IN44A / IN3702: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, R. Lagos, C. Thraves

Pauta CTP 3

Martes 22 de Septiembre de 2009

En la Jein Fonda llega gente según un proceso de poisson de tasa λ, tal que con probabilidad p loa gente se dirige hacia el sector de comida para servirse un sabroso anticucho, y con probabilidad *1-p* se dirigirá hacia el sector de los juegos a jugar a la rayuela, donde la probabilidad de ganar es g, ganandose una buena botella de chicha. Considere que la utilidad para los fonderos por cada anticucho vendido es de *$A*, por cada ticket de rayuela es *$B* (una persona no jugará más de un ticket), y el costo de una botella de chicha será de *$C*. Determine:

1. La utilidad esperada de la fonda hasta el tiempo T. (1,2 puntos)

   Sea:
   N(t): el número de personas que ha llegado a la fonda hasta el tiempo t.
   $N_C(t)$: el número de personas que ha llegado a la zona de comida de la fonda hasta el tiempo t.
   $N_J(t)$: el número de personas que ha llegado a la zona de juegos de la fonda hasta el tiempo t.
   $N_G(t)$: el número de personas que ha ganado hasta el tiempo t.
   Los tres últimos son PPH filtrados, con tasas respectivamente de λp, $\lambda(1-p)$, $\lambda(1-p)g$.

$$\begin{aligned} E(Utilidad(T)) &= \$A \cdot E(N_C(T)) + \$B \cdot E(N_J(T)) - \$C \cdot E(N_G(T)) \\ &= \$A \cdot T \cdot \lambda \cdot p + \$B \cdot T \cdot \lambda \cdot (1-p) - \$C \cdot T \cdot \lambda \cdot (1-p) \cdot g \end{aligned}$$

2. Dado que hasta el tiempo T han llegado N personas a la fonda, calcule la probabilidad de que hallan R ganadores en el juego de la rayuela y S anticuchos vendidos. (1,2 puntos)
   Definimos adicionalmente el proceso de los jugadores que no ganan:
   $N_N(t)$: el número de personas que han jugado y no ganado hasta el tiempo t.

$$\begin{aligned} P[N_C(T) = C \wedge N_G(T) = R \,/\, N(T) = N] &= \frac{P[N_C(T) = C \wedge N_G(T) = R \wedge \; N(T) = N]}{P[N(T) = N]} \\ &= \frac{P[N_C(T) = C \wedge N_G(T) = R \wedge N_N(T) = N - R - C]}{P[N(T) = N]} \\ &= \frac{\frac{(\lambda \cdot p)^C \cdot e^{-\lambda \cdot p}}{C!} \cdot \frac{(\lambda \cdot (1-p) \cdot g)^R \cdot e^{-\lambda \cdot (1-p) \cdot g}}{R!} \cdot \frac{(\lambda \cdot (1-p) \cdot (1-g))^{(N-C-R)} \cdot e^{-\lambda \cdot (1-p) \cdot (1-g)}}{(N-C-R)!}}{\frac{\lambda^N \cdot e^{-\lambda}}{N!}} \\ &= \frac{N!}{C! \cdot R! \cdot (N-C-R)!} \cdot p^C \cdot ((1-p) \cdot g)^R \cdot ((1-p) \cdot (1-g))^{N-C-R} \end{aligned}$$

Suponga que el dueño de la fonda ha decidido que en la rayuela cada vez que una persona gane, la linea de lanzmiento se desplaze hacia atrás, tal que la probabilidad de que alguien acerte a la linea será de $g_i = \frac{g}{i+1}$ en caso de que hallan ganado i persanas previamente. Determine:

3. El tiempo esperado para que gane la *n-ésima* persona. (1,2 puntos)

   Consideremos el proceso de conteo de los ganadores del juego de la rayuela N_G, claramente no es un proceso de poisson homogeneo. Luego, definamos lo siguiente:
   X_i: tiempo entre el ganador *(i-1)-ésimo* e *i-ésimo*. $X_i \sim exp(\lambda \cdot (1-p) \cdot g_{i-1})$.

S_i: tiempo en que gana la *i-ésima* persona.

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$

Calculando el tiempo esperado para que gane la *n-ésima* persona:

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= E(\sum_{j=1}^{n} X_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} E\left(X_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda(1-p)g_{j-1}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda(1-p)\frac{g}{(j-1)+1}} \\
&= \frac{1}{\lambda(1-p)g} \cdot \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{1}{\lambda(1-p)g} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2\lambda(1-p)g}
\end{aligned}$$

4. La probabilidad de que hasta el tiempo T hallan ganado al menos 2 personas. (1,2 puntos)

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq T) &= \int_0^{\infty} P(X_1 + X_2 \leq T | X_1 = t) \cdot f_{X_1}(t) \partial t \\
&= \int_0^{T} P(X_2 \leq T - t) \cdot \lambda(1-p) g_0 e^{-\lambda(1-p)g_0 t} \partial t \\
&= \int_0^{T} (1 - e^{-\lambda(1-p)g_1(T-t)}) \lambda(1-p) g_0 e^{-\lambda(1-p)g_0 t} \partial t \\
&= \int_0^{T} (1 - e^{-\lambda(1-p)\frac{g}{2}(T-t)}) \lambda(1-p) g e^{-\lambda(1-p)g t} \partial t \\
&= (1 - e^{-\lambda(1-p)gT}) - 2 \cdot e^{-\lambda(1-p)\frac{g}{2}T} \cdot (1 - e^{-\lambda(1-p)\frac{g}{2}T}) \\
&= 1 - 2e^{-\lambda(1-p)\frac{g}{2}T} + e^{\lambda(1-p)gT} \\
&= (1 - e^{-\lambda(1-p)\frac{g}{2}T})^2
\end{aligned}$$

5. Encuentre la probabilidad de que se hallan vendido K anticuchos hasta el tiempo T, sabiendo que han habido 3 ganadores hasta ese momento. (1,2 puntos).

   La cantidad de ganadores es un proceso filtrado independiente del otro proceso filtrado de los anticuchos vendidos, luego se tiene:

$$P(N_C(T) = K) = \frac{(T\lambda p)^K \cdot e^{-T\lambda p}}{K!}$$