DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2004
Prof: P. Rey, R. Epstein, D. Sauré.

Pauta Control 3

Problema 1

1. La cadena que permite modelar esta situación debe almacenar en sus estados información tanto del número de pasajeros adultos como del número de pasajeros escolares que transporta el colectivo, de esta manera se tienen los estados se definen como pares (i, j) en que i denota el nmero de pasajeros adultos en el colectivo y j el número de escolares en el colectivo.

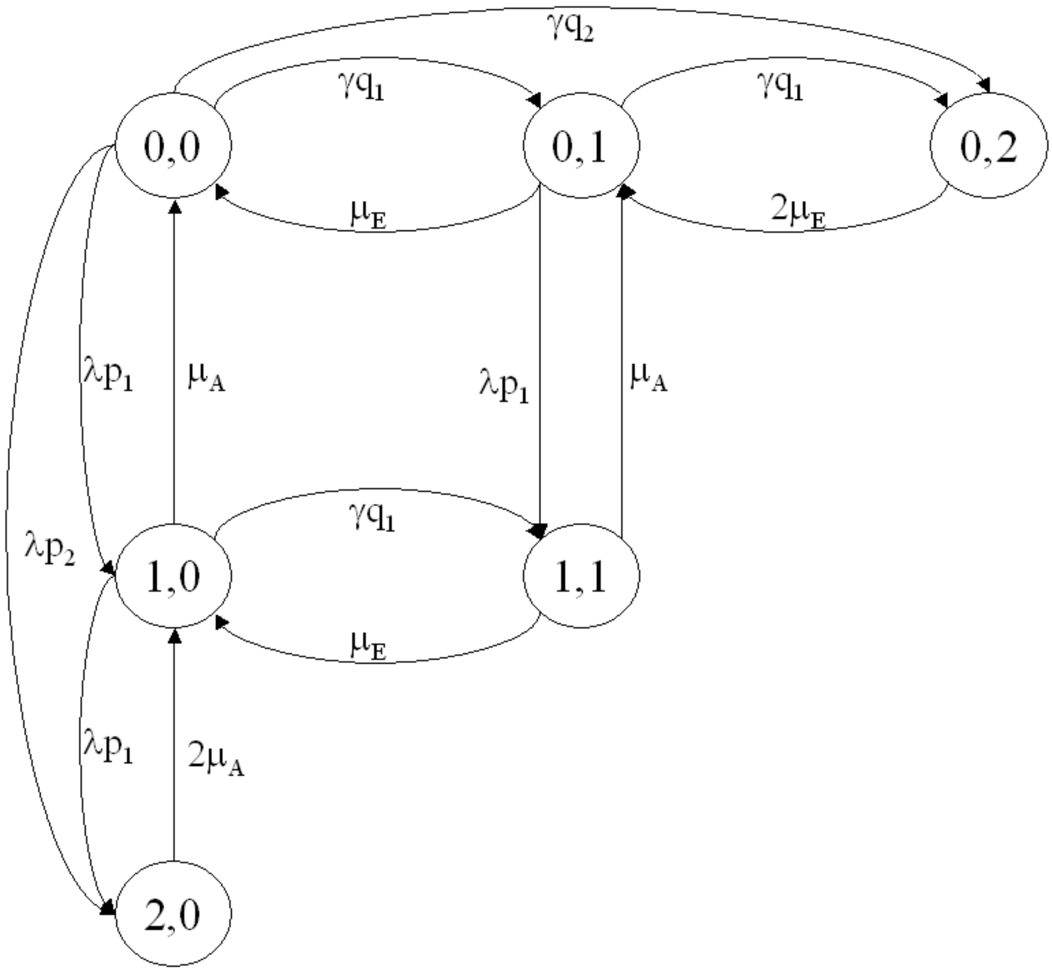

Figura 1: Cadena problema 1

Esta cadena admite probabilidades esatcionarias ya que es finita e irreductible, es decir, todos sus estados están comunicados, las ecuaciones que permiten despejar estas probabilidades son las siguientes:

- $\pi_{00} \cdot (\lambda(p_1 + p_2) + \gamma(q_1 + q_2)) = \pi_{10} \cdot \mu_A + \pi_{01} \cdot \mu_E$
- $\pi_{10} \cdot (\lambda p_1 + \gamma q_1 + \mu_A) = \pi_{20} \cdot 2\mu_A + \pi_{00} \cdot \lambda p_1 + \pi_{11} \cdot \mu_E$
- $\pi_{01} \cdot (\lambda p_1 + \gamma q_1 + \mu_E) = \pi_{02} \cdot 2\mu_E + \pi_{00} \cdot \gamma q_1 + \pi_{11} \cdot \mu_A$
- $\pi_{20} \cdot 2\mu_A = \pi_{10} \cdot \lambda p_1 + \pi_{00} \cdot \lambda p_2$
- $\pi_{02} \cdot 2\mu_E = \pi_{01} \cdot \gamma q_1 + \pi_{00} \cdot \gamma q_2$
- $\pi_{11} \cdot (\mu_A + \mu_E) = \pi_{01} \cdot \lambda p_1 + \pi_{10} \cdot \gamma q_1$
- $\pi_{00} + \pi_{01} + \pi_{10} + \pi_{11} + \pi_{20} + \pi_{02} = 1$

2. La fracción del tiempo, en el largo plazo, que hay escolares en el colectivo corresponde a la suma de las probabilidades estacionarias asociadas a los estados en que hay uno o dos escolares abordo del vehículo, la fracción del tiempo que hay adultos dentro del colectivo se obtiene de forma análoga.

   - Fraccíon del tiemo que hay escolares en el colectivo $f_E = \pi_{01} + \pi_{11} + \pi_{02}$
   - Fraccíon del tiemo que hay Adultos en el colectivo $f_A = \pi_{10} + \pi_{11} + \pi_{20}$

3. La capacidad total del colectivo es de dos pasajeros, luego la capacidad del colectivo ocupada por escolares corresponde a:

$$\tfrac{1}{2} \cdot (\pi_{01} + \pi_{11} + 2\pi_{02})$$

   de la misma forma, la capacidad del colectivo ocupada por adultos corresponde a:

$$\tfrac{1}{2} \cdot (\pi_{10} + \pi_{11} + 2\pi_{20})$$

4. El beneficio diario debe tomar en cuenta tanto los costos asociados a la operacón del colectivo como los ingresos por la venta de pasajes.

$$E[Beneficios] = \pi_{00} \cdot (A \cdot \lambda(p_1 + 2p_2) + E \cdot \gamma(q_1 + 2q_2)) + (\pi_{01} + \pi_{10}) \cdot (A \cdot \lambda p_1 + E \cdot \gamma q_1) - B - H$$

5. Para calcular el tiempo esperado que un escolar (adulto) pasa en el colectivo, se puede utilizar la ecuación de Little $W = \frac{L}{\lambda}$, de esta forma se debe calcular primero el número promedio de escolares (adultos) en el colectivo y luego de la tasa efectiva de llegada de escolares (adultos) al colectivo.

   Para el caso de los escolares, se tiene:

$$\lambda_E = \pi_{00} \cdot \gamma(q_1 + 2q_2)) + (\pi_{01} + \pi_{10}) \cdot \gamma q_1$$
$$L_E = \pi_{01} + \pi_{11} + 2\pi_{02}$$

   Mientras que para el caso de los adultos,

$$\lambda_A = \pi_{00} \cdot \lambda(p_1 + 2p_2)) + (\pi_{01} + \pi_{10}) \cdot \lambda p_1$$
$$L_A = \pi_{10} + \pi_{11} + 2\pi_{20}$$

De esta forma los valores pedidos se calculan como,

$$W_E = \frac{L_E}{\lambda_E} \text{ y } W_A = \frac{L_A}{\lambda_A}$$

6. Para modelar esta situación más general es necesario separar cuatro casos:

   - Caso $0,0$ $\forall i \leq M_A, j \leq M_E$

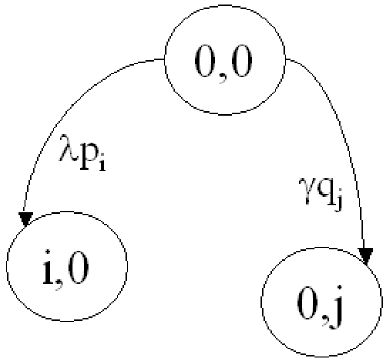

Figura 2: Cadena Caso 0,0

   - Caso $i,0$ $\forall 0 < i \leq M_A, k \leq Min\{M_A, N-i\}, j \leq Min\{M_E, N-i\}$

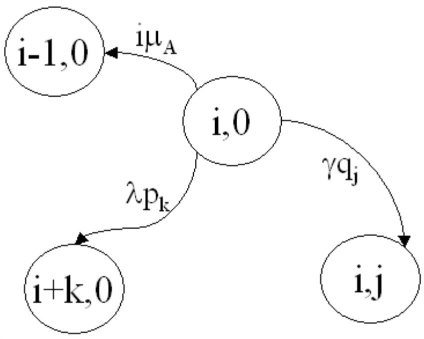

Figura 3: Cadena Caso i,0

- Caso $0, j$ $\forall 0 < j \leq M_E, i \leq Min\{M_A, N-j\}, k \leq Min\{M_E, N-j\}$

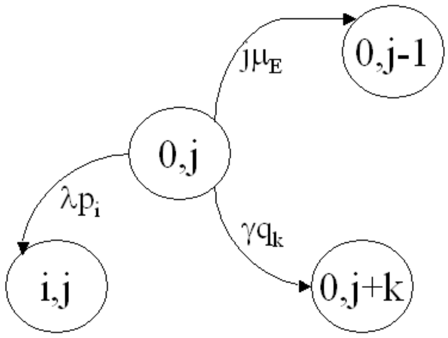

Figura 4: Cadena Caso 0,j

- Caso $i, 0$ $\forall 0 < i \leq M_A, 0 < j \leq M_E, k \leq Min\{M_A, N-i-j\}, h \leq Min\{M_E, N-i-j\}$

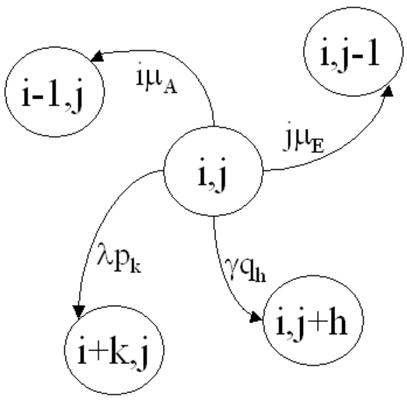

Figura 5: Cadena Caso i,j

Para calcular la probabilidad de que, habiendo i ay j escolares en el microbús, es necesario darse cuenta de que este evento es equivalente a que una *v.a.* exponencial de parámetro μ_A sea menor que $i-1$ *v.a.* exponenciales de paámetro μ_A y j *v.a.* exponenciales de paámetro μ_E, luego la probabilidad pedida es:

$$\frac{i \cdot \mu_A}{i \cdot \mu_A + j \cdot \mu_E}$$

Problema 2

1. Como el largo de un mensaje es una *v.a.* exponencial de media μ caracteres y cada caracter se demora $\frac{1}{T}$[minutos] en ser enviado, se tiene que el tiempo que demora un mensaje en ser enviado se distribuye exponencial de media $\frac{\mu}{T}$[minutos].

2. Esta cadena representa la situación descrita, en que los estados indican el número de mensajes en espera.

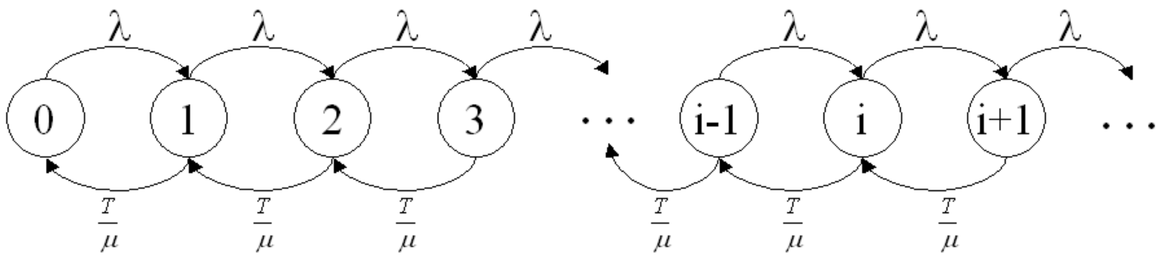

Figura 6: Espera de mensajes Transmitidos

   Es claro que este sistema correponde a una cola del tipo $M/M/1$, con un sólo servidor, capacidad infinita, llegadas exponenciales de tasa λ[mensajes/minuto] y tiempo de atención (salida) exponenciales de media $\frac{\mu}{T}$[minutos].

3. Se deben considerar tanto los mensajes que están esperando para ser transmitidos como aquel que ha sido interrumpido y no alcanzó a enviarse completamente. Como el largo de los mensajes sigue una distribución exponencial el largo de la fracción de mensaje que no alcanzó a ser enviada sigue la misma distribución que el largo de un mensaje completa cualquiera (pérdida de memoria de la exponencial) luego, si habían i mensajes en cola al interrumpirse la transmisión, el valor esperado del número de mensajes caracteres que no alcanzaron a ser enviados corresponde a $\mu \cdot (i+1)$ ya que debe considerarse la fracción que no alcanzó a ser enviada del mensaje que se estaba transmitiendo.

   De esta forma en número esperado de caracteres que no se logra enviar si depués de mucho tiempo se corta la energía es

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu \cdot (i+1) \cdot \pi_i$$

4. La nueva situación se puede representar por la siguiente cadena

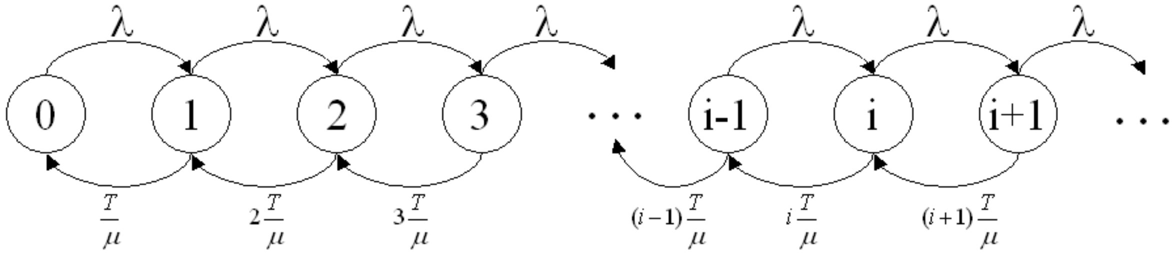

Figura 7: Mensajes en el sistema de transmisión

La cantidad de mensajes dentro del sistema se puede obtener mediante la ecuación de Little. Como este sistema corresponde a una cola $M/M/\infty$ tenenmos que la tasa efectiva de llegada correponde a λ y que el tiempo esperado dentro del sistema sorresponde al tiempo esperado de atención $W = \frac{\mu}{T}$, luego

$$L = \lambda \cdot W = \lambda \cdot \frac{\mu}{T} = \frac{\lambda\mu}{T}$$

La fracción de tiempo que el caché pasará desocupado corresponde a π_0.

Utilizando la conocida relación $\pi_i = \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \cdot \pi_0$ se tiene

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{(\frac{T}{\mu})^i \cdot i!} \cdot \pi_0$$

luego

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^i}{T^i \cdot i!} \cdot \pi_0 = 1$$

$$\pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^i}{T^i \cdot i!} = \pi_0 \cdot e^{\frac{\lambda\mu}{T}} = 1$$

$$\pi_0 = e^{\frac{-\lambda\mu}{T}}$$

5. Este sistema claramente corresponde a una cola del tipo $M/M/\infty$, es decir, con infinitos servidores, capacidad infinita, llegadas exponenciales de tasa λ[mensajes/minuto] y tiempo de atención (salida) exponenciales de media $\frac{\mu}{T}$[minutos].

Problema 3

1. La cadena resultante se muestra en la figura 8. Existen probabilidades estacionarias para esta cadena ya que es irreducible y finita.

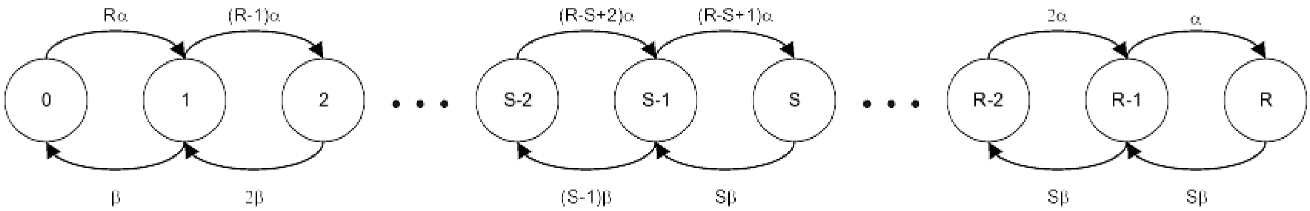

Figura 8: Cadena parte 1.

2. En el caso particular que se define en el enunciado, la cadena resultante es la que se muestra en la figura 9

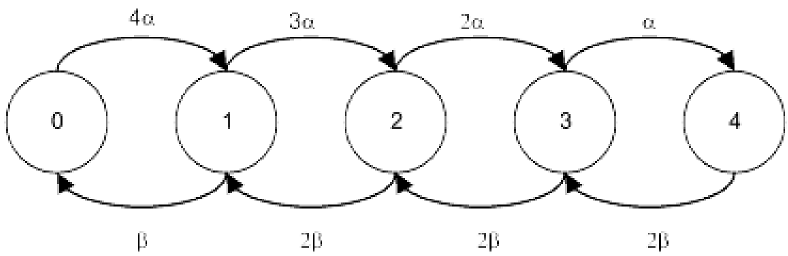

Figura 9: Cadena parte 2.

3. Las probabilidades estacionarias pueden ser obtenidas usando las ecuaciones en "cortes":

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{4\alpha}{\beta}\pi_0 &= \quad 0,4\,\pi_0 &\approx 0,2728 \\
\pi_2 &= \frac{3\alpha}{2\beta}\pi_1 &= \quad 0,06\,\pi_0 &\approx 0,041 \\
\pi_3 &= \frac{\alpha}{\beta}\pi_2 &= \quad 0,006\,\pi_0 &\approx 0,004 \\
\pi_4 &= \frac{\alpha}{2\beta}\pi_3 &= \quad 0,0006\,\pi_0 &\approx 0,0002
\end{aligned} \tag{1}
$$

Con estas relaciones y usando la ecuación $\sum \pi_i = 1$ obtenemos que

$$\pi_0 = \frac{1}{1,4663} = 0,682$$

y con este valor calculamos los valores que se muestran en la última columna de las ecuaciones (1).

4. El número promedio de de máquinas funcionando se puede calcular a partir de las probabilidades estacionarias:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{4}(4-i)\,\pi_i &= 4\,\pi_0 + 3\,\pi_1 + 2\,\pi_2 + \pi_3 \\
&= \pi_0\left[4 + 12\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 12\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 6\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\right] \\
&= 0,682 \times 5,326 \\
&= 3,63\,.
\end{aligned}$$

El número de máquinas esperando en el taller se puede calcular como

$$2\,\pi_4 + \pi_3 = \pi_3\,\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1,1 \times \pi_3 = 0,0044\,.$$

5. La tasa promedio de fallas la calculamos de la siguiente manera:

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=0}^{4} \alpha\,(4-i)\,\pi_i = \alpha\,\left[\sum_{i=0}^{4}(4-i)\,\pi_i\right] = \alpha\,\left[4 - \sum_{i=0}^{4} i\,\pi_i\right] = \frac{3,63}{30} = 0,121\,.$$

Observando el producto que aparece en el cuarto miembro arriba, este es el producto entre la tasa individual de fallas y el número de máquinas que están funcionando, en promedio.

6. Para calcular el tiempo que una máquina pasa fuera de producción (i.e. en el taller), podemos usar Little y la tasa efectiva de fallas calculada en el punto anterior:

$$W = \frac{L}{\bar{\alpha}} = \frac{4-3,63}{0,121} = 3,06 \text{ días.}$$

7. Una máquina comienza a ser reparada inmediatamente cuando falla si alguno de los técnicos está desocupado. La fracción del tiempo que alguno de los técnicos está desocupado puede ser calculada como

$$\pi_0 + \pi_1 = 0,682 + 0,2728 \approx 0,995\,.$$

`Dudas, consultas y comentarios a`
`dyung@ing.uchile.cl`