Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs.: R. Epstein, P. Rey
Aux : C. Araya, J. Gacitúa, D. Wilson, R. Wolf

Control 2
4 de Octubre de 2007

Problema 1

En una faena minera se producen se producen accidentes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa 2 accidentes por semana. Cada uno de estos accidentes, independiente de los otros, es un accidente *grave* con probabilidad 1/4 y un accidente *leve*, en los casos restantes.

1. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad que haya dos o menos accidentes en un período de dos semanas.
2. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad que haya dos o menos accidentes, en cada semana, durante dos semanas seguidas.
3. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad que, en un período de dos semanas, haya más accidentes *graves* que accidentes *leves*.
4. (1,5 puntos) Si en un período de dos semanas han ocurrido tres accidentes, ¿cuál es la probabilidad que hayan sido más accidentes *graves* que accidentes *leves*?

Solución

Sea $N(t)$ el número de accidentes que se produjeron hasta el instante t (el tiempo, en semanas).

1. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad que haya dos o menos accidentes en un período de dos semanas.

   La probabilidad que haya dos o menos accidentes en un período de dos semanas es igual a

   $$P(N(2) \leq 2) = P(N(2) = 0) + P(N(2) = 1) + P(N(2) = 2) = e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4} = 13e^{-4}\,.$$

2. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad que haya dos o menos accidentes, en cada semana, durante dos semanas seguidas.

   La probabilidad que haya dos o menos accidentes, en cada semana, durante dos semanas seguidas es igual a

   $$\big(P(N(1) \leq 2)\big)^2 = \big(P(N(1) = 0) + P(N(1) = 1) + P(N(1) = 2)\big)^2 = \big(5e^{-2}\big)^2 = 25e^{-4}\,.$$

3. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad que, en un período de dos semanas, haya más accidentes *graves* que accidentes *leves*.

   Miremos los procesos $N_G(t)$ y $N_L(t)$ de accidentes *graves*, y accidentes *leves*, respectivamente. Estos procesos son procesos de Poisson independientes con tasas 1/2 accidentes/semana y 3/2 accidentes/semana, respectivamente.

   La probabilidad que queremos calcular es

   $$P(N_G(2) > N_L(2)) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{g=l+1}^{\infty} P(N_G(2) = g)P(N_L(2) = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{g=l+1}^{\infty} \frac{e^{-1}(-1)^g}{g!} \frac{e^{-3}(-3)^l}{l!}$$

que hayan sido más accidentes *graves* que accidentes *leves*?

La probabilidad que queremos calcular es

$$\begin{aligned} P(N_G(2) > N_L(2)|N(2)=3) &= P(N_G(2)=3 \text{ y } N_L(2)=0|N(2)=3) + P(N_G(2)=2 \text{ y } N_L(2)=1|N(2)=3) \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + 3\times\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) \\ &= \tfrac{7}{27}. \end{aligned}$$

Problema 2

Una fundación ha realizado una serie de estudios respecto a cómo se desplazan un grupo de ladrones y la policía dentro de la capital. De acuerdo al estudio si se observa semana a semana la localización de cada grupo, estas se pueden representar como cadena de Markov en tiempo discreto independientes entre sí.

Los ladrones evolucionan de la Zona A de la ciudad a la Zona B con probabilidad 0,2, en tanto que con probabilidad 0,5 van de la Zona A a la Zona C. A su vez, de la Zona C sólo pueden evolucionar a la Zona A. Finalmente, si están en la Zona B, la probabilidad que a la semana siguiente continúen allí es de 0,4, mientras que la probabilidad de vayan de la Zona B a la Zona A es 0,4.

Para los policías, las probabilidades de transición son las siguientes: si estn en la Zona A, 0,3 de que se queden ah y 0,5 de que vayan a la Zona B; si están en la Zona B, con seguridad se desplazarán a la Zona A; finalmente, si están en la Zona C, con probabilidad 0,2 se dirigen a la Zona B, y con probabilidad 0,4 a la Zona A.

La fundación le ha solicitado que responda las siguientes preguntas.

1. (1,5 puntos) Modele la cadena de Markov que describe, semana a semana, la ubicación de los ladrones. Si es posible, calcule las probabilidades estacionarias de la cadena (argumente por qué es posible o no calcular estas probabilidades).
2. (1,5 puntos) Modele la cadena de Markov que describe, semana a semana, la ubicación de los policías. Si es posible, calcule las probabilidades estacionarias de la cadena (argumente por qué es posible o no calcular estas probabilidades).
3. (1,0 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un perodo en el largo plazo, los policías y los ladrones se encuentren en la misma zona?
4. (1,0 puntos) Suponga que estamos en el "largo plazo". Los ladrones van a llevar a cabo su prximo atraco en la Zona A, ¿cuál es la probabilidad de que los policías no estén en la misma zona para impedirlo?

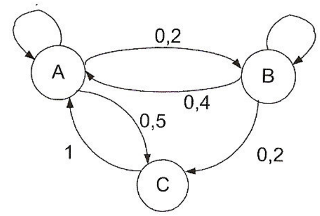
Un nuevo estudio agrega información sobre la estrategia de los policías: un informante les avisa sobre el próximo movimiento de los ladrones. Un problema operativo hace que los policías se demoren un período más en llegar. Es decir, si los ladrones van a asaltar la Zona i (con i = A o B o C) en una semana particular, los policías estarán en la Zona i la semana siguiente.

5. (1,0 punto)Considerando que las probabilidades de transicin de los ladrones se mantienen, presente una cadena de Markov en tiempo que modele la nueva situacin descrita. En algún momento en el futuro, se encontrarán los ladrones y los policías en la misma zona? Justifique.

Solución

1. (1,5 puntos) Modele la cadena de Markov que describe, semana a semana, la ubicación de los ladrones. Si es posible, calcule las probabilidades estacionarias de la cadena (argumente por qué es posible o no calcular estas probabilidades).

   La cadena es la siguiente



La cadena posee probabilidades estacionarias ya que es ergódica. Para calcularlas hacemos lo siguiente

$$[\pi_A, \pi_B, \pi_C] = [\pi_A, \pi_B, \pi_C] \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

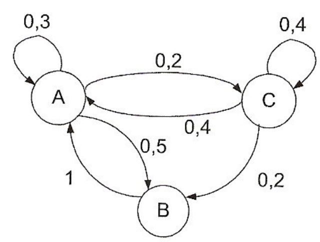
Esto genera las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \pi_A &= 0{,}3\pi_A + 0{,}4\pi_B + \pi_C \, , \\ \pi_B &= 0{,}2\pi_A + 0{,}4\pi_B \, , \\ \pi_C &= 0{,}5\pi_A + 0{,}2\pi_B \, . \end{aligned}$$

Además, se sabe que $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$. Luego, si resolvemos el sistema, se llega a $\pi_A = 0{,}525$; $\pi_B = 0{,}175$; $\pi_C = 0{,}3$.

2. (1,5 puntos) Modele la cadena de Markov que describe, semana a semana, la ubicación de los policías. Si es posible, calcule las probabilidades estacionarias de la cadena (argumente por qué es posible o no calcular estas probabilidades).

   La cadena es la siguiente



   La cadena posee probabilidades estacionarias ya que es ergódica. Como la cadena es la misma del punto anterior, con los estados B y C intercambiados. Por lo tanto, $\pi_A^{\text{pol}} = 0{,}525$; $\pi_B^{\text{pol}} = 0{,}3$; $\pi_C^{\text{pol}} = 0{,}175$.

3. (1,0 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un perodo en el largo plazo, los policías y los ladrones se encuentren en la misma zona?

   La probabilidad que se debe calcular[1] es

$$\begin{aligned} &P(\text{policías y ladrones en la misma zona}) = \\ &\quad = P(\text{policías y ladrones en Zona A}) + P(\text{policías y ladrones en Zona B}) \\ &\quad\quad + P(\text{policías y ladrones en Zona C}) \\ &\quad = \pi_A\pi_A^{\text{pol}} + \pi_B\pi_B^{\text{pol}} + \pi_C\pi_C^{\text{pol}} \\ &\quad = 0{,}38 \end{aligned}$$

[1] Si alguien sacó mal las probabilidades estacionarias o no las calculó, pero hizo bien esta parte, ponerle todo el puntaje. Lo mismo para el punto siguiente.

en la Zona A, ¿cuál es la probabilidad de que los policías no estén en la misma zona para impedirlo?

La probabilidad es $\pi_B^{\text{pol}} + \pi_C^{\text{pol}} = 0{,}475$.

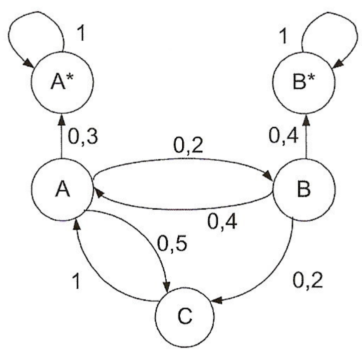
5. (1,0 punto)Considerando que las probabilidades de transicin de los ladrones se mantienen, presente una cadena de Markov en tiempo que modele la nueva situacin descrita. En algún momento en el futuro, se encontrarán los ladrones y los policías en la misma zona? Justifique.

   Los polocías y los ladrones estarán en la misma zona sólo cuando los ladrones pasen dos semanas seguidas en la misma zona.

   Para modelar la nueva situación agregamos a la cadena dos estados A* y B*. Habrá una transición de A a A* cuando los ladrones pasen 2 semanas seguidas en la Zona A. De la misma manera, habrá una transición de B a B* cuando los ladrones pasen 2 semanas seguidas en la Zona B.

   Una vez en los estados A* o B*, se permanece en el estado con probabilidad 1.

   La cadena que queda es la siguiente



   Los ladrones y los policías se encontrarán en algún momento en la misma zona, sí y sólo sí para algún n la probabilidad de estar en uno de los estados A* o B* luego de n transiciones es igual a 1. Como estos dos estados son los únicos estados recurrentes de la cadena, esto es cierto.

Problema 3

Un componente crítico de un computador tiene un tiempo de vida que puede ser representado por una variable aleatoria discreta. Específicamente, si T es el tiempo de vida del componente, las probabilidades que T sea exactamente k días, $\alpha_k > 0$ son conocidas, para $k = 1, 2, \ldots$. Suponga que se comienza con un componente nuevo y cuando se produce una falla, el componente en uso es reemplazado por uno nuevo. Un componente nuevo dura, en uso, al menos un día ($a_0 = 0$).

Sea X_n la "edad" del componente en uso. El proceso $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov en tiempo discreto.

1. Defina claramente los estados y probabilidades de transición de esta cadena.
2. Suponga que la cadena admite probabilidades estacionarias y que éstas son conocidas. De una expresión para la edad promedio del componente en uso.

nente no ha fallado luego de un uso de N días ($N > 1$) el mismo es reemplazado por uno nuevo. Es decir, el reemplazo se produce luego de T^* días, donde $T^* = \text{mín}(T, N)$.

3. Modifique la cadena del punto anterior para reflejar esta nueva situación. ¿Por qué esta cadena admite probabilidades estacionarias?

4. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la nueva cadena de una expresión para la edad promedio de un componente cuando es reeplazado ($E[T^*]$).

Solución

1. Los estados de la cadena son los enteros no negativos. Las transiciones se pueden producir desde un estado i al estado $i+1$, si el componente no falla, o al estado 0 si el componente falla.

   La probabilidad que un componente con edad exatactamente i falle es la probabilidad condicionada que un componente que duró al menos i días (i.e. $T \geq i$) falle exatamente el día i (i.e. $T = i$). Por lo tanto, la probabilidad de transición p_{i0} para $i > 0$ está dada por la probabilidad condicionada:

$$p_{i0} = P(T = i | T \geq i) = \frac{P(T = i \text{ y } T \geq i)}{P(T \geq i)} = \frac{P(T = i)}{P(T \geq i)} = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k}.$$

   Por lo tanto, las probabilidades de transición de la cadena están dadas por

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ y } j = 1, \\ \dfrac{\alpha_i}{\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k} & \text{si } i > 0 \text{ y } j = 0, \\ 1 - \dfrac{\alpha_i}{\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k} & \text{si } i > 0 \text{ y } j = i+1, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

2. Si denotamos la probabilidad estacionaria asociada al estado i (es decir, "el componente en uso tiene i días") la edad promedio del componente en uso es igual a $\sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i$ días.

3. La nueva cadena tiene como estados a los enteros no negativos menores o iguales que N (edad máxima que puede tener un componente). Es decir, el conjunto de estados es el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

   Llamemos p'_{ij} a las probabilidades de transición de la nueva cadena, mientras que p_{ij} denotan a las probabilidades de transición de la cadena del punto 1.

   Las nuevas probabilidades de transición están dadas entonces por

$$p'_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } 0 \leq i \leq N-1, \\ 1 & \text{si } i = N,\ j = 0, \\ 0 & \text{si } i = N,\ 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

4. Llamando π' a las probabilidades estacionarias de la nueva cadena, la edad promedio de un componente

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} i\pi_i' p_{i0}'}{\sum_{i=1}^{N} \pi_i' p_{i0}'}$$