Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Aux: S. Astroza, J. Gacitúa, R. Lagos, Ch. Thraves

SOLUCIÓN CTP 4

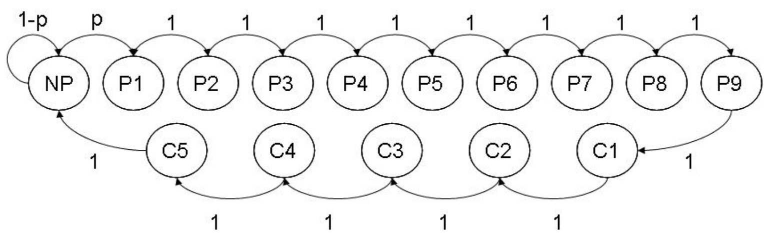
Miércoles 3 de Junio de 2009

1. Pregunta 1

1. Se propone una cadena de markov en tiempo discreto $\{X_t, t = 1, 2, ...\}$, donde X_t representa el estado dentro del ciclo de la vaca y t son meses. El conjunto de estados de la vaca sería,

$$E = \{NP, P_1, P_2, ..., P_9, C_1, C_2, ..., C_5\}$$

donde
NP: No preñada,
P_i: Preñada con i meses, $i = 1, ..., 9$
C_j: Acompañando a su ternero en mes j, $j = 1, ..., 5$
La matriz de transición para este modelo se define de la siguiente forma:



2. Las probabilidades estacionarias si están definidas porque el modelo contiene una sola clase recurrente aperiódica. Las probabilidades estacionarias se calculan con el sistema

$$\begin{aligned} \pi^T &= \pi^T P \\ \sum_{i \in E} \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

El sistema resulta ser,

$$\begin{aligned} \pi_{NP} &= \pi_{NP} \cdot (1-p) + \pi_{C_5} \\ \pi_{P_1} &= p \cdot \pi_{NP} \\ \pi_{P_i} &= \pi_{P_{i-1}} \forall i = 2, ..., 9 \\ \pi_{C_1} &= \pi_{P_9} \\ \pi_{C_j} &= \pi_{C_{j-1}} \forall j = 2, ..., 5 \\ \pi_{NP} + \sum_{i=1}^{9} \pi_{P_i} + \sum_{j=1}^{5} \pi_{C_j} &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo,

$$\begin{aligned} \pi_{NP} &= \frac{1}{14p+1} \\ \pi_{P_i} &= \frac{p}{14p+1} \forall i = 1, ..., 9 \\ \pi_{C_j} &= \frac{p}{14p+1} \forall j = 1, ..., 5 \end{aligned}$$

3. La fracción de tiempo que una vaca está preñada es $\sum_{i=1}^{9} \pi_i$. Resolvemos entonces la ecuación

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{9} \pi_{P_i} &= 0,5 \\
\frac{9p}{14p+1} &= 0,5 \\
p &= 0,25
\end{aligned}$$

2. Pregunta 2

1. Se piden las probabilidades estacionarias del sistema. Resolviendo

$$\begin{aligned}
\pi^T &= \pi^T P \\
\sum_{i \in E} \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

La solución resulta, $\pi_A = 0$; $\pi_B = \frac{3}{13}$; $\pi_C = \frac{10}{13}$;

2. Se pide g,

$$\begin{aligned}
Costo_A \cdot \pi_A + Costo_B \cdot \pi_B + Costo_C \cdot \pi_C &= 50 \cdot 0 + 100 \cdot \frac{3}{13} + 200 \cdot \frac{10}{13} \\
&\approx 177
\end{aligned}$$

3. Sea $V_i(t)$ el costo esperado que acumulará un ternero que actualmente está en el potrero i y quedan t días por delante. Buscamos entonces $V_A(t)$. De acuerdo a las ecuaciones de cadenas de markov con beneficios,

$$\begin{aligned}
V(10) &= 10ge + W - P^{10}W && (1) \\
V_A(10) &= 10g + W_A - p_{AB}^{10} \cdot W_B - p_{AC}^{10} \cdot W_C && (2)
\end{aligned}$$

Donde
p_{ij}^{10} es el elemento i, j de la matriz P^{10}
$e =[1\ 1\ 1]^T$
Según parte 2, $g = 177$
De acuerdo al hint, $P^{10} = e \cdot [\pi_A\ \pi_B\ \pi_C]$
entonces $p_{AB}^{10} = \pi_B$, $p_{AC}^{10} = \pi_C$
Falta entonces calcular W, resolvemos el sistema

$$W + ge = r + PW$$

sea $W_A = 0$

$$\begin{aligned}
0 + 177 &= 50 + 0,8W_B \\
W_B + 177 &= 100 + W_C \\
W_C + 177 &= 200 + 0,3W_B + 0,7W_C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_A &= 0 \\
W_B &\approx 159 \\
W_C &\approx 236
\end{aligned}$$

Ocupando estos datos en la ecuación (2), resolvemos

$$V_A(10) \approx 1{,}551$$