Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey, D. Sauré
Aux: C.Berner, M.Guajardo, A.Neely, D.Yung

Pauta Control 2 IN44A, 13 de Mayo de 2005

Problema 1

1. Si Armijo corre a una velocidad W demorará A/W en cruzar cada pista. Luego de dejar pasar el primer auto por la pista sur correrá y será atropellado si la distancia entre los autos no es la suficiente para cruzar completamente esta pista. Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{Muera atropellado pista sur}] &= P[\text{Tiempo entre autos } \leq \frac{A}{W}] \\ &= P[\text{Distancia entre autos } \leq V \cdot \frac{A}{W}] \\ &= 1 - e^{-\lambda_s \cdot V \cdot \frac{A}{W}} \end{aligned}$$

   (Notar entonces que el tiempo entre automóviles en la pista sur distribuye según una exponencial de parámetro $(\lambda_s V)$; para la pista norte se puede obtener un resultado análogo).

   De llegar al medio deberá enfrentar la misma situación en la pista hacia el norte. Entonces, la probabilidad de morir atropellado será:

$$\begin{aligned} P[\text{Morir}] &= P[\text{Morir pista sur}] + P[\text{No Morir pista sur}] \cdot P[\text{Morir pista Norte}] \\ &= 1 - e^{-(\lambda_n + \lambda_s) \cdot V \cdot \frac{A}{W}} \end{aligned}$$

2. En la versión simplificada de la estrategia Armijo corre si es que no se encuentra con un automóvil pasando. Dado que el tiempo entre el paso de dos automóviles por una misma pista es proporcional a la distancia entre ellos (velocidad constante), el tiempo también se distribuye de manera exponencial. Por lo tanto el tiempo entre pasada de automóviles tiene pérdida de memoria. Esto significa que "no tiene sentido esperar" por el paso de un automóvil para correr, dado que la distribución del tiempo entre la pasada del primer auto y la llegada del segundo (que ve Armijo) es la misma que la del tiempo de la próxima llegada cuando Armijo llega al borde de la pista.

   Entonces, ambas estrategias tienen asociada la misma probabilidad de muerte para Amrijo, sólo que la versión simplificada siempre obtiene tiempos de cruce menores o iguales a la estrategia original y, por lo tanto, la domina.

3. Como vimos en la parte anterior el tiempo de pasada del próximo auto por la pista sur es exponencial (tasa $\lambda_s \cdot V$). Lo mismo se repite para la pista norte (tasa $\lambda_n \cdot V$). Por lo tanto, el tiempo de la próxima de pasada (mínimo entre la pasada sur y la norte) se distribuye exponencial con tasa $(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V$. Entonces, sea T el tiempo que Armijo demora en cruzar la carretera. Calculemos la esperanza de T condicionando sobre el tiempo t^* que demorará en pasar el próximo automóvil (cualquier pista).

$$\begin{aligned}
E[T] &= \int_o^{\infty} E[T|t^* = x](\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot x} dx \\
&= \int_o^{2\frac{A}{W}} E[T|t^* = x](\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot x} dx + \int_{2\frac{A}{W}}^{\infty} 2\frac{A}{W} \cdot (\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot x} dx \\
&= \int_o^{2\frac{A}{W}} (E[T] + x)(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V \cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot x} dx + 2\frac{A}{W} \cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot 2\frac{A}{W}} \\
&= E[T] \cdot (1 - e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot 2\frac{A}{W}}) + \frac{1}{(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V} \cdot (1 - e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot 2\frac{A}{W}}) \\
&= \frac{1}{(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V} \cdot (e^{(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V \cdot 2\frac{A}{W}} - 1)
\end{aligned}$$

4. Supondremos que en $t = 0$ no se encuentran automóviles pasando frente a Armijo. Sea $\{A(t), t \geq 0\}$ el proceso de conteo de autos (yendo al sur) de Armijo y Z_n el instante de pasada de el automóvil n. Considerando que un automóvil demora un tiempo $\frac{L}{V}$ en pasar "completo" frente a Armijo, para este proceso de conteo se cumple que:

$$A(t) \geq n \Leftrightarrow Z_n \leq t - \frac{L}{V}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P[A(t) \geq n] &= P[Z_n \leq t - \frac{L}{V}] \\
&= P[\sum_{i=1}^{n} x_i + (n-1)\frac{L}{V} \leq t - \frac{L}{V}] \\
&= P[\sum_{i=1}^{n} x_i + \leq t - n \cdot \frac{L}{V}] \\
&= P[N(t - n \cdot \frac{L}{V}) \geq n]
\end{aligned}$$

En la expresión anterior las variables x_i son v.a. exponenciales de parámetro $\lambda_s \cdot V$, i.i.d. y $\{N(t), t \geq 0\}$ corresponde a un proceso de Poisson homogéneo de tasa $\lambda_s \cdot V$.

De allí se puede concluir cual es la probabilidad pedida. Las respuestas pueden cambiar dependiendo de los supuestos considerados; las expresiones finales dependerán de si se expresan en función de la distribución de una gamma (integral) o mediante la distribución de poisson (sumatoria). Con ello, dos expresiones equivalentes para la expresión final son:

$$\begin{aligned}
P[A(t) \geq n] &= \int_0^{t - n\cdot\frac{L}{V}} \frac{(\lambda_s V)^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda_s V \cdot x}}{(n-1)!} dx \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda_s \cdot V(t - n \cdot \frac{L}{V}))^i e^{-\lambda_s \cdot V(t - n\cdot\frac{L}{V})}}{i!}
\end{aligned}$$

Por último, notar que para $t \leq n \cdot \frac{L}{V}$ la probabilidad pedida es 0.

5. Analicemos la pista sur y supongamos que cuando Armijo mira a la distancia obvervará (si puede) el punto más cercano del auto (su parte trasera). Si se ha visto un auto completo este puede estar

hasta una distancia $V \cdot t - L$. Esto es equivalente a que el auto haya entrado entre los instantes 0 y $t - \frac{L}{V}$. Entonces si sabemos que entró un auto en ese intervalo también sabemos que la distribución del instante de llegada es uniforme entre 0 y $t - \frac{L}{V}$. Por otro lado, para que el automóvil aún sea visible éste no debe haber entrado en un tiempo superior a $\frac{K+L}{V}$. Entonces:

$$P[\text{Ver el auto}] = \frac{K+L}{t \cdot V - L}$$

Notar que aun cuando consideramos que Armijo está viendo los autos que pasan en la pista sur, los resultados son los mismos para las dos pistas (no nos interesa condicionar sobre que pista paso el automóvil).

Problema 2

1. La forma de esta cadena se muestra en la siguiente figura:

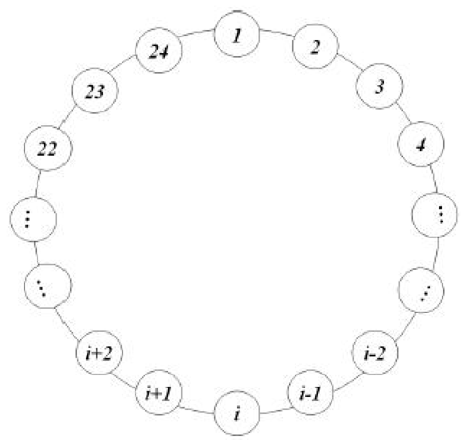
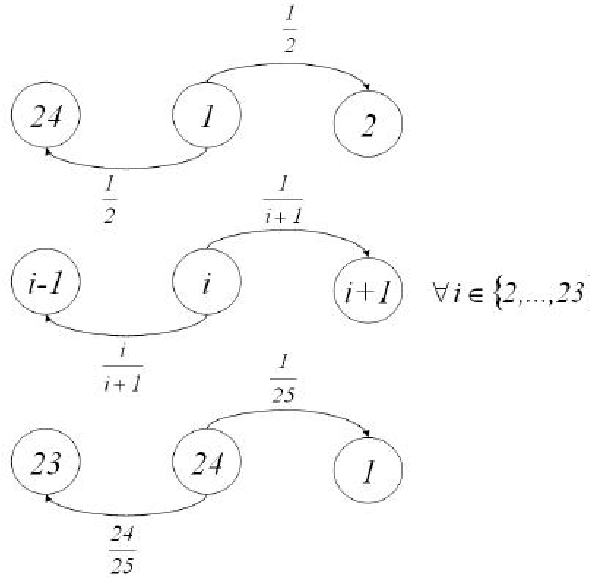


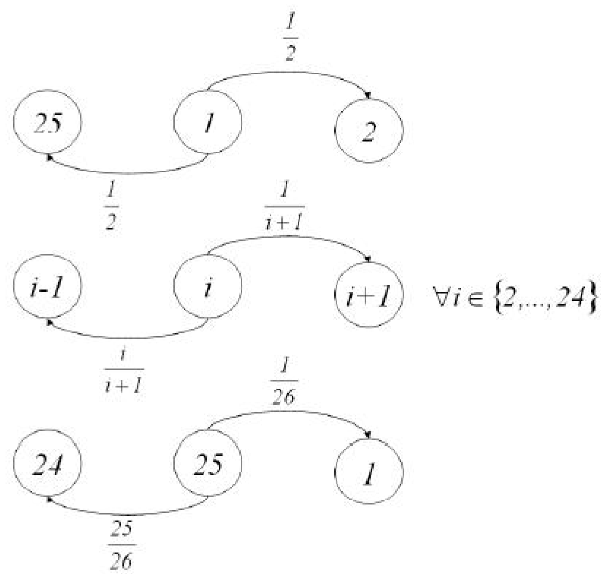
Figura 1: Cadena de Markov

Las probabilidades de transición se definen de la siguiente forma:



Los 24 estados de la cadena pertenecen a su única clase recurrente, esta clase tiene período 2, por lo que no es érgodica, razón por la que esta cadena **no** admite probabilidades estacionarias.

2. Al tener la línea del metro 25 estaciones en lugar de 24, la forma de la cadena es la misma que la del caso anterior, cambia, sin embargo, la definición de algunos casos. Luego, las probabilidades de transición son las que siguen:



Todos los estados pertenecen a una única clase recurrente que, en este caso, al ser el nmero de estados impar, es aperiódica, por lo que esta cadena admite probabilidades estacionarias.

El sistema de ecuaciones que permite calcularlas es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \pi_{25} \cdot \frac{1}{26} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} \\
\pi_i &= \pi_{i-1} \cdot \frac{1}{i} + \pi_{i+1} \cdot \frac{i+1}{i+2} \quad \forall\ i \in 2, \ldots, 24 \\
\pi_{25} &= \pi_{24} \cdot \frac{1}{25} + \pi_1 \cdot \frac{1}{2} \\
\sum_{i=1}^{25} \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

3. Es necesario darse cuenta de que Armijo permanece 2 minutos en cada estación luego, en 2 minutos en la *i-ésima* estación roba especies avaluadas en $\$EH_i$, de esta forma el valor esperado preguntado es:

$$V = \sum_{i=1}^{25} \pi_i \cdot EH_i$$

4. En el largo plazo la probabilidad de que Armijo esté en la i-ésima estación está dada por π_i, la probabilidad estacionaria del estado que represaenta esa situación, luego:

P(Armijo esté entre la *(n-2)-ésima* y *n-ésima* estación)= $\frac{\pi_{n-2}+\pi_{n-1}+\pi_n}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i}$

5. Se puede apreciar que la probabilidad, estando en i, es mayor para ir a $i-1$ que para ir a $i+1$, esto es válido para todos los estados salvo para $i = 1$, en que la Armijo decide equiprobablemente entre ir a 2 y 24 luego, Armijo tiende a ir siempre de forma que los números de las estaciones son decendentes, salvo cuando llega a 1, en que decide de forma equiprobable. Por esta razón es más probable que se encuentre en las 5 primeras estaciones que en las 5 últimas, por lo que se debe recomendar a King la **Estrategia A**.

Problema 3

Parte 1

1. Llamemos $N(t)$ al proceso de llegada de ambulancias, con $t = 0$ las 8:00 y al tiempo lo medimos en horas. Lo que debemos calcular es $P(N(14) - N(10) = k)$. Hay (al menos) dos maneras de hacer esto de acuerdo a lo estudiado en el curso.

Primera solución

Aplicamos la propiedad que nos dice que los incrementos de un proceso de Poisson no homogéneo se distribuyen como una variable aletoria Poisson con el parámetro apropiado.

Específicamente, si llamamos $\lambda(t)$ a la función de intensidad del proceso $N(t)$, la variable aleatoria $N(14) - N(10)$ tiene distribución Poisson de parámetro

$$\Lambda = \int_{10}^{14} \lambda(s)ds = 14\,.$$

Por lo tanto,

$$P(N(14) - N(10) = k) = \frac{e^{-14}14^k}{k!}\,.$$

Segunda solución

Otra alternativa es considerar que el proceso de llegada es homogéneo entre las 18:00 y las 20:00 y entre las 20:00 y las 22:00. Con esta idea, dividimos el cálculo en dos intervalos independientes (son disjuntos y el proceso es de Poisson) y condicionamos en el número de llegadas en el primer intervalo:

$$
\begin{aligned}
P(N(14)-N(10)=k) &= \sum_{l=0}^{k} P(N(14)-N(12)=k-l|N(12)-N(10)=l)P(N(12)-N(10)=l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} P(N(14)-N(12)=k-l)P(N(12)-N(10)=l) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \frac{e^{-8}8^{k-l}}{(k-l)!}\frac{e^{-6}6^{l}}{l!} \\
&= \frac{e^{-14}}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}8^{k-l}6^{l} \\
&= \frac{e^{-14}}{k!}(8+6)^{k} \\
&= \frac{e^{-14}14^{k}}{k!}
\end{aligned}
$$

2. Debemos calcular la probabilidad

$$
\begin{aligned}
P(\text{ 1 llegada en h. diurno }|\text{hubo 1 llegada }) &= \frac{P(\text{“hubo 1 llegada” y “llegada en h. diurno”})}{P(\text{“hubo 1 llegada”})} \\
&= \frac{P(\text{“1 llegada en h. diurno” y “sin llegadas en h. nocturno”})}{P(\text{“hubo 1 llegada”})} \\
&= \frac{P(N(12)=1 \text{ y } N(24)-N(12)=0)}{P(N(24)=1)} \\
&= \frac{36\,e^{-36}\cdot e^{-48}}{84\,e^{-84}} \\
&= \frac{3}{7}\,.
\end{aligned}
$$

Parte 2

1. Es una cadena de Markov homogénea porque las probabilidades de transición cumplen con la propiedad

$$P(Z_n=(j,l)|Z_{n-1}=(i,k),Z_{n-2},\ldots,Z_0)=P(Z_n=(j,l)|Z_{n-1}=(i,k))=p_{ij}q_{kl}$$

ya que

$$\begin{aligned}
P(Z_n=(j,l)|Z_{n-1}=(i,k),Z_{n-2},\ldots,Z_0) &= P(X_n=j,\ Y_n=l|X_{n-1}=i,\ Y_{n-1}=k,\ X_{n-2},Y_{n-2}\ldots,X_0,Y_0)\\
&= P(X_n=j|X_{n-1}=i,\ X_{n-2},\ldots,X_0)P(Y_n=l|Y_{n-1}=k,\ Y_{n-2}\ldots,Y_0)\\
&= P(X_n=j|X_{n-1}=i)P(Y_n=l|Y_{n-1}=k)\\
&= p_{ij}q_{kl}\,.
\end{aligned}$$

2. El argumento se basa en la independencia probabilística asociada a X_n e Y_n. Por lo tanto, en el largo plazo la probabilidad de encontrar al par de manadas Z=(X,Y) en las zonas (i,k) respectivamente, puede ser expresada como la multiplicación de las probabilidades estacionarias de encontrar a la manada X en i y a la manada Y en k, que sabemos es $\pi_i^X\pi_k^Y$.

   Para efectos de corrección, lo anterior es suficiente.

   También se puede demostrar analíticamente como sigue:

   Llamemos a R a la matriz de probabilidades de transición de la cadena $\{Z_n\}$. La matriz R tiene una fila (y una columna) para cada estado posible. Recordemos que los estados posibles son los pares de sectores de la reserva.

   De acuerdo al punto anterior, esta matriz R está definida por

$$R_{(i,k)(j,l)}=p_{ij}q_{kl}\,.$$

   Para comprobar que el vector π^Z dado en el enunciado es una ley estable de la cadena debemos verificar dos cosas (es directo ver que π^Z son no negativos):

   a) $\sum_{(i,k)}\pi^Z_{(i,k)}=1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,k)}\pi^Z_{(i,k)} &= \sum_i\sum_k\pi^Z_{(i,k)}\\
&= \sum_i\sum_k\pi_i^X\pi_k^Y\\
&= \left(\sum_i\pi_i^X\right)\left(\sum_k\pi_k^Y\right)\\
&= 1\times 1=1\,.
\end{aligned}$$

b) $\pi^Z R = \pi^Z$: Verifiquemos que esto vale para una cualquiera de las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\left[\pi^Z R\right]_{(j,l)} &= \sum_i \sum_k \pi^Z_{(i,k)} R_{(i,k)(j,l)} \\
&= \sum_i \sum_k \pi^X_i \pi^Y_k p_{ij} q_{kl} \\
&= \left(\sum_i \pi^X_i p_{ij}\right) \left(\sum_k \pi^Y_k q_{kl}\right) \\
&= [\pi^X P]_j [\pi^Y Q]_l \\
&= \pi^X_j \pi^Y_l \\
&= \pi^Z_{(j,l)}
\end{aligned}
$$