

## Auxiliar 7: Cadenas de Markov Discretas y con beneficios

Martes 6 de Septiembre de 2009

### Problema 1

En un famoso casino, existe un traga monedas con sólo dos ventanas, en cada una de las cuáles puede aparecer una piña o un guinda. Dado los años de uso es sabido que la máquina está descalibrada y opera de la siguiente manera: cada vez que un jugador inserta una ficha y tira de la palanca, las dos ventanas funcionan en forma independiente. La probabilidad que en la segunda ventana aparezca una guinda es siempre  $r$ , en cambio en la primera ventana la probabilidad que aparezca una guinda es  $q$ , si antes había aparecido una guinda, y  $p$  si antes había aparecido una piña.

El sistema de apuesta es el siguiente: Antes de ingresar la moneda de  $C$  [u.m.] usted debe predecir el resultado **exacto**<sup>1</sup> de la jugada. Si acierta recupera la inversión y gana  $G$  [u.m.] adicionales. De lo contrario pierde la inversión y debe pagar  $T$  [u.m.] adicionales.

1. (2,5 pts) Modele los resultados de la máquina traga monedas como una cadena de Markov en tiempo discreto. Indique claramente los estados, clases y probabilidades de transición, justificando cada una de ellas.
2. (1,5 pts) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitiría encontrarlas (no es necesario calcularlas).
3. (1,0 pts) Suponga que usted llega al casino y encuentra el traga monedas desocupado (luego de haber sido utilizado durante “mucho” tiempo). Sin ver el estado actual de la máquina, usted escoge equiprobablemente cualquiera de los posibles resultados en que las 2 ventanas son iguales y tira de la palanca. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta jugada?. (Suponga conocidas las probabilidades estacionarias).
4. (1,0 pts) Ahora suponga que pagando  $W$  [u.m.] adicionales (inversión que no se recupera) usted puede retrasar su apuesta hasta una vez conocido el resultado de la primera ventana. Así, su decisión consiste en predecir si el resultado de la segunda ventana es igual o diferente al de la primera. Considere que su estrategia es decir siempre la figura contraria a la de la primera ventanilla y el traga monedas lleva funcionando “mucho” tiempo. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta nueva estrategia de juego bajo este nuevo sistema?.

### Problema 2

Giusseppe Mandinga, un dedicado estudiante de nuestra escuela, está preocupado con el estrés que le está produciendo tanto estudio este semestre. Para mantener su salud, ha decidido dedicar las noches de los viernes para salir y “ventilar la mente”. Para ello ha elegido cuatro locales de entretenimiento nocturna de una conocida zona de Santiago. Los locales que ha elegido son “L1”, “L2”, “L3” y “L4”.

Según información que nos proporcionó un amigo cercano, Giusseppe decide a qué local dirigirse cada fin de semana de acuerdo a los siguientes criterios:

- Si el show de la semana anterior le gustó, este viernes se dirige al mismo local.
- Si el espectáculo al que acudió la semana anterior no le gustó, este semana concurrirá a otro local. En este caso el próximo local a visitar (de los tres posibles) es escogido equiprobablemente.

---

<sup>1</sup>Esto es predecir correctamente la figura de la primera ventana y la figura de la segunda ventana

Además, nuestro informante nos comentó, a partir de su experiencia como compañero de salidas de Mandinga, que él sale satisfecho del local “L $i$ ” con una probabilidad  $p_i$ , que es igual todas las semanas e independiente de todas las salidas anteriores. En particular, nos garantiza con certeza absoluta que el espectáculo de “L4” le gustará a Giuseppe siempre (es decir  $p_4 = 1$ ).

1. (2,0 ptos.) Construya una cadena de Markov que represente las salidas de los viernes de Giuseppe Mandinga. Construya un grafo que la represente. Identifique las clases de estados de esta cadena y clasifíquelas en transientes y recurrentes. Para las clases recurrentes determine el período de cada una. Identifique las probabilidades de transición entre estados.
2. (1,0 ptos.) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas. ¿Podemos afirmar, que a partir de algún momento, Mandinga concurrirá todas las semanas a mismo local? En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos lo hará? Justifique.

Considere ahora que las entradas en cualquiera de los cuatro locales mencionados tienen un valor  $\$E$  y que todos los locales tienen la política de realizar un descuento de valor  $\$F$  si es presentada una entrada de la semana anterior (i.e. Giuseppe se gana un descuento si concurre dos semanas seguidas al mismo local).

3. (0,5 ptos.) Determine el costo asociado a una transición en el estado estacionario. ¿Qué interpretación tiene este valor en nuestro caso?
4. (2,5 ptos.) Suponiendo que las probabilidades de que un espectáculo le guste a Giuseppe en los locales “L1”, “L2” y “L3” son  $p_1 = p_2 = 0,4$ ,  $p_3 = 0,7$ , respectivamente, determine un vector asintótico de beneficios relativos ( $W$ ). Interprete el resultado obtenido.  
A partir de estos valores, y sin cálculos adicionales, ¿es posible determinar cuántas semanas, en promedio, Mandinga deberá esperar para descubrir el local en el que siempre le gustará el espectáculo?
5. (Bonus, 1,0 pto.) Demuestre que el vector asintótico de beneficios relativos obtenido en el punto anterior no depende de las probabilidades  $p_1, p_2, p_3$  cuando se fija  $W_4$  en 0. O sea, el vector obtenido es el mismo para  $p_1, p_2$  y  $p_3$  elegidos arbitrariamente entre 0 y 1.

### Problema 3

El asaltante de bancos internacional Brian Boitano, alias Ultraman, ha concentrado sus atracos en tres países: A, B y C. Ultraman asalta solo una vez por año y elige su próximo destino con igual probabilidad, sin repetirlo.

El departamento de policía de estos 3 países se han propuesto detener a Ultraman en el momento que intente ingresar o salir del país, pues una vez dentro del territorio la búsqueda es muy difícil. La siguiente tabla muestra la probabilidad que la policía de estos 3 países detenga al asaltante cuando este intente atravesar la frontera.

País	Probabilidad
A	0,1
B	0,2
C	0,4

En promedio, un robo en un banco del país A le reporta un botín de 1000, un robo en B un botín de 3000 y uno en C un botín de 7000. El costo de transporte de un país a otro para Boitano se presenta en la siguiente tabla:

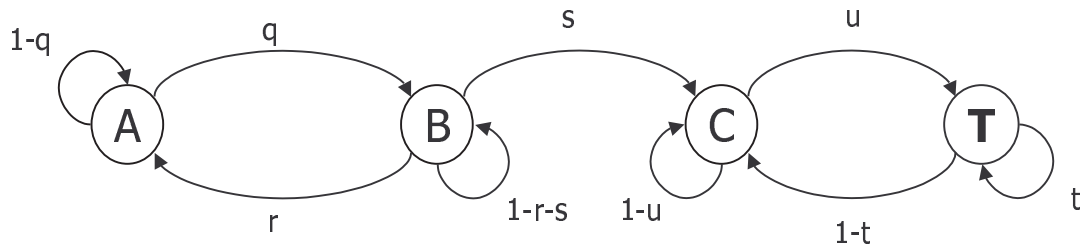
	A	B	C
A	0	500	1000
B	500	0	2000
C	1000	2000	0

En base a lo anterior y suponiendo que si la policía atrapa a Boitano, este permanecerá eternamente en la cárcel, responda:

1. Construya un modelo que permita determinar en términos esperados el botín acumulado por Boitano en los próximos  $n$  años si acaba de ingresar en A sin ser descubierto. Determine el monto acumulado en los próximos 3 años?.
2. Si Ultraman acaba de Ingresar en B sin ser descubierto, en cuantos años esperaría usted que lo atrapen?

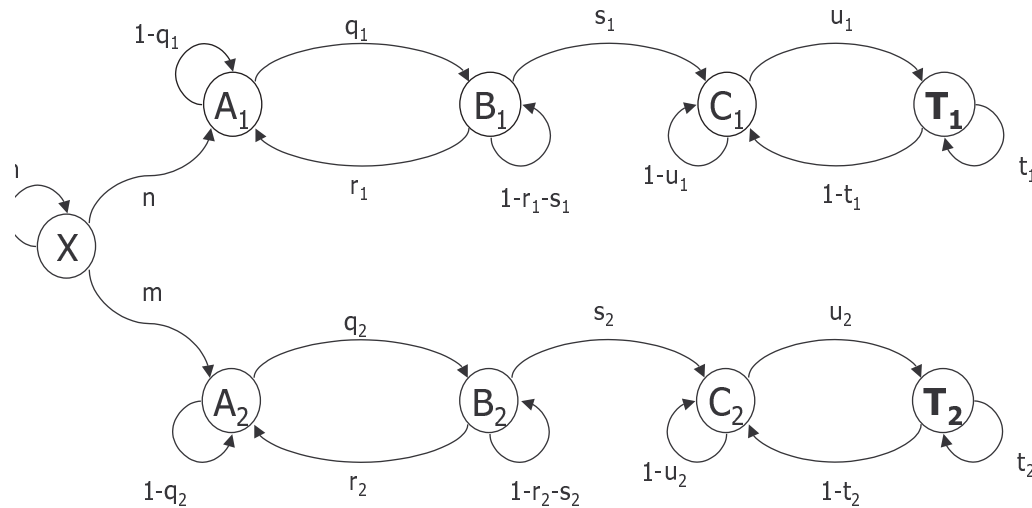
#### Problema 4

1. (3,0 pts) Se tiene un sistema cuyos estados pueden ser modelados como la siguiente Cadena de Markov en tiempo discreto.



En esta cadena el estado  $T$ , se denomina *nodo terminal*. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado  $A$ , calcule el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal*.

2. (3.0 pts.) Se tiene otro sistema cuyos estados pueden ser modelados como la siguiente Cadena de Markov en tiempo discreto.



En esta cadena los estados  $T_1$  y  $T_2$  se denominan nodos terminales. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado  $X$ , calcule el número esperado de transiciones hasta visitar por primera vez alguno de los nodos terminales.