Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Control 2
13 de Mayo de 2005

Problema 1

Considere la situación de Armijo Catalán, quien vive al costado de una de las recientemente inauguradas autopistas concesionadas. Armijo debe, al comienzo de cada día, caminar hasta la pasarela más cercana con el propósito de cruzar la carretera y de esa forma tomar locomoción que lo lleve a su lugar de trabajo. El problema de Armijo es que la pasarela más cercana se encuentra a 3 km de distancia.

Armijo ha llegado constantemente tarde a su trabajo por lo que ha sido advertido por su empleador de que el próximo retraso desencadenará irremediablemente su despido.

Lamentablemente esta mañana Armijo se ha levantado nuevamente tarde y su única opción para evitar un nuevo retraso es cruzar la carretera directamente, sin caminar hasta la pasarela.

Para empeorar las cosas, esta mañana existe una neblina tal que Armijo sólo puede ver los vehículos cuando pasan frente a él. Además considere que los automovilistas tampoco ven a Armijo.

Armijo, que ha observado por varias horas el flujo vehicular a esas horas de la mañana, ha logrado recopilar los siguientes datos:

- Ambas vías, la que va hacia el sur (que es la primera que debe enfrentar Armijo) y la que va hacia el norte poseen solo una pista. A lo ancho de cada pista cabe exactamente un vehículo. Consideraremos que los vehículos son *idénticos*: tienen largo L, ancho A y viajan a rapidez constante V.
- La distancia entre la parte de atrás de un vehículo y la parte delantera del próximo en pasar (por la misma pista) se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro λ_s para la pista hacia el sur y parámetro λ_n para la pista hacia el norte.
- Entre ambas pistas existe un bandejón con el espacio exacto para que quepa una persona, sin ser pasada a llevar por los vehículos de ambas pistas. El ancho de este bandejón es una distancia despreciable con respecto al ancho de las pistas.

Considerando dicha información, Armijo se decide a cruzar la carretera. Para esto ocupará la siguiente estrategia: Esperará que pase el próximo auto hacia el sur y correrá hasta el bandejón central. Luego esperará que pase el siguiente auto hacia el Norte y cruzará corriendo (considere que Armijo corre a una velocidad W y que es extremadamente flaco).

1. (1,0 Pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo muera atropellado?
2. (1,0 Pto.) Comente la estrategia de Armijo y compárela con la versión simplificada "corre si es que puedes"[1].

Tras algunos minutos en que ningún auto ha pasado, Armijo nota que la neblina se despeja, por lo que modifica su estrategia a "no morir"[2].

[1] Esto es: Cruzar la pista sur si no hay ningún vehículo pasando frente a Armijo. Una vez que cruza esta primera pista, repite el procedimiento en la pista norte.

[2] Esto es: no cruzar una pista si el próximo vehículo que pasará arrollará a Armijo (suponga que Armijo es capaz de determinar con certeza la distancia entre dos puntos cualesquiera).

3. (1,5 Ptos.) Calcule el tiempo esperado que Armijo demorará en cruzar la carretera si él decide que durante el lapso de tiempo que se encuentre cruzando la carretera no debe pasar ningún automóvil (por ninguna de las pistas).

Finalmente Armijo se confunde y decide aceptar el hecho de que llegará tarde al trabajo y que será despedido. Con esto Armijo decide no intentar cruzar la carretera y dedicará la tarde a contar automóviles.

4. (1,5 Ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que tras t horas de observación haya visto pasar más de N automóviles yendo hacia el sur? [3]
5. (1,0 Pto.) Considere ahora que Armijo sólo distingue objetos que se encuentran a una distancia de hasta K km. Si tan sólo un automóvil ha pasado (completo) tras t horas de observación, ¿cuál es la probabilidad de que Armijo aún pueda distinguirlo a la distancia?

Problema 2

Armijo, un peligroso criminal que ha escapado recientemente de la cárcel, al verse perseguido por la policía decidió entrar en la línea del metro, con la intención de confundirse entre los numerosos pasajeros que utilizan este transporte público.

De acuerdo a King, un reconocido detective, la línea del metro consta de 24 estaciones, y tiene la particularidad de que se puede viajar directamente de ida y vuelta entre sus estaciones terminales[4]. Es posible viajar, desde cada estación a cualquiera de las dos estaciones contiguas, es decir, de cada estación salen trenes en ambos sentidos.

Armijo se ha dado cuenta de que King lo ha seguido hasta el metro por lo que ha decidido viajar erráticamente dentro de la red del metro.

Si se designan las estaciones por los números $1, 2, 3, \ldots, 24$ las probabilidades que describen el desplazamiento de este peligroso criminal en la red del metro son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \frac{1}{i+1} \quad \forall i \in 1, \ldots, 23 \\ P_{i,i-1} &= \frac{i}{i+1} \quad \forall i \in 2, \ldots, 24 \\ P_{24,1} &= \frac{1}{25} \\ P_{1,24} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ademas, dado que sólo se puede ir directamente entre estaciones contiguas, si i y j no son estaciones contiguas, entonces $P_{ij} = 0$. Recuerde que la estación i es contigua con las estaciones $(i-1)$ e $(i+1)$ si $2 \leq i \leq 23$, que la estación 1 es contigua a las estaciones 2 y 24 y que la estación 24, lo es a las estaciones 1 y 23. También $P_{i,i} = 0$ para todas las estaciones $i = 1, \ldots, 24$.

Conociendo la forma en que Armijo se moviliza dentro de la red del metro, el famoso detective, haciendo uso de sus conocimientos, decide modelar la ubicación del criminal utilizando una cadena de Markov en tiempo discreto, utilizando como supuesto que de cada estación sale un tren en cada dirección posible cada exactamente 2 minutos y que los tiempos de viaje entre cada estación son despreciables.

1. (1,5 Ptos.) Modele la ubicación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto, clasifique los estados en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? ¿Por qué? Si la respuesta fuera afirmativa, plantee las ecuaciones que permiten obtenerlas[5].

[3] Considere que Armijo "ha visto pasar" un auto, cuando el auto ha pasado completamente frente a lugar donde Armijo se encuentra.

[4] Como si en la línea 1 del metro de Santiago las estaciones *Escuela Militar* y *San Pablo* tuvieran conexión directa.

[5] Explicite sólo los casos interesantes, NO es necesario dibujar toda la cadena.

Luego de desarrollar el modelo anterior, el detective se ha dado cuenta de que la red consta, en realidad, con 25 estaciones[6], las probabilidades de transición se extienden trivialmente del caso anterior.

2. (1,5 Ptos.) Ante esta nueva situación, modele la ubicación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto, clasifique los estados en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, plantee las ecuaciones que permiten obtenerlas.

Junto con escapar, Armijo no olvida sus antiguos días, por lo que en cada estación hurta valiosas pertenencias de los usuarios del metro. En la estación j hurta especies por un valor $\$EH_j$.

3. (1,0 Pto.) ¿Cuál es el valor esperado del total de objetos que este hábil criminal en dos minutos en el largo plazo?
4. (1,0 Pto.) ¿Luego de más de 5 horas de fallidos esfuerzos, el detective no ha podido encontrar a Armijo, pero sabe que se encuentra en alguna de las primeras n estaciones ($2 < n < 25$). Dada esta información, ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo se encuentre entre la $(n-2)$-ésima y la n-ésima estación (inclusive).
5. (1,0 Pto.) Luego de 7 horas, King aún no logra dar con Armijo, por lo que considera 2 estrategias a seguir:
   - **Estrategia A:** Visitar alguna de las primeros 5 estaciones.
   - **Estrategia B:** Visitar alguna de las últimas 5 estaciones.

   ¿Qué estrategia recomendaría usted a King? ¿Por qué?

Problema 3

Parte 1

El servicio de urgencias de un hospital ha detectado que el comportamiento de las llegadas de ambulancias a dicha unidad puede ser descrito como un proceso de Poisson no homogéneo. Respecto a la función de intensidad de este proceso se ha observado que el día se divide en dos horarios: "horario diurno" de 8:00 a 20:00, en que las ambulancias llegan a una tasa de 3 [ambulancias/hora], mientras que el "horario nocturno", desde las 20:00 a las 8:00 del día siguiente, llegan a una tasa de 4 [ambulancias/hora].

1. (2,0 Ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que, en un día cualquiera, en el intervalo entre las 18:00 y las 22:00, lleguen exactamente k ambulancias al servicio de emergencias?
2. (2,0 Ptos.) Suponga que desde las 8:00 de un día hasta las 8:00 del día siguiente ha venido apenas una ambulancia. ¿Cuál es la probabilidad que esta ambulancia haya llegado durante el "horario diurno"?

Parte 2

Un biólogo está estudiando a dos manadas de una especie en peligro de extinción que viven en una reserva natural. Estas manadas son denominadas `X` e `Y` en su estudio y para describir su comportamiento el científico ha dividido la reserva en S sectores en donde cada manada puede estar cada día. También ha podido determinar que el movimiento de las manadas puede ser descrito como cadenas de Markov homogéneas $\{X_n\}$ para la manada `X` y $\{Y_n\}$ para la manada `Y`, probabilísticamente independientes entre sí. La variable X_n corresponde al sector donde se encuentra la manada `X` el día n. De manera análoga, Y_n corresponde al sector donde se encuentra la manada `Y` el día n.

La manera en que las manadas se desplazan dentro de la reserva está descrita por matrices de probabilidades de transición P para la manada `X` y Q para la manada `Y`, respectivamente.

[6] En todas las partes que siguen, considere que la red tiene 25 estaciones.

Dada la agresividad de estos animales el biólogo está particularmente interesado en controlar la fracción del tiempo que ambas manadas se encuentran en el mismo sector, ya que si esta fracción supera, en promedio, un cierto umbral habrá un enfrentamiento entre los dos grupos y la cantidad de estos animales aún vivos se verá reducida.

1. (2,0 Ptos.) El científico está considerando estudiar el proceso estocástico $\{Z_n = (X_n, Y_n)\}$ que describe el movimiento de *ambas* manadas simultáneamente.

   Justifique por qué este proceso estocástico es una cadena de Markov y calcule sus probabilidades de transición.
   Hint. Muestre que las probabilidades de transición están definidas por la relación

   $$P(Z_n = (j,l)|Z_{n-1} = (i,k)) = p_{ij}q_{kl}$$

   donde p_{ij} es la probabilidad que la manada `X` se translade al sector j en una transición si actualmente está en el sector i (es decir, p_{ij} es la "componente" $(i, j$ de la matriz P; análogamente se define q_{kl} para la manada `Y`.

Bonus (0,5 Ptos.) Suponga que las cadenas $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ son ergódicas y que se conocen las probabilidades estacionarias π^X para la cadena $\{X_n\}$ y π^Y, para la cadena $\{Y_n\}$, respectivamente. En este caso, la cadena $\{Z_n\}$ también es ergódica. Denotemos sus probabilidades estacionarias como el vector π^Z, cuya coordenada $\pi^Z_{(i,k)}$ representa la probabilidad estacionaria asociada al estado (i, k).

2. Estas probabilidades estacionaras satisfacen la relación $\pi^Z_{(i,k)} = \pi^X_i \pi^Y_k$. para cualquier par de sectores i, k.

   Argumente por qué esta afirmación es verdadera.