Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs.: R. Epstein, P. Rey
Aux.: C. Araya, T. Correa, J. Gacitúa,
L. Reus, R. Wolf

Solución Control 2
11 de Mayo de 2007

Problema 1

Considere un servicio de buses. Los buses pasan por el paradero en cuestión de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ buses por hora. Los pasajeros llegan al paradero siguiendo un proceso de Poisson de tasa μ pasajeros por hora. Ambos procesos son independientes entre sí. Además, el paradero es suficientemente grande para albergar a todos los usuarios que lleguen.

1. En una primera aproximación, considere que los buses tienen capacidad infinita (es decir son sufientemente grandes para llevar todos los pasajeros que estén esperando en el paradero). Bajo este supuesto,

   a) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que en un bus cualquiera se suban n pasajeros?

   RESPUESTA

   b) (1,5 ptos.) Utilizando el resultado del punto anterior, calcule el número esperado de pasajeros que se subirán a un bus cualquiera. Interprete el resultado.

   RESPUESTA

2. Considerando un caso más realista, suponga que los buses tienen capacidad para llevar C pasajeros y llegan vacíos al paradero en consideración. Suponga además, que los usuarios que están esperando un bus y no consiguen subirse no esperan el siguiente bus sino que eligen otro medio alternativo de locomoción. Bajo estos nuevos supuestos,

   a) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que en un bus cualquiera se suban n pasajeros?

   RESPUESTA

   b) (1,5 ptos.) Utilizando el resultado del punto anterior, calcule el número esperado de pasajeros que se subirán a un bus cualquiera. Interprete el resultado.

   RESPUESTA

Problema 2

Una fábrica cuenta con una máquina que realiza el acabado final de las piezas fabricadas. Este equipo es utilizado constantemente y al final del día se le realiza una inspección. Si durante la inspección se detecta que el equipo no funciona normalmente, éste es retirado de la línea y enviado al taller para ser reparado. En esta situación el equipo es sustituido por un equipo adicional que se tiene como reemplazo. Cuando el equipo se encuentra nuevamente en condiciones, se reintegra a la producción.

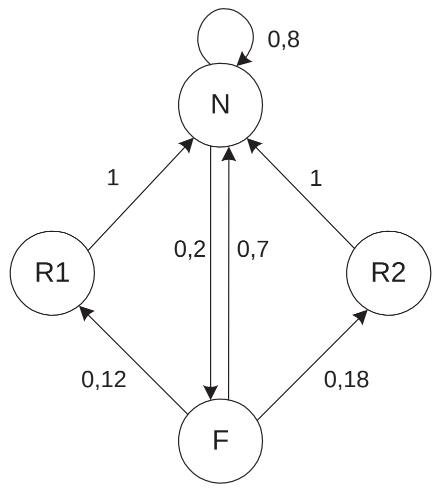
Un día cualquiera que el equipo está en uso tiene una probabilidad 0,2 de necesitar la reparación al final del día. Por otra parte, cada vez que el equipo es retirado de la línea, con probabilidad 0,7 la reparación se realizará en un solo día, mientras que en el 30 % de los casos restantes, demorará dos días. La reparación nunca demora 3 o más días.

El equipo de reemplazo no está en tan buenas condiciones, por lo que en un día de uso puede fallar con probabilidad 0,4. En caso que falle y el otro esté aún en reparación se debe parar la producción. Este equipo de reemplazo siempre es reparado en un día.

Considere que un día de producción con el equipo original produce un beneficio B, un día de producción con el equipo reemplazo produce un beneficio R.

1. (1,5 pto.) Modele el estado de la línea de producción descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Especifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

   Se puede definir una cadena con cuatro estados como la que se muestra en la figura.



   Los estados representan las siguientes condiciones para un día:

   - N: Uso normal de la máquina.
   - R1: Máquina en el primer día de reparación.
   - R2: Máquina en el segundo día de reparación, reemplazo en uso.
   - F: Máquina en el segundo día de reparación, reemplazo falló el primer día de uso.

2. (1,5 pto.) Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y calcúlelas.

   La cadena es finita, homogénea y ergódica (todos los estados están conectados y, por ejemplo, $p_{NN} > 0$ lo que implica que la clase es aperiódica).

   Las probabilidades estacionarias satisfacen el sistema:

$$\begin{aligned}
\pi_N &= 0{,}8\pi_N + 0{,}7\pi_{R1} + \pi_{R2} + \pi_F \\
\pi_{R1} &= 0{,}2\pi_N \\
\pi_{R2} &= 0{,}18\pi_{R1} \\
\pi_F &= 0{,}12\pi_{R1} \\
1 &= \pi_N + \pi_{R1} + \pi_{R2} + \pi_F\ .
\end{aligned}$$

   La solución de este sistema es: $\pi_N = 0{,}79$, $\pi_{R1} = 0{,}16$, $\pi_{R2} = 0{,}3$, $\pi_F = 0{,}2$.

3. (1,5 pto.) ¿Cuál es la fracción del tiempo que la línea de producción está parada (en el largo plazo)?

   La fracción del tiempo que la línea de producción está parada es $\pi_F = 0{,}02$.

4. (1,5 pto.) ¿Cuál es el beneficio esperado por día en largo plazo?

   Este beneficio esperado es igual a $B\pi_N + R(\pi_{R1} + \pi_{R2})$.

Problema 3

El gerente de una tienda está analizando la política de inventarios para el único producto que comercializa. La tienda abre de lunes a viernes. Los pedidos de mercadería se hacen durante el fin de semana, tanto la orden de compra como la recepción de la mercadería.

La cantidad de clientes que llegan una semana cualquiera con intenciones de comprar este producto es una variable aleatoria discreta i.i.d. entre semanas. Sea α_k la probabilidad que lleguen k clientes. La probabilidad que lleguen más de K clientes es nula. Si un cliente llega a la tienda y no hay producto esa venta se pierde, en caso contrario, con certeza, compra una unidad.

La política en consideración es del tipo (s, S): se revisa el inventario el viernes en la tarde y si se tienen hasta s unidades en inventario, no se realiza pedido. En caso de tener menos de s unidades, se realiza un pedido de manera de que el lunes al abrir el local se cuente con S unidades para la venta.

1. (2,0 ptos.) Modele el número de unidades en inventario al final de la semana como una cadena de Markov en tiempo discreto, donde el nivel de inventario máximo (S) es igual a K y s es un dato. Especifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

   El número de unidades en inventario al final de la semana se puede modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto con conjunto de estados $\{0, 1, 2, \ldots, S\}$ y cuyas probabilidades de transición están definidas por:

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_{S-j} & \text{si } i < s, \\ 0 & \text{si } i \geq s \text{ y } j > i \ , \\ \alpha_{i-j} & \text{si } i \geq s \text{ y } 1 < j \leq i, \\ \displaystyle\sum_{k=i}^{S} \alpha_k & \text{si } i \geq s \text{ y } j = 0. \end{cases}$$

2. (1,5 ptos.) Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y plantee un sistema que permita calcularlas.

   La cadena es finita, homogénea y ergódica (todos los estados están conectados y, por ejemplo, $p_{SS} > 0$ lo que implica que la clase es aperiódica).

   Obs. Aquí estamos suponiendo que los α_k son positivos. En caso que algunos de los α_k pudieran ser nulos, esta cadena puede quedar periódica. Por ejemplo, para el caso $S = K = 6$, $s = 2$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_i = 0$ para i distinto de 2.

3. Considere conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena del punto 1. Denote por π_j la probabilidad estacionaria asociada al estado j de esa cadena y responda:

   a) (1,5 pto.) ¿Cuál es el número esperado de ventas por semana? ¿Cuál es el número esperado de ventas *perdidas* por semana?

   En una semana que quedaron j unidades en inventario y que en la semana siguiente llegaron k clientes el número de ventas realizadas es: k si $j < s$ y $\min(j, k)$, si $j \geq s$. Por lo tanto, el número de ventas esperadas por semana es igual a

$$\sum_{k=0}^{S} \alpha_k \Big[\sum_{j=0}^{s-1} \pi_j \, k + \sum_{j=s}^{S} \pi_j \min(j, k) \Big] .$$

   De manera similar, en una semana que quedaron j unidades en inventario y que en la semana siguiente llegaron k clientes se pierden $k - j$ ventas si $j \geq s$ y $k > j$; en los otros casos no se pierden ventas. Por lo tanto, el número esperado de ventas perdidas por semana es igual a

$$\sum_{j=s}^{S-1} \sum_{k=j+1}^{S} \alpha_k \pi_j (k - j) .$$

También, el número esperado de ventas perdidas se puede calcular como la diferencia entre la demanda promedio $\sum_{k=0}^{S} \alpha_k \, k$ y el número esperado de ventas.

b) (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de realizar un pedido en una semana cualquiera en el largo plazo?

Esta probabilidad es igual a $\sum_{j=0}^{s-1} \pi_j$.