistema completo en estado estacionario.
4. (1,5 ptos.) Calcule el tiempo promedio que pasa un usuario dentro del sistema en estado estacionario.

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones.
  $X \rightsquigarrow \mathrm{EXP}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \forall\, x \geq 0$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  $X \rightsquigarrow \mathrm{Poisson}(\lambda)$: $\Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $\mathrm{Var}(X) = \lambda$
  $X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p)$: $\Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k$ $E(X) = \frac{p}{1-p}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$
- Algunas series.
  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ y $\sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}$, si $|a| < 1$.
- Sistemas elementales de espera en estado estacionario.
  $M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \Pi_0 = 1 - \rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

  $M/M/2$

$$L = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2} \qquad \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\cdot\mu}$$