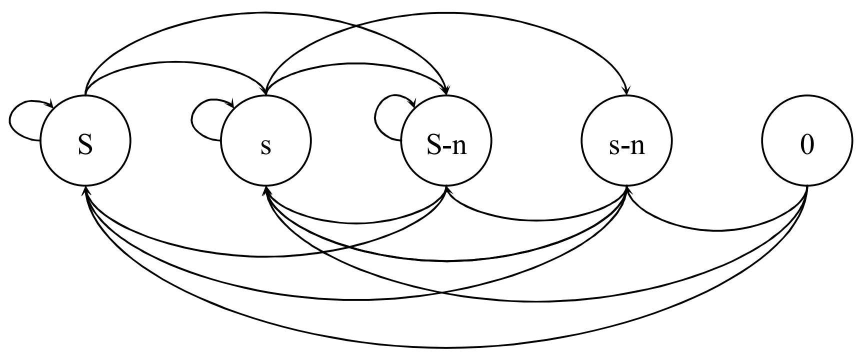
Pauta Control 2

Problema 1

Estados: $E \in \{0,....,S\}$, inventario al final del día.

• **Caso** $n \leq S$

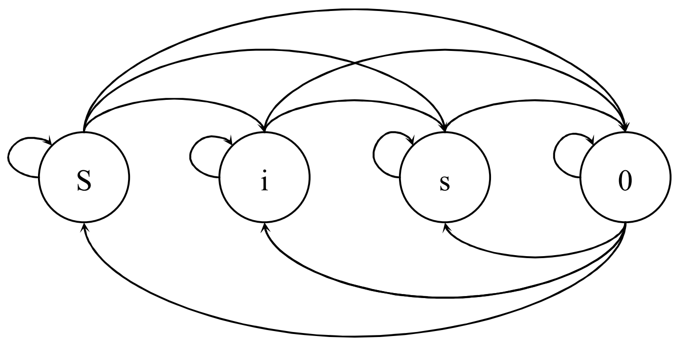
$$P_{ij} = \begin{cases} i < \bar{s} \wedge j \geq S - n: & a_{S-j} \\ i \geq \bar{s} \wedge i > j \wedge i - j \leq n: & a_{i-j} \\ i \geq \bar{s} \wedge j = 0 & \sum_{k=i}^{\infty} a_k \\ resto: & 0 \end{cases}$$



Clase recurrente: $\{\bar{s} - n,..., S\}$
Clase transiente: $\{0,...., \bar{s} - n - 1\}$ si $n > \bar{s}$

• **Caso** $n > S$

$$P_{ij} = \begin{cases} i < \bar{s} \wedge j > 0: & a_{S-j} \\ i \leq \bar{s} \wedge j = 0: & \sum_{k=S}^{\infty} a_k \\ i \geq \bar{s} \wedge i > j \wedge j > 0: & a_{i-j} \\ i \geq \bar{s} \wedge j = 0: & \sum_{k=i}^{\infty} a_k \\ resto: & 0 \end{cases}$$



Clase recurrente: $\{0,\ldots,S\}$
No hay clase transiente

Problema 2

a) $P(N_{no}(10) = n / N(10) = 1000) = \binom{1000}{n} p^n (1-p)^{1000-n}$

b) Dado que sabemos que llegaron 1000 votos en 10 horas, sabemos que estos se distribuyen uniformemente en el tiempo.

$$
\begin{aligned}
&P\big(N_{no}(0,4) = n / N(0,10) = 1000\big) \\
&= \sum_{m \geq n} P(N_{no}(4) = n / N(4) = m) \cdot P(N(4) = m) \\
&= \sum_{m \geq n} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \cdot \binom{1000}{m} 0{,}4^m 0{,}6^{1000-m}
\end{aligned}
$$

c) $N_{no}(t) \rightarrow Poisson(\lambda pt) \Rightarrow$ tiempo entre votos no (T_{no}) es exponencial

$\Rightarrow f_{T_{no}}(t) = \lambda p \cdot e^{-\lambda pt}$, en particular para el tiempo de llegada del primer No.

d) $P(N_{si}(primer_{no}) = k) = p^n \cdot q \;, \quad \forall n \geq 0$

e) Sea R_2 el tiempo entre el primer reverso y el segundo reverso. Si el primer reverso fue un *si*, entonces la esperanza para el próximo reverso (voto *no*) es la esperanza de una Poisson(λp): $\frac{1}{\lambda p}$. Análogamente, si el primer reverso fue un *no*, la esperanza para el próximo reverso (voto *si*) es $\frac{1}{\lambda(1-p)}$.

Además, se tiene que el **primer reverso** es un voto *si* cuando el **primer voto** es *no*, lo cual ocurre con probabilidad *p*. De la misma forma, el **primer reverso** es un voto *no* cuando el **primer voto** es un *si*, por lo que la probabilidad es 1-*p*. De esta forma:

$$
\begin{aligned}
&E(R_2) \\
&= E(R_2 / reverso_1 = si) \cdot P(reverso_1 = si) + E(R_2 / reverso_1 = no) \cdot P(reverso_1 = no) \\
&= E(R_2 / voto_1 = no) \cdot P(voto_1 = no) + E(R_2 / voto_1 = si) \cdot P(voto_1 = si) \\
&= \frac{1}{\lambda p} p + \frac{1}{\lambda(1-p)}(1-p) \\
&= \frac{2}{\lambda}
\end{aligned}
$$

f) Cuando han votado 2*n*-1 personas, sabemos con seguridad que una de las preferencias alcanzó los *n* votos. La probabilidad que haya sido el *no* es $\binom{2n-1}{n} p^n (1-p)^{2n-1}$. Esta probabilidad es la misma que en el momento que el *no* alcanza los *n* votos.

Problema 3

a) Sea $N(t) \to Poisson(\lambda t)$ el proceso de conteo de autos y $T \to \exp(\lambda)$ el tiempo entre autos.

La probabilidad que no sea atropellado es la probabilidad que el tiempo entre autos sea mayor que s:

$$P(T > s) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda s}$$

b) Sea $X_i \to \exp(\lambda)$ el tiempo entre el auto *i* y el auto *i*+1 para todo *i*>0, y sea T el tiempo que demora en cruzar la calle.

$$E(T) = s + \sum_{k=0}^{\infty} E(T / X_0,...,X_k < s \wedge X_{k+1} > s) \cdot P(X_0,...,X_k < s \wedge X_{k+1} > s)$$

$$= s + \sum_{k=0}^{\infty} E(X_0 + ... + X_k / X_0,...,X_k < s \wedge X_{k+1} > s) \cdot (1 - e^{-\lambda s})^k e^{-\lambda s}$$

$$= s + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} E(X_i / X_i < s) \right) \cdot (1 - e^{-\lambda s})^k e^{-\lambda s}$$

$$= s + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\int_0^c t\lambda e^{-\lambda t}\,dt}{\int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\,dt} \cdot (1 - e^{-\lambda s})^k e^{-\lambda s}$$

$$= s + \frac{\int_0^c t\lambda e^{-\lambda t}\,dt}{\int_0^c \lambda e^{-\lambda t}\,dt} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1 - e^{-\lambda s})^k e^{-\lambda s}$$

$$= \frac{e^{-\lambda s} - 1}{\lambda}$$