DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN44A - Investigación Operativa
Sem.: Primavera 2003
Prof: P. Rey, A. Schilkrut.
P. Aux: J. Guajardo, P. Hernández, J.A. Muñoz.

CONTROL 2
17 de Octubre, 2003

Problema 1

Un Centro Médico es atentido por un único médico conocido como Pepe, ex-vocalista del famoso grupo Pepe y Los Markovianos. La sala de espera de la consulta tiene capacidad para sólo dos personas, y los pacientes que llegan y encuentran ambos espacios ocupados se retiran indignados.

Según datos históricos, Pepe sabe que el tiempo que transcurre desde que un paciente comienza a ser atentido hasta que se va de la consulta, es exactamente una hora para una fracción p de los clientes, y de dos horas para una fracción q, con $q = 1 - p$. Ningún paciente permanece más de dos horas siendo atendido por el médico.

Las distribuciones de probabilidad de la cantidad de pacientes que llegan al consultorio en una hora son conocidas. La probabilidad que lleguen en una hora k pacientes, dado que al comienzo de esta hora había i pacientes dentro del local es α_{ik}.

Al comienzo de cada hora, si el doctor está desocupado acude a la sala de espera del Centro. Si hay pacientes esperando, atiende al que corresponda, según orden de llegada. Si la sala de espera está vacía no atenderá pacientes durante **toda** esa hora, y se dedicará a rememorar viejos tiempos desempolvando su guitarra del baúl de los recuerdos. No obstante, mientras el doctor no está atendiendo, los pacientes pueden seguir llegando al Centro Médico y entrarán en el caso que hayan lugares disponibles para esperar. En caso que un paciente entra al sistema en esta situación tendrá la fortuna de escuchar los viejos éxitos de Pepe.

Por último, suponga que inicialmente el consultorio está vacío con el doctor tocando guitarra, y que el médico atiende por suficiente tiempo tal que se alcanza el régimen estacionario.

1. (3,0 pts.) Modele el estado de ocupación del Centro Médico al comienzo de cada hora, como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Encuentre las probabilidades de transición en función de las probabilidades α_{ik} y del resto de los parámetros del problema. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.

2. Considere que al médico le interesa conocer el comportamiento del sistema en el Largo Plazo, para lo cual requiere conocer las expresiones que se detallan a continuación. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias, calcule:

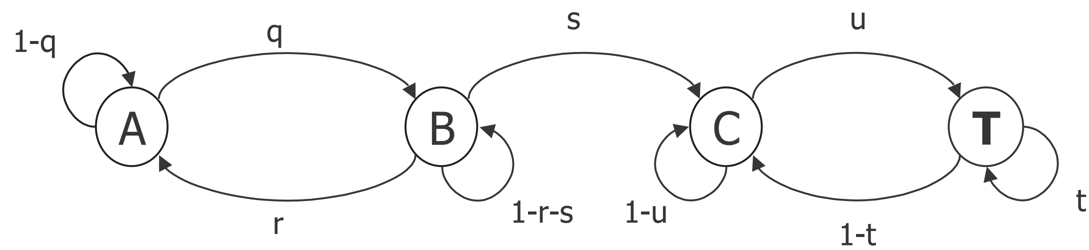
   a) (1,0 pto.) La esperanza de la cantidad de pacientes que en una hora, se retiran indignados sin poder ingresar al Centro Médico.

   b) (1,0 pto.) La probabilidad de que un paciente que logra entrar al sistema, sea atendido al comienzo del período siguiente al de su arribo. Asuma que el tiempo entre llegada de pacientes son variables aleatorias exponenciales i.i.d de parámetro λ_i si al inicio de la hora correspondiente hay i personas dentro del consultorio.

   c) (1,0 pto.) La cantidad promedio de pacientes que en una hora, disfrutan de la música de Pepe.

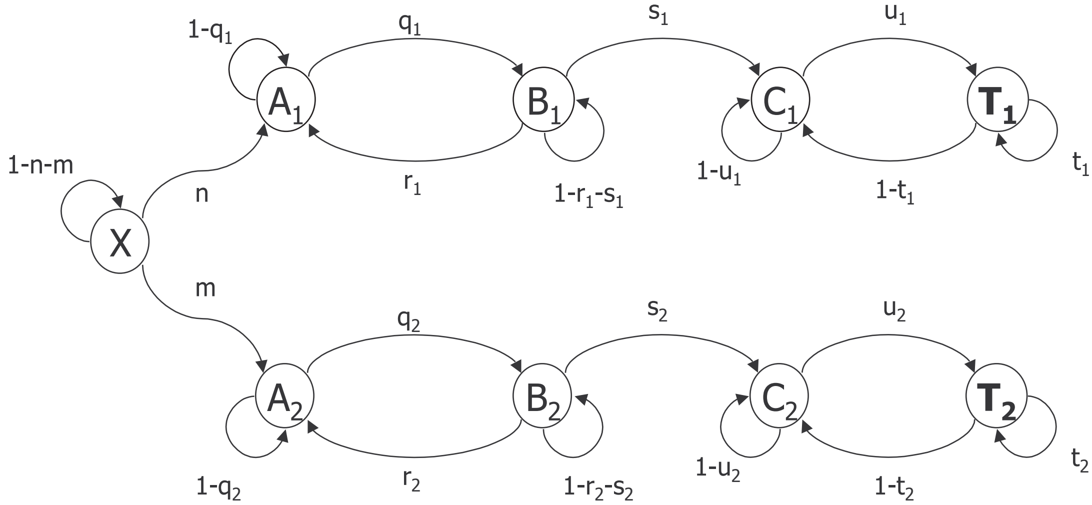
Problema 2

1. (3,0 ptos) Se tiene un sistema cuyos estados pueden ser modelados como la siguiente Cadena de Markov en tiempo discreto.



En esta cadena el estado T, se denomina *nodo terminal*. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado A, calcule el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal*.

2. (3.0 pts.) Se tiene otro sistema cuyos estados pueden ser modelados como la siguiente Cadena de Markov en tiempo discreto.



En esta cadena los estados T_1 y T_2 se denominan nodos terminales. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado X, calcule el número esperado de transiciones hasta visitar por primera vez alguno de los nodos terminales.

Problema 3

Considere el problema de un jugador que en cada jugada tiene una probabilidad p de ganar una ficha y una probabilidad $q = 1 - p$ de perder una ficha. El jugador juega hasta arruinarse (cuando queda con

0 fichas) o cuando alcanza N fichas.

1. Asumiendo que jugadas sucesivas son independientes, muestre que si p es distinto de $\frac{1}{2}$, la probabilidad que partiendo con i fichas, el jugador alcance N antes de alcanzar 0 está dada por:

$$F_i = \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$$

   HINT: Note que condicionando en el resultado del juego inicial y usando el hecho que $p+q=1$ se tiene que

$$F_{i+1} - F_i = \frac{q}{p}(F_i - F_{i-1})$$

2. Suponga que dos nuevos medicamentos han sido desarrolladas para tratar cierta enfermadad. El medicamento i tiene una tasa de curación P_i, $i = 1, 2$, en el sentido de que cada paciente tratado con el medicamento i se va a mejorar con probabilidad P_i. Estas tasas de curación no son conocidas, pero estamos interesados en un método para decidir si $P_1 > P_2$ o si $P_2 > P_1$. Para decidir entre estas alternativas, considere el siguiente test: Pares de pacientes son tratados secuencialmente, con un miembro recibiendo el medicamento 1 y el otro el medicamento 2 y se registra el resultado. El test finaliza cuando el número de curaciones acumuladas usando uno de los medicamentos excede al número de curaciones acumuladas usando el otro medicamento por M, un número fijo predeterminado. Más formalmente, sea

$$X_j = \begin{cases} 1, \text{ si el patiente del par } j \text{ que recibe el medicamento 1 se cura} \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1, \text{ si el patiente del par } j \text{ que recibe el medicamento 2 se cura} \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$$

   Para un entero positivo predeterminado M el test termina luego del par N, donde N es el primer valor de n tal que:

$$D = X_1 + ... + X_n - (Y_1 + ... + Y_n) = M$$

   o

$$D = X_1 + ... + X_n - (Y_1 + ... + Y_n) = -M.$$

   En el primer caso diremos que $P_1 > P_2$ y en el segundo caso diremos que $P_2 > P_1$. Para poder afirmar que éste es un buen test es importante saber cuál es la probabilidad de obtener una conclusión incorrecta. Por lo tanto, para un P_1 y P_2 dados, donde $P_1 > P_2$, ¿cuál es la probabilidad de que el test afirme erroneamente que $P_2 > P_1$? [Indicación: Formule el problema como un problema análogo al de la ruina del jugador]

Indicaciones Generales y Fórmulas

• Algunas Distribuciones

$$X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda): \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \forall\, x \geq 0, \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda): \quad \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad E(X) = \lambda, \qquad \text{Var}(X) = \lambda.$$

- Algunas series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2}\,, \text{ si } |a| < 1.$$