DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2003
Prof: P. Rey, A. Schilkrut.
P. Aux: J. Guajardo, P. Hernández, J.A. Muñoz.

PAUTA CONTROL 2
17 de Octubre, 2003

Problema 1

1. Los estados son los siguientes:
   - (0): La consulta está vacía y el doctor tocará guitarra durante esa hora.
   - $(1,1,0)$: Hay un paciente atendiéndose, el cuál está en su primera hora de atención y la sala de espera esta vacía.
   - $(1,1,1)$: Hay un paciente atendiéndose, el cuál está en su primera hora de atención y en la sala de espera hay una persona.
   - $(1,2,0)$: Hay un paciente atendiéndose, el cuál está en su segunda hora de atención y la sala de espera esta vacía.
   - $(1,2,1)$: Hay un paciente atendiéndose, el cuál está en su segunda hora de atención y en la sala de espera hay una persona.
   - $(1,2,2)$: Hay un paciente atendiéndose, el cuál está en su segunda hora de atención y en la sala de espera hay dos personas.

   Es importante notar que sólo se puede estar en el estado $(1,1,2)$, si se parte en él. Como asumimos que el consultorio parte vacío, entonces nunca se llega a dicho estado y por lo tanto podemos no incluirlo en la cadena.

   La cadena se muestra en la siguiente figura:

   Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Por lo tanto, existen probabilidades estacionarias.

2. En esta parte consideramos conocido el vector Π de probabilidades estacionarias.

   a) Para responder a esta pregunta debemos ver que condiciones deben darse en cada estado para que existan pacientes que se retiren indignados. Esto sucede en los siguientes casos:
   - (0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo (i.e., a partir del tercero).
   - $(1,1,0)$: Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
   - $(1,1,1)$: Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
   - $(1,2,0)$: Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
   - $(1,2,1)$: Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
   - $(1,2,2)$: Todos los pacientes que lleguen.

   Por lo tanto, denotando por E_1 a la esperanza de la cantidad de pacientes que una hora se retiran indignados se tiene que

$$\begin{aligned} E_1 &= \Pi_0 \cdot \sum_{k>2}(k-2)\cdot\alpha_{0k} + \Pi_{(1,1,0)}\cdot\sum_{k>2}(k-2)\cdot\alpha_{1k} + \Pi_{(1,1,1)}\cdot\sum_{k>1}(k-1)\cdot\alpha_{2k} \\ &\quad + \Pi_{(1,2,0)}\cdot\sum_{k>2}(k-2)\cdot\alpha_{1k} + \Pi_{(1,2,1)}\cdot\sum_{k>1}(k-1)\cdot\alpha_{2k} + \Pi_{(1,2,2)}\cdot\sum_{k>0}k\cdot\alpha_{3k}\,. \end{aligned}$$

b) Si un paciente logró entrar al sistema pudo haberlo hecho en los siguientes estados: (0), $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,1)$ o $(1,2,1)$. Por lo tanto, dado que el paciente entró al sistema, los "casos favorables" a considerar son los asociados a estos cinco estados.

Para determinar los "casos favorables" analicemos lo que sucede en cada uno de estos estados.

- Estados $(1,1,1)$ y $(1,2,1)$: En estos estados el paciente nunca será atendido en la siguiente hora, ya que ya había una persona esperando y ella será atendida antes (recuerde que el médico atiende por orden de llegada).
- Estado (0): El paciente será atendido en la próxima hora si es el primero en llegar. Esto puede suceder si es el único en llegar o si llegan más de uno y es el primero de ellos.
- Estado $(1,1,0)$: Este caso es análogo al anterior, pero hay que considerar la posibilidad de que el paciente que actualmente se está atendiendo requiera una segunda hora con el médico.
- Estado $(1,2,0)$: Este caso es análogo al caso del estado (0).

Denotemos por Π_{CT} a la probabilidad de estar en alguno de los cinco estados "favorables", es decir

$$\Pi_{CT} = \Pi_0 + \Pi_{(1,1,0)} + \Pi_{(1,2,0)} + \Pi_{(1,1,1)} + \Pi_{(1,2,1)}\,.$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

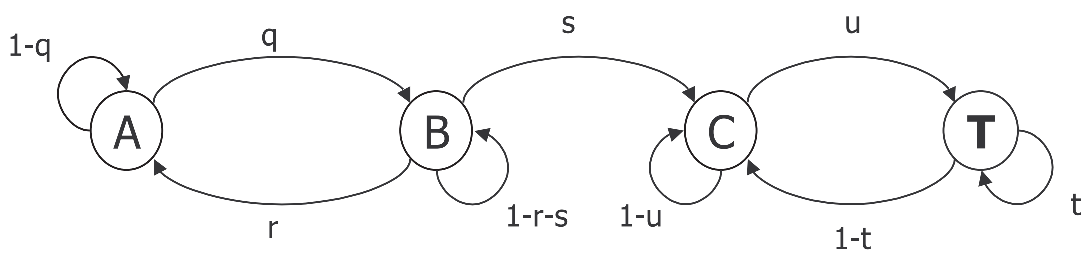
$$P = \frac{1}{\Pi_{CT}}\left[\Pi_0\left(\alpha_{01} + \tfrac{1}{2}\alpha_{02}^{+}\right) + \Pi_{(1,1,0)}\cdot p\left(\alpha_{11} + \tfrac{1}{2}\alpha_{12}^{+}\right) + \Pi_{(1,2,0)}\left(\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\alpha_{22}^{+}\right)\right]$$

c) Los pacientes que disfrutan de la música de Pepe, lo hacen cuando llegan y logran entrar mientras el médico está desocupado. Luego la esperanza pedida es:

$$E_2 = \Pi_0(1\cdot\alpha_{01} + 2\cdot\alpha_{02}^{+})$$

Problema 2

1. La cadena de esa parte es:



En la cual se tiene que los estados A y B forman un clase transiente y los estados C y T. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado A y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal*, podemos descomponer esta esperanza como la suma de los siguientes 2 términos:

- El número esperado de transiciones hasta llegar al estado C, partiendo de A, lo que corresponde a W_A si utilizamos la estructura de contador de permanencia en el transiente.
- El número esperado de transiciones hasta llegar por primera vez al estado T, partiendo de C. Sea esta esperanza $E_{C,T}$.

Si denotamos a la esperanza pedida como E_A, se tiene que:

$$E_A = W_A + E_{C,T}$$

Para calcular W_A, utilizamos la siguiente estructura de costos de contador de permanencia en el transiente:

$$\widehat{r}_A = 1 \qquad \widehat{r}_B = 1 \qquad \widehat{r}_C = 0 \qquad \widehat{r}_T = 0$$

En esta caso $g = 0$, ya que los estados transientes que tienen costos distintos de cero tienen probabilidades estacionarias nulas, por lo que debemos resolver el sistema:

$$[I - P]\overrightarrow{W} = \widehat{r} \qquad W_C = 0 \qquad W_T = 0^1$$

Reemplazando con los valores de la cadena:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ r & 1-r-s & s & 0 \\ 0 & 0 & 1-u & u \\ 0 & 0 & 1-t & t \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego se tiene que:

$$\begin{pmatrix} q & -q & 0 & 0 \\ -r & r+s & -s & 0 \\ 0 & 0 & u & -u \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $W_C = W_T = 0$, del sistema matricial anterior se obtiene el siguiente sistema de 2X2.

$$qW_A - qW_B = 1 \qquad -rW_F + (r+s)W_U = 1$$

De donde fácilmente se obtiene que:

$$W_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s}$$

Para calcular el término de $E_{C,T}$ se tiene que:

$$E_{C,T} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^{k-1} \cdot u$$

[1] Corresponde a los estados recurrentes

Reordenando y usando la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ entregada en el enunciado, se tiene que:

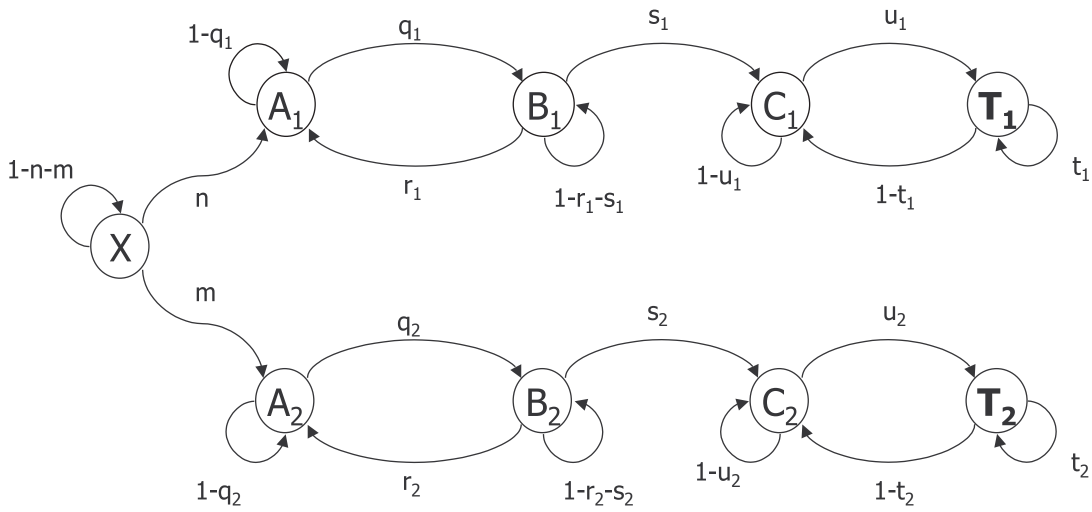
$$E_{C,T} = \frac{1-q}{q} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^k = \frac{u}{1-u} \cdot \frac{1-u}{u^2} = \frac{1}{u}$$

Este resulatdo también se puede obtener directamente observando que la variable aleatoria a la cual le calculamos la esperanza es una geómetrica, cuya valor se entrega en el enunciado.

Finalmente:

$$E_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s} + \frac{1}{u}$$

2. Para la siguiente cadena:



Si inicialmente se encuentra en el estado X y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar por primera vez alguno de los nodos terminales (E_{X,T_1,T_2}), podemos separar esta esperanza en 3 partes:

- Esperanza del número de transiciones hasta salir del estado X. Llamemos E_X a este valor.
- Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 1 (con probabilidad P_{X,A_1}), inicialmente se encuentra en el estado A_1 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_1, lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.
- Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 2 (con probabilidad P_{X,A_2}), inicialmente se encuentra en el estado A_2 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_2, lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.

Esto es:

$$E_{X,T_1,T_2} = E_X + [E_{A_1,T_1}/X \rightsquigarrow A_1] \cdot P_{X,A_1} + [E_{A_2,T_2}/X \rightsquigarrow A_2] \cdot P_{X,A_2}$$

El primer término se calcula de la misma forma que el segundo término de la parte 1. Esto es:

$$E_X = \frac{1}{n+m}$$

Los términos $[E_{A_1,T_1}/X \rightsquigarrow A_1]$ y $[E_{A_2,T_2}/X \rightsquigarrow A_2]$, corresponden a la esperanza calculada en la parte 1 para 2 casos particulares. Es decir:

$$[E_{A_1,T_1}/X \rightsquigarrow A_1] = \frac{r_1+s_1+q_1}{q_1 \cdot s_1} + \frac{1}{u_1} \qquad [E_{A_2,T_2}/X \rightsquigarrow A_2] = \frac{r_2+s_2+q_2}{q_2 \cdot s_2} + \frac{1}{u_2}$$

Por último las probabilidades de ir a la sub-cadena 1 y 2 respectivamente, dado que se salió de X están dadas por:

$$P_{X,A_1} = \frac{n}{n+m} \qquad P_{X,A_2} = \frac{m}{n+m}$$

Por lo tanto:

$$E_{X,T_1,T_2} = \frac{1}{n+m} + \left[\frac{r_1+s_1+q_1}{q_1 \cdot s_1} + \frac{1}{u_1}\right] \cdot \frac{n}{n+m} + \left[\frac{r_2+s_2+q_2}{q_2 \cdot s_2} + \frac{1}{u_2}\right] \cdot \frac{m}{n+m}$$

Problema 3

1. Pendiente

2. Después de cada test, D crece en uno con probabilidad $P_1(1-P_2)$, baja en uno con probabilidad $(1-P_1)P_2$ o queda igual con probabilidad $P_1P_2 + (1-P_1)(1-P_2)$. Sólo nos interesan los pares en que D cambia, por lo tanto si descartamos los pares en que D no cambia, la diferencia sube en uno con probabilidad

$$\begin{aligned} p &= P[\text{sube } 1|\text{subió } 1\text{o bajó } 1] \\ &= \frac{P_1(1-P_2)}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2} \end{aligned}$$

y baja 1 con probabilidad

$$q = 1 - p = \frac{(1-P_1)P_2}{P_1(1-P_2)+(1-P_1)P_2}$$

La probabilidad de que el test afirme que $P_2 > P_1$ es igual a la probabilidad de que el jugador que gana un ficha con probabilidad p baje M antes de subir M. De acuerdo a la ecuación de la parte 1 ($F_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$), con $i = M$, $N = 2M$, esta probabilidad está dada por

$$\begin{aligned} P[\text{test afirme que } P_2 > P_1] &= 1 - \frac{1-(q/p)^M}{1-(q/p)^{2M}} \\ &= \frac{1}{1+(p/q)^M} \end{aligned}$$

Dudas, Consultas y/o Errores
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl