Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

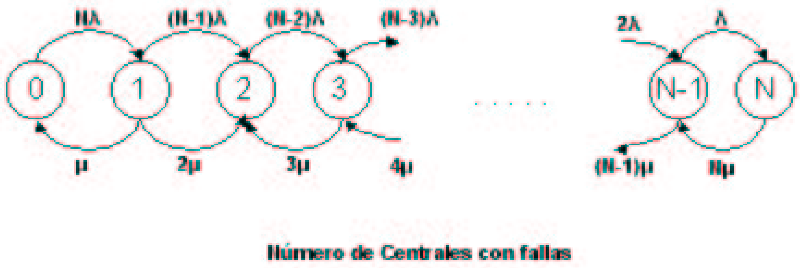
Curso IN44A: Investigación Operativa
Semestre: Otoño 2002
Profs.: N.Yankovic, A.Barrientos, A. Sauré

Pauta Control 3

Miércoles 19 de Junio de 2002

Pregunta 1

1. La cadena que modela el número de centrales en reparación toma la siguiente forma (las tasas de transición son las especificadas en la figura):



Para esta cadena basta que las tasas λ y μ sean mayores que 0 para que exista estado estacionario.[1]

Dado que este es un proceso de nacimiento y muerte, las probabilidades estacionarias toman la siguiente forma (se puede apreciar de la figura):

$$\pi_k = \binom{N}{k}(\frac{\lambda}{\mu})^k \cdot \pi_0$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(\frac{\lambda}{\mu})^k}$$

Reconociendo el binomio de Newton se llega a:

$$\pi_0 = \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N}$$

2. En promedio las Centrales demoran $\frac{1}{\mu}$ horas en ser reparadas[2]

[1] Dado que la cadena es finita e irreductible
[2] Lo dice el enunciado!!

3. El número de fallas por unidad de tiempo será:

$$E(\text{Fallas/hora}) = \sum_{k=0}^{N} \pi_k \cdot \lambda \cdot (N-k) = N \cdot \lambda - \sum_{k=0}^{N} \frac{\binom{N}{k}(\frac{\lambda}{\mu})^k}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N} \cdot \lambda \cdot k$$

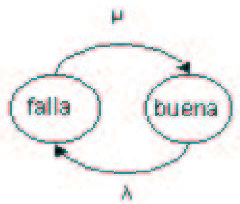
Factorizando por λ y reconociendo la forma de la esperanza de una binomial (N, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$), se llega al siguiente resultado:

$$E(\text{Fallas/hora}) = \lambda \cdot N \cdot (1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}) = \lambda \cdot N \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

4. Little dice $L = W \cdot \overline{\lambda}$. En la parte b se calculo W. En la parte d se calculo $\overline{\lambda}$. Entonces ocupando nuestros sofisticados conocimientos algebraicos se tiene:

$$L = \frac{N \cdot \lambda}{\lambda + \mu}$$

5. **Bonus**: Para responder esta pregunta existen muchas alternativas (intuición, Teoría de renovación, suerte, etc.). En esta pseudo-pauta construiremos una cadena que represente el estado de un Central en particular. Es fácil ver que la cadena toma la siguiente forma:



Resolviendo el pseudo-sistema de ecuaciones se tiene que:

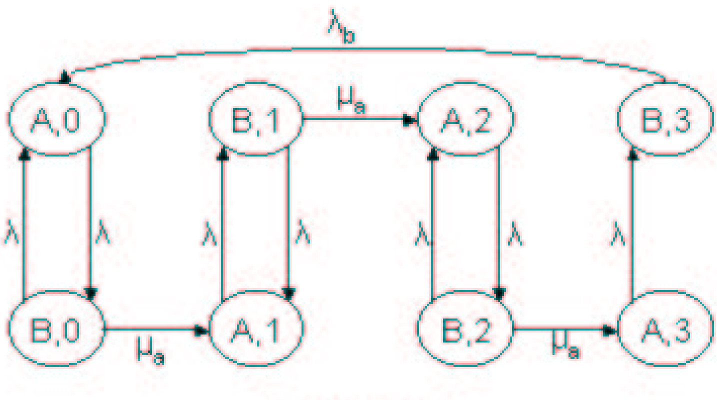
$$\pi_{falla} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Pregunta 2

1. Los estados pueden ser definidos por par ordenado (i, j) donde:

$$\begin{aligned} i &= \text{Pololo al que se encuentra visitando, con } i \in \{A, B\} \\ j &= \text{Número de interrupciones acumuladas, con } i \in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Es así como la cadena toma la siguiente forma (las tasas de transición son las especificadas en la figura):



Cadena Original

Las ecuaciones de estado estacionario serán las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\pi_{A,0} \cdot \lambda &= \pi_{B,3} \cdot \lambda_B + \pi_{B,0} \cdot \lambda \\
\pi_{A,0} \cdot \lambda &= \pi_{B,0} \cdot (\lambda + \mu_A) \\
\pi_{A,1} \cdot \lambda &= \pi_{B,1} \cdot \lambda + \pi_{B,0} \cdot \mu_A \\
\pi_{A,1} \cdot \lambda &= \pi_{B,1} \cdot (\lambda + \mu_A) \\
\pi_{A,2} \cdot \lambda &= \pi_{B,2} \cdot \lambda + \pi_{B,1} \cdot \mu_A \\
\pi_{A,2} \cdot \lambda &= \pi_{B,2} \cdot (\lambda + \mu_A) \\
\pi_{A,3} \cdot \lambda &= \pi_{B,2} \cdot \mu_A \\
\pi_{A,3} \cdot \lambda &= \pi_{B,3} \cdot \lambda_B \\
\textstyle\sum_e \pi_e &= 1
\end{aligned}
$$

Para esta cadena basta que las tasas λ, λ_B y μ_A sean mayores que 0 para que exista estado estacionario.[3]

2. Las llamadas perdidas por unidad de tiempo son $= \pi_{B,3} \cdot \mu_A$.

3. Entonces calculamos con el clásico $\frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}}$.

$$P = \frac{\mu_A(\pi_{B,0} + \pi_{B,1} + \pi_{B,2})}{\lambda(\pi_{A,0} + \pi_{A,1} + \pi_{A,2} + \pi_{A,3})}$$

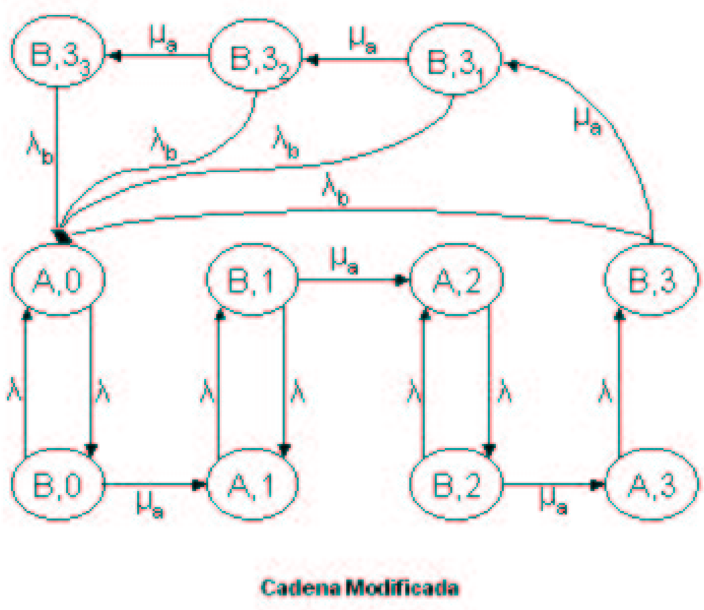
4. Basta con asegurar que :

$$\pi_{A,0} + \pi_{A,1} + \pi_{A,2} + \pi_{A,3} = \pi_{B,0} + \pi_{B,1} + \pi_{B,2} + \pi_{B,3} = \frac{1}{2}$$

Dadas las ecuaciones podemos despejar cada uno de estos términos en función de los parámetros del problema, y desde ahi encontrar el valor de λ_B que asegura esta igualdad.

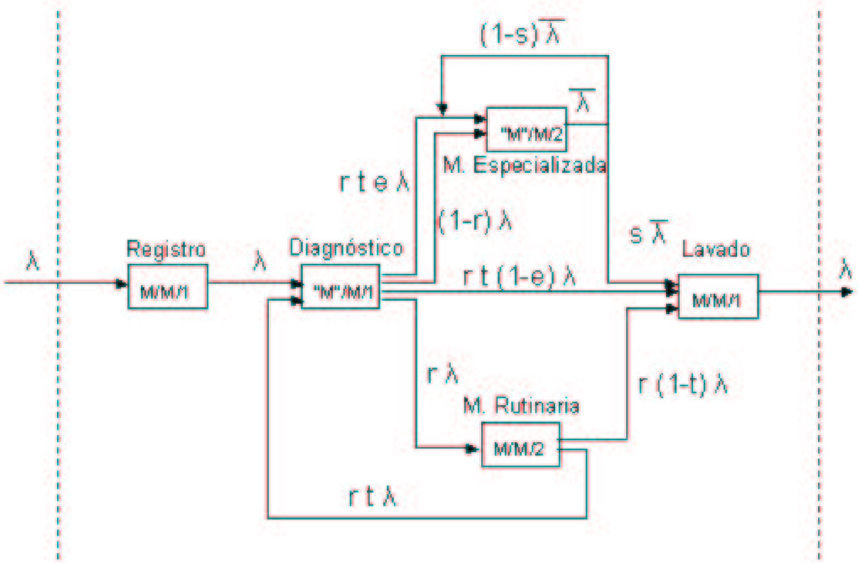
[3] Dado que la cadena es finita e irreductible

5. **Bonus**: La cadena toma la siguiente forma:



Pregunta 3

1. El sistema queda de la siguiente forma:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
Registro	λ_{Reg}	λ
Diagnóstico	λ_{Diag}	$\lambda + \lambda rt$
M. Especializada	λ_{Esp}	$\frac{\lambda\cdot(er+(1-r))}{s}$
M. Rutinaria	λ_{Rut}	$r\lambda$
Salida	λ_{Sal}	λ

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

Sistema	Condición
Registro	$\frac{\lambda_{Reg}}{\mu_1} < 1$
Diagnóstico	$\frac{\lambda_{Diag}}{\mu_2} < 1$
M. Especializada	$\frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3} < 1$
M. Rutinaria	$\frac{\lambda_{Rut}}{2\mu_4} < 1$
Salida	$\frac{\lambda_{Sal}}{\mu_5} < 1$

2. Procedemos como siempre:

$$\text{Fracción} = \frac{\text{Casos favorales}}{\text{Casos totales}} = \frac{\lambda rte}{\lambda rte + (1-r)\lambda}$$

3. Para esta parte utilizamos las formulas de los sistemas de colas clásicos y la formula de Little. De esta forma, dao que se conoce completamente la trayectoria que seguira el auto, se puede ver que:

$$E(\text{Tiempo}) = E(\text{T Registro}) + E(\text{T Diagnóstico}) + E(\text{T especialista}) + E(\text{T Salida})$$

Utilizando los resultados elementales la expresión queda:

$$E(\text{Tiempo}) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_1} + \frac{\lambda_{Diag}}{\lambda_{Diag}+\mu_2} + E(\text{T especialista}) + \frac{\lambda_{Sal}}{\lambda_{Sal}+\mu_3}$$

Por otro lado se puede calcular el tiempo en el subsistema de Especialistas condicionando sobre N= Número de veces que se reingresa al sistema de especialistas. De esta forma:

$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\text{T Especialista dado N= k}) \cdot P(\text{N=k})$$

$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=0}^{\infty} (K+1)E(\text{T Reparación})s(1-s)^k$$

$$E(\text{T Especialista}) = \sum_{k=0}^{\infty} (K+1)\frac{\frac{\lambda_{Esp}}{\mu_3}}{1-(\frac{\lambda_{Esp}}{2\mu_3})^2}s(1-s)^k$$

$$E(\text{T Especialista}) = \frac{4\lambda_{Esp}\cdot\mu_3}{4\mu_3^2+\lambda_{Esp}^2}\cdot(1+\frac{1-s}{s}) = \frac{4\lambda_{Esp}\cdot\mu_3}{s(4\mu_3^2+\lambda_{Esp}^2)}$$

4. No tiene sentido realizar una pauta tan abierta como esta.

Consultas y errores a
nyankovi@dii.uchile.cl dsaure@dii.uchile.cl