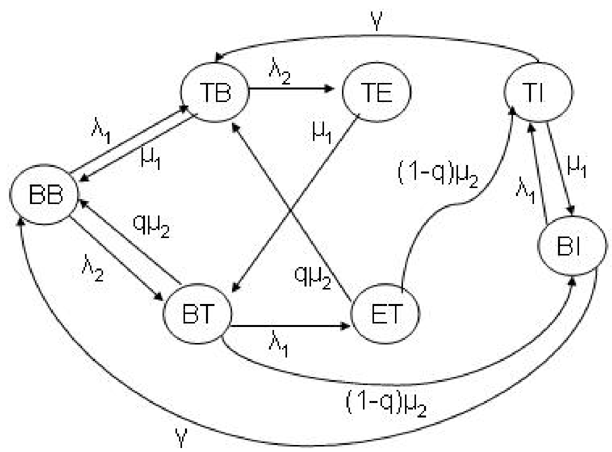
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Hernández, P. Rey
Aux: M. Guajardo, M. Pereira, D. Yung

Pauta Control 3
11 de Noviembre de 2005

Problema 1

1. Modelamos los estados como pares, indicando en cada componente el estado de cada máquina; adoptamos la siguiente notación: B= Buena; T= En reparación donde el técnico; E = En espera; I= En reparación donde el ingeniero.



La cadena es finita (7 estados) e irreductible (una sola clase), por lo tanto tiene probabilidades estacionarias.

2. Por la pérdida de memoria de la exponencial, claramente la respuesta no depende de t_1, t_2. La probabilidad que se pide es igual a
$$\frac{q\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2}$$

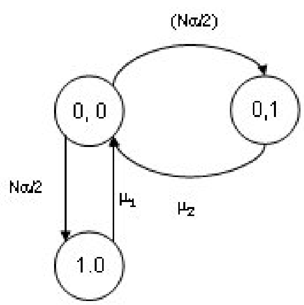
3. Llamemos T_i al tiempo promedio del ciclo de reparación del servidor i ($i = 1, 2$) y denotemos por T_i^e al tiempo promedio del ciclo de reparación del servidor i dado que el sistema estaba en el estado e cuando se produjo la falla. Con esta notación, tenemos que:
$$T_1 = \frac{1}{\pi_{BB} + \pi_{BT} + \pi_{BI}} \left(\pi_{BB} T_1^{BB} + \pi_{BT} T_1^{BT} + \pi_{BI} T_1^{BI}\right)$$
donde $T_1^{BB} = T_1^{BI} = 1/\mu_1$ y $T_1^{BT} = 1/\mu_1 + 1/\mu_2$ y
$$T_2 = \frac{1}{\pi_{BB} + \pi_{TB}} \left(\pi_{BB} T_2^{BB} + \pi_{TB} T_2^{TB}\right)$$
donde $T_2^{BB} = 1/\mu_2 + q/\gamma$ y $T_2^{TB} = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + q/\gamma$.

4. Los pagos por hora que debe afrontar la empresa son:
   - Ingeniero: $K_B(\pi_{BI} + \pi_{TI})$.
   - Técnico: $K_{A_1}\lambda_1(\pi_{BB} + \pi_{BT} + \pi_{BI}) + K_{A_2}\lambda_2(\pi_{BB} + \pi_{TB})$

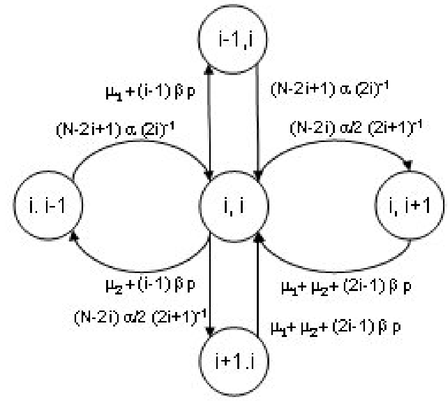
Problema 2

1. Las tasas de los casos genéricos del anexo son las siguientes.

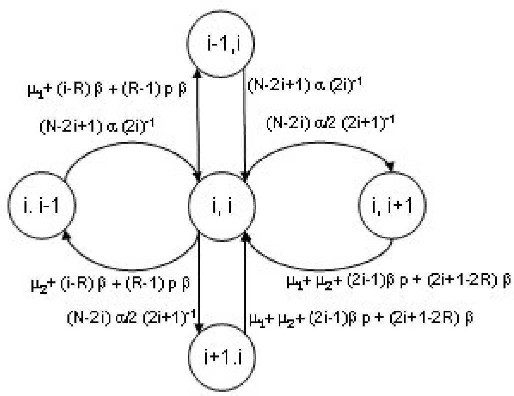
Caso 1



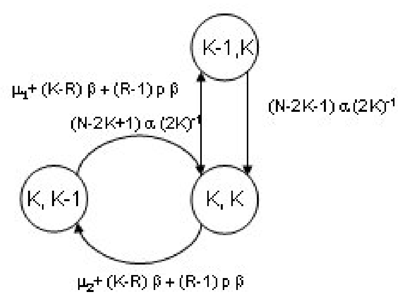
Caso 2: i < R



Caso 3: i ≥ R



Caso 4



La cadena es finita e irreductible luego SIEMPRE existe régimen estacionario.

2. Dado que se alcanza régimen estacionario la tasa efectiva de salida es igual a la tasa efectiva de entrada, por lo que la respuesta a esta pregunta se puede representar de ambas formas equivalentes. Sea $\bar{\mu}$, la tasa efectiva de salida, y $\bar{\alpha}$, la tasa efectiva de entrada. Luego se tiene que [1]:

$$\bar{\mu} = \pi_{1,0}\cdot\mu_1+\pi_{0,1}\cdot\mu_2+\sum_{\substack{i,j>0\\ i+j<2R}}\pi_{i,j}\cdot(\mu_1+\mu_2+(i+j-2)\beta p)+\sum_{\substack{i,j>0\\ 2R\leq(i+j)\leq 2K}}\pi_{i,j}\cdot(\mu_1+\mu_2+(i+j-2R)\beta+(2R-2)\beta p)$$

$$\bar{\alpha} = \sum_{0\leq(i,j)\leq K}\pi_{i,j}(N-i-j)\alpha(i+j)^{-1}$$

3. Para calcular el tiempo de permanencia en el sistema se puede usar la fórmula de Little, donde:

$$W = \frac{L}{\bar{\alpha}}$$

Recordemos que $\bar{\alpha} = \bar{\mu}$, lo cual fue calculado en la parte 2. Luego falta calcular L que está dado por:

$$L = \sum_{0\leq i,j\leq K}(i+j)\cdot\pi_{i,j}$$

[1] Para todas las preguntas siguientes, los estados (i,j) factibles son tales que $0 \leq |i-j| \leq 1$

4. En las preguntas relativas a las visitas del supervisor es importante notar que las llegadas ocurren en cualquier momento del tiempo y la probabilidad de encontrar el sistema en cualquier estado es igual a la probabilidad estacionaria de cada uno de los estados.

   a) La probabilidad de que el supervisor encuentre el sistema en cualquiera de los estados es igual a la probabilidad estacionaria de cada uno, π_{ij}. Para cada uno de los estados de la cadena es necesario determinar el parámetro de la distribucin exponencial del tiempo de permanencia, para simplificar notación se denominarán $\lambda_{i,j}$

   - $(0,0)$: $\lambda_{0,0} = N\alpha$
   - (i,j) con $0 < (i+j) < 2R$: $\lambda^1_{i,j} = (N-(i+j))\alpha(i+j)^{-1} + \mu_1 + \mu_2 + \beta p(i+j-2)$
   - (i,j) con $2R \leq (i+j) < 2K$: $\lambda^2_{i,j} = (N-(i+j))\alpha(i+j)^{-1} + \mu_1 + \mu_2 + \beta p(2R-2) + \beta(i+j-2(R-1))$
   - (K,K): $\lambda_{K,K} = \mu_1 + \mu_2 + \beta p(2R-2) + \beta(2K-2(R-1))$

   Para un exponencial de parámetro a, la probabilidad de que no ocurra ningún evento en un intervalo de largo T es igual e^{aT}. Luego la probabilidad pedida es:

$$P = \pi_{0,0}e^{\lambda_{0,0}T} + \sum_{\substack{i,j>0 \\ i+j<2R}} \pi_{i,j}e^{\lambda^1_{i,j}T} + \sum_{i,j>0} 2R \leq (i+j) \leq 2K\pi_{i,j}e^{\lambda^2_{i,j}T} + \pi_{K,K}e^{\lambda_{K,K}T}$$

   b) Para que el primer evento que el supervisor vió, luego de llegar a la oficina, haya sido la salida de una persona que se aburrió esperando, su llegada debe ser en los estados de la cadena en que hay más por lo menos alguien esperando en la oficina. Y la probabilidad de que ocurra al menos un evento en esos estados está en función de las tasas de la parte anterior:

$$\sum_{\substack{i,j>0 \\ 3\leq i+j\leq 2R}} \pi_{i,j}\frac{\beta p(i+j-2)}{\lambda^1_{i,j}} + \sum_{\substack{i,j>0 \\ 2R\leq i+j\leq 2K}} \pi_{i,j}\frac{\beta p(2R-2)+\beta(i+j-2(R-1))}{\lambda^2_{i,j}}$$
$$+ \pi_{K,K}e^{\lambda_{K,K}T}\frac{\beta p(2R-2)+\beta(2K-2(R-1))}{\lambda_{K,K}}$$

Problema 3

1. El modelo es un proceso de nacimiento y muerte con conjunto de estados $\{0,1,2,\ldots,L\}$. Las tasas de transición son:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (E-i)\lambda \\ \mu_i &= i\mu\,. \end{aligned}$$

   Este sistema de espera puede ser representado, en la notación de Kendall como $M/M/L/L/E$: un sistema con llegadas markovianas, con tiempos de atención exponenciales, L servidores (las líneas), capacidad L y llegadas originadas en una población de tamaño E.

   Este sistema siempre tiene régimen estacionario ya que es un proceso de nacimiento y muerte (por lo tanto, una cadena irreductible) finito.

2. *a*) Fracción del tiempo promedio que pasa una línea desocupada: $\displaystyle\sum_{i=0}^{L}\frac{L-i}{L}\pi_i$.

   b) Llamadas no realizadas en una hora: $(E-L)\lambda\pi_L$.

   c) Se debe encontrar L $(0 \leq L \leq E)$ que minimice el costo esperado por hora:

$$C\cdot L + K(E-L)\lambda\pi_L + \left(\mu\sum_{i=1}^{L} i\pi_i\right)Y$$

   o

$$C\cdot L + K(E-L)\lambda\pi_L + \left(\lambda\sum_{i=0}^{L-1}(E-i)\pi_i\right)Y\,.$$

3. En el caso que $L = E$, se tiene que $\lambda_i = (E-i)\lambda$ y $\mu_{i+1} = (i+1)\mu$, para $i \in \{0, 1, \ldots, E-1\}$. Entonces, para $k = 1, 2, \ldots, E$,

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(E-i)\lambda}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{E(E-1)\cdots(E-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 \, .$$

Por lo tanto,

$$1 = \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{E} \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right] = \left[\sum_{k=0}^{E} \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right] \pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^E \pi_0 = \left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^E \pi_0$$

de donde concluimos que

$$\pi_0 = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^E \, .$$

4. Los estados siguen siendo los mismos.
Las tasas de nacimiento cambian a $\lambda_i = (E-i)\lambda + \delta$. Las tasas de muerte siguen siendo las mismas.
El sistema cambia a un $M/M/L/L$; las llamadas se originan a partir de una población $infinita$.
La cadena sigue siendo finita e irreductible, por lo que admite probabilidades estacionarias.

Dudas y/o errores:
Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl