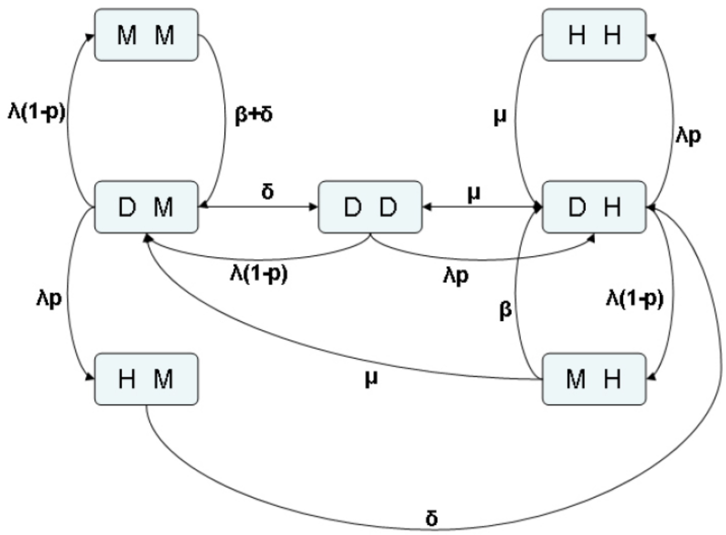
Auxiliar 8: Markov Continuo

Martes 20 de Octubre de 2009

Problema 1

1. La cadena de Markov queda de la siguiente forma:



2. Tenemos una cadena irreducible y finita → Existen probabilidades estacionarias.
   Para encontrarlas debemos plantear el sistema de ecuaciones de balance en los nodos. El sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{DM} \cdot \gamma + \pi_{DH} \cdot \mu \\
\pi_{DM} \cdot (\lambda + \gamma) &= \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) + \pi_{DD} \cdot \lambda(1-p) + \pi_{MH} \cdot \mu \\
\pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) &= \pi_{DM} \cdot \lambda(1-p) \\
\pi_{HM} \cdot \gamma &= \pi_{DM} \cdot \lambda p \\
\pi_{DH} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{HH} \cdot \mu + \pi_{DD} \cdot \lambda p + \pi_{MH} \cdot \beta + \pi_{HM} \cdot \gamma \\
\pi_{HH} \cdot \mu &= \pi_{DH} \cdot \lambda p \\
\pi_{MH} \cdot (\beta + \mu) &= \pi_{DH} \cdot \lambda(1-p) \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

3. Consideramos conocidas las probabilidades estacionarias:

   a) Primero identificamos los estados en los cuales, de llegar un alumno, se deberá retirar por que encuentra ambos lugares ocupados. Entonces, dado que en cada uno de estos estados la tasa de llegada de alumnos es la misma (λ), tendremos que:

$$E[\text{Alumnos perdidos}] = \lambda \cdot (\pi_{MM} + \pi_{HH} + \pi_{HM} + \pi_{MH})$$

b) Si un hombre llega y encuentra un lugar, la esperanza del tiempo de espera dependerá del estado en el que encuentra al sistema. De esta forma:

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD}+\pi_{DM}+\pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD}+\pi_{DM}+\pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD}+\pi_{DM}+\pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

c) Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es un hombre, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

$$\frac{\beta}{\beta+\mu}$$

Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es una mujer, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\gamma}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

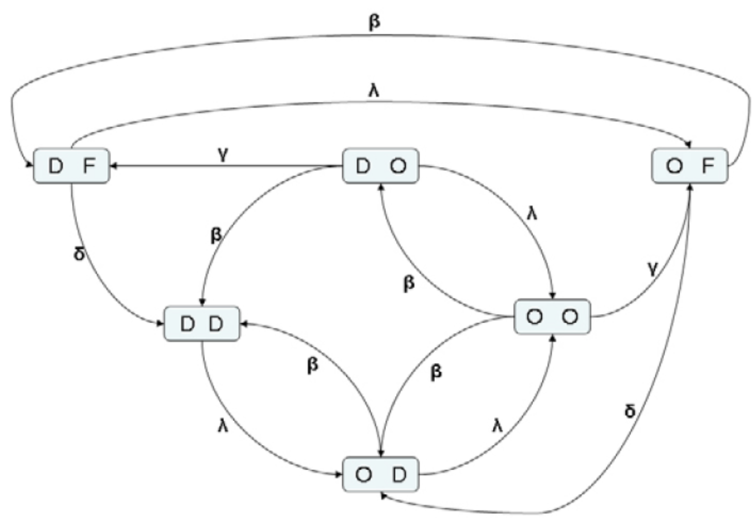
$$\frac{\beta}{\beta+\gamma}$$

Para calcular la probabilidad solo debemos ponderar por la probabilidad de encontrar al sistema en un estado en particular.

$$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD}+\pi_{DM}+\pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta+\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD}+\pi_{DM}+\pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta+\gamma}$$

Problema 2

1. La cadena asociada al problema se muestra en la figura.



En esta cadena, la primera coordenada indica el estado de ocupación del equipo de alta calidad y la segunda el estado del equipo de baja calidad.

La cadena ilustrada es irreducible y finita, por lo que podemos asegurar que existirá una ley de probabilidades estacionarias. Las ecuaciones necesarias para su cálculo son las siguientes (ecuaciones de balance):

$$\begin{aligned}
\pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{OD} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \beta + \pi_{DF} \cdot \delta \\
\pi_{OD} \cdot (\lambda + \beta) &= \pi_{DD} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \beta + \pi_{OF} \cdot \delta \\
\pi_{OO} \cdot (2 \cdot \beta + \gamma) &= \pi_{OD} \cdot \lambda + \pi_{DO} \cdot \lambda \\
\pi_{DO} \cdot (\lambda + \beta + \gamma) &= \pi_{OO} \cdot \beta \\
\pi_{OF} \cdot (\delta + \beta) &= \pi_{DF} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \gamma \\
\pi_{DF} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{OF} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \gamma \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

2. Para responder esta pregunta debemos identificar los estados en los cuales se rechazan solicitudes, interpretar las probabilidades estacionarias como fracción en el largo plazo que el sistema se encuentra en un estado y identificar la tasa efectiva de rechazos para cada estado. Con esto tendremos que:

$$E[\text{Rechazos}] = \pi_{OO} \cdot \lambda + \pi_{OF} \cdot \lambda$$

3. Nuevamente interpretamos las probabilidades estacionarias como fracción del tiempo que se permanece en un estado en el largo plazo. Entonces:

$$\text{Tasa equipo alta calidad} = \pi_{OD} + \pi_{OO} + \pi_{OF}$$

y

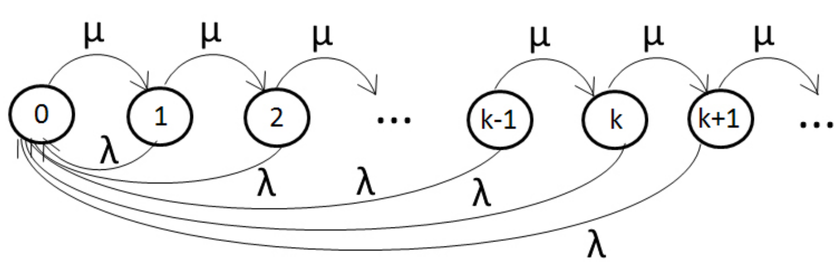
$$\text{Tasa equipo baja calidad} = \pi_{DO} + \pi_{OO}$$

4. Independiente del estado del sistema la distribución del tiempo de falla y de duración de la presentación se mantienen invariantes. Entonces la pregunta es ¿cuál es la probabilidad que el valor de una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro β sea menor al valor de una de distribución exponencial de parámetro γ. Llamando a esta probabilidad P tendremos que:

$$P = \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Problema 3

Modelamos el problema con la siguiente cadena de Markov en tiempo continuo:



1. Utilizamos el principio de igualdad de tasas en todos los estados:

   - `Estado 0:`

$$\mu\pi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\pi_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = \lambda(1 - \pi_0)$$

Despejando se obtiene:

$$\pi_0 = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

- `Estado 1:`

$$\mu\pi_1 + \lambda\pi_1 = \mu\pi_0$$

  Luego:

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

- `Estado k:` En general

$$\mu\pi_k + \lambda\pi_k = \mu\pi_{k-1}$$

  Por lo tanto

$$\pi_k = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\pi_{k-1} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k \pi_0 = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

b) La espera es simplemente el tiempo esperado de que llegue un bus, lo cual es la media de una VA exponencial de tasa λ. Luego:

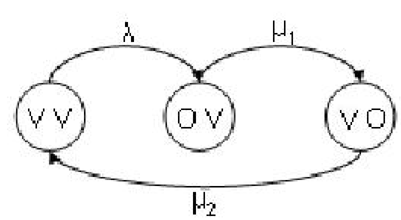
$$Tiempo = \frac{1}{\lambda}$$

c)

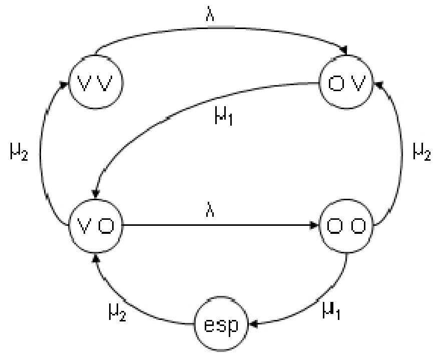
$$\begin{aligned}
Largo\ de\ cola\ promedio &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k \pi_0 \\
&= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k \\
&= \pi_0 \frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{\left(1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2} \\
&= \frac{\mu}{\lambda}
\end{aligned}$$

Problema 4

1. La cadena (y las tasas de transición) se muestran en la figura .



2. Es importante notar que en una cadena de Markov en tiempo continuo los tiempos entre transiciones deben distribuirse exponencialmente. Por esto es que debemos modelar explícitamente el estado en el cual la persona sentada en el primer asiento se encuentra esperando. De acuerdo a esto, la cadena es la mostrada en la figura .



3. Para esto necesitaremos calcular las probabilidades estacionarias. Las ecuaciones (conservación de flujo) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\Pi_{VV}\lambda &= \Pi_{VO}\mu_2 \\
\Pi_{OV}\mu_1 &= \Pi_{VV}\lambda + \Pi_{OO}\mu_2 \\
\Pi_{VO}(\lambda+\mu_2) &= \Pi_{VO}\mu_1 + \Pi_{ESP}\mu_2 \\
\Pi_{OO}(\mu_1+\mu_2) &= \Pi_{VO}\lambda \\
\Pi_{ESP}\mu_2 &= \Pi_{OO}\mu_1 \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Suponiendo los valores de Π como conocidos y utilizando el mismo tipo de argumento de la pregunta 2 tendremos que:

$$\text{Fracción} = \Pi_{VV} + \Pi_{VO}$$

4. Utilizando la parte anterior, la tasa efectiva de entrada será:

$$\lambda \cdot [\Pi_{VV} + \Pi_{VO}]$$

5. Interpretando las probabilidades estacionarias la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$E[\text{Personas en el sistema}] = \Pi_{VO} + \Pi_{OV} + 2 \cdot \Pi_{OO} + 2 \cdot \Pi_{Esp}$$

6. Si llega y los dos puestos están vacíos estará en el local en promedio $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$. Si llega y el segundo puesto está ocupado, estará en promedio:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}$$

Esto puesto que siempre deberá estar el tiempo de atención en la primera silla y en la segunda silla y con una probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ deberá esperar la atención del tipo en la segunda silla.

Ocupando probabilidades totales:

$$E[T] = \frac{\Pi_{VV}}{\Pi_{VV}+\Pi_{VO}} \cdot [\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}] + \frac{\Pi_{VO}}{\Pi_{VV}+\Pi_{VO}} \cdot [\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}]$$