Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Procesos de Poisson

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Procesos de Poisson

1. Se tiene una central telefónica que recibe llamadas de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 5$ [llamadas/hora]. Se define con $N(t, t')$ el número de llamadas que se han recibido entre t y t'. El servicio ha comenzado a operar a las 7:00 de la mañana y se sabe que N(7, 9)=7.

   a) Si el operador no ha recibido ninguna llamada desde las 8:45 hrs. ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente llamada ocurra antes de las 9:15 hrs. ?.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el operador esté ocioso por más de 40 minutos (comenzando a las 8:45)?.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que a las 10:00 hrs. se hayan recibido 25 llamadas en total?.

   d) Si el operador trabaja un turno de 8 horas ¿cuántos llamados recibirá en promedio ?. ¿cuál será la varianza ?.

   e) El operador ha estado muy ocupado durante las primeras 4 horas de su turno y le comenta a su compañero de trabajo en su hora de colación: "Este será un día muy ocupado, en la mañana casi no he podido descansar". Explique si el operador tiene o no razones para realizar esta afirmación.

2. Suponga que el número de goles que marca un equipo de fútbol puede ser descrito por un proceso de Poisson. Considere los siguientes equipos (procesos independientes) :

   A : tasa λ_A goles/partido

   B: tasa λ_B goles/partido

   a) Si se enfrentan A y B, ¿Cuál es la probabilidad de que A gane 2 x 1?.

   b) Suponga que ha transcurrido el primer tiempo entre A y B, si se sabe que A va ganando 2 x 0, ¿cuál es la probabilidad de que el primer gol haya sido antes de 15 min. y el segundo antes de 30 min.?.

   c) Va a comenzar el segundo tiempo (A va ganando 2 x 0), ¿cuál es la probabilidad de que A marque 3 goles antes de los 30 min. (sin importar lo que pase con B)?.

   d) Suponga que el partido en su tiempo reglamentario (90 min.) quedó igualado 3 x 3. Sin embargo, es necesario definir el ganador, para ello se utilizará la modalidad "golden goal", es decir, el primero que marca el gol gana. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se prolongue por más de 45 minutos?.

   e) Asuma que ahora se cambian las reglas a "two golden goals", es decir, el primer equipo que marca 2 goles consecutivos gana. ¿Cuál es la probabilidad de que gane B?.

3. (*) Una empresa de distribución de energía eléctrica ha decidido enfrentar el invierno venidero con un Plan de Solución de Fallas Críticas.

   De las estadísticas recopiladas de los años anteriores, se puede concluir que las fallas críticas tienen dos orígenes posibles: Domiciliario y de Alumbrado Público. Ambas fallas se presentan según procesos de Poisson independientes, de tasa λ_D[fallas/día] para fallas domiciliarias y λ_A[fallas/día] para fallas de Alumbrado Público.

   Como parte del diseño del plan, se conformó un equipo de empleados altamente capacitados en la reparación de fallas en redes eléctricas. Este equipo acude a reparar las fallas reportadas demorándose un tiempo exponencialmente distribuido de media T[hrs] por cada una, incluyendo en este lapso el tiempo de transporte al lugar de la falla.

   a) Si durante el primer mes de funcionamiento del Plan se han reportado F fallas, ¿cuál es el número esperado de fallas para el segundo mes?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera falla que se registre en un mes sea domiciliaria?.

c) El equipo de reparación está trabajando en la solución de una falla de Alumbrado Público. En promedio, ¿Cuántas fallas de cada tipo ocurrirán antes de que la reparación en curso sea finalizada?.

Se está estudiando la posibilidad de dejar la reparación de fallas de Alumbrado Público en manos de una empresa contratista. Los términos del contrato indican que mensualmente se pagará como costo fijo un equivalente a R reparaciones a un costo unitario s_1, mientras que el precio de cada reparación por sobre este mínimo será de s_2, con $s_2 > s_1$.

d) Como Ingeniero de Estudios de la empresa distribuidora, plantee el problema de optimización que permita encontrar el valor R^* que minimiza los costos mensuales esperados del contrato de reparación de fallas de Alumbrado Público.

4. El Call Center de una Isapre recibe llamadas correspondientes a reclamos y a consultas, las cuales pueden ser modeladas como procesos de Poisson de tasas λ_R y λ_C [llamadas/hora], respectivamente. Todos los reclamos son derivados al departamento de atención al cliente para su análisis y solución, al igual que una fracción p de las consultas. Este departamento demora un tiempo exponencialemente distribuido de tasa μ en procesar cada solicitud, ya sea reclamo o consulta. La fracción restante de las consultas corresponde a aquellas que requieren de un estudio más especializado, por lo que son derivadas a la Gerencia de Estudios de la compañía. Esta gerencia demora un tiempo exponencialmente distribuido de tasa $2 \cdot \mu$ en el procesamiento de cada consulta. Suponiendo que todas las unidades de la compañía trabajan 8 horas diarias de lunes a viernes, responda:

a) Si la semana pasada se recibieron R reclamos y C consultas, ¿cuál es el valor esperado de llamadas que esta semana serán derivadas al Departamento de Atención al Cliente?. ¿y a la Gerencia de Estudios?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima llamada que se reciba corresponda a un reclamo?.

El Departamento de Atención al Cliente debe emitir diariamente un reporte del número de llamadas recibidas en cada hora de operación. Lamentablemente, por un error computacional perdió toda la información de las consultas recibidas en las últimas 4 horas del día, pudiéndose rescatar solamente el dato de que en dicho intervalo de tiempo se recibieron Q consultas. Ante esta eventualidad, el Jefe del Departamento le encomienda a Ud. intentar reconstruir esta información.

c) Utilizando sus conocimientos de probabilidades determine cuál será la distribución de probabilidad que rige al número de llamadas recibidas en la primera hora de operación “perdida”. Intuitivamente, ¿cuál será la configuración más probable para las llamadas recibidas en cada una de las 4 horas de operación sin registros?.

d) Si un trabajador del centro de atención recuerda con seguridad que en la última hora de operación se recibieron $Q/3$ llamadas, ¿cambia su respuesta de la parte anterior?. Si su respuesta es afirmativa encuentre la distribución de probabilidad que rige al número de llamadas recibidas en la primera hora de operación “perdida” en esta nueva situación.

Suponga ahora que el Call Center funciona las 24 horas en forma continua

e) ¿Cómo modificaría el modelo de llegadas enunciado, de modo que se ajuste mejor a la nueva realidad?. Razone en función de la variación de la tasa a lo largo del día.

5. Turistas extranjeros llegan en el verano a un balneario según un proceso de Poisson de tasa λ[turistas / mes]. Independiente de todo lo demás, con probabilidad p_A, un turista que llega al balneario proviene de algún un país sudamericano y con probabilidad $1 - p_A$ proviene del resto del mundo. Los turistas comienzan a llegar el 1 de enero.

a) Si hasta mitad de mes, han llegado m turistas en total. ¿Cuál es la probabilidad que hasta fin de mes lleguen más de n turistas en total ($m \leq n$)?.

b) Dado que en un mes llegaron 100.000 turistas en total. ¿Cuál es la probabilidad que n de ellos sean sudamericanos?.

c) Es el 20 de enero y desde el 19 de enero no ha llegado ningún turista. ¿Cuál es la probabilidad que el siguiente veraneante que llegue sea sudamericano?.

d) En un mes llegaron 100.000 turistas en total. ¿Cuál es la probabilidad que la mitad de ellos hayan llegado durante la primera mitad del mes?.

e) Los turistas sudamericanos dejan en el país cantidades de dinero X_i que son variables aleatorias iid de media μ. Por su parte, los turistas del resto del mundo dejan en el país cantidades de dinero Y_i que son variables aleatorias iid de media γ. ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad total de dinero dejada en total por los turistas durante un mes?.

6. Una tienda que vende por catálogos ha realizado un estudio de su demanda, el que concluyó que para un período de venta (k) cualquiera el número de potenciales compradores se distribuye Poisson con una media igual al número de clientes que compró el producto en el período anterior ($k-1$). Además en un período (k) cualquiera, la fracción de los clientes potenciales que compran el producto es e^{-p_k} donde p_k es el precio fijado en el período (k).
Si inicialmente el número de clientes potenciales se distribuye Poisson con media λ, responda:

a) ¿Cuál es el precio óptimo y el beneficio esperado máximo si se considera un sólo período de venta?.

b) Responda lo anterior considerando 2 períodos de venta.

c) Ahora se desea resolver el problema para un horizonte de T períodos. Si k es el número de períodos que faltan hasta el fin del horizonte. Muestre que la solución óptima satisface:

$$p_k^* = 1 - U_{k-1}$$

y el beneficio esperado máximo acumulado es:

$$V_k^*(s_{k+1}) = s_{k+1} \cdot U_k$$

donde s_k son las ventas den el período k y U_k se define recursivamente por $U_0 = 0$ y $U_k = e^{U_{k-1}-1}$.

7. Suponga que las personas que poseen cierta póliza de seguro sufren accidentes en instantes $0 < t_1 < t_2 < ....$, siguiendo un proceso de Poisson de tasa λ. Según el tipo de accidente, existen distintas cantidades de dinero que debe pagar la compañía aseguradora al cliente. Para el accidente ocurrido en t_n, la compañía cubre un monto de Y_n.

a) Escriba la expresión para el monto total que deberá pagar la empresa a los accidentados en un intervalo [0,T] ? ¿Qué tipo de proceso es ?.

b) Suponga que existen pagos negativos (el cliente debe devolver dinero) cada vez que se detectan accidentes simulados, de manera que Y_t puede ser modelada como una variable aleatoria de distribución Normal(μ, σ^2). ¿Qué cantidad de dinero debería tener disponible la compañía para cubrir, en promedio, sus gastos en un período [0,t] ?.

8. Entre las distintas actividades que se deben planificar para un evento que durará 10 horas, está el planificar el tamaño del estacionamiento que se va a arrendar para los autos de los visitantes. La llegada de los automóviles al evento siguen un proceso Poisson con tasa λ(autos / hora).
Los organizadores deben pagar por el área total arrendada. Ellos saben que cada auto ocupa un área de A (m^2) y el costo es de h [\$/m^2]. Cada auto que no puede estacionarse porque el estacionamiento

está lleno es un cliente (visitante) perdido, pues éste abandona el lugar. Una vez que un visitante llega al evento permanece en él hasta la hora de cierre. Los clientes que entran al evento reportan un beneficio de b (\$/Cliente).

a) Formule el problema para determinar el número óptimo de estacionamientos (X) que deben arrendar los organizadores del evento.

b) Suponiendo que los organizadores determinan que el número óptimo de estacionamientos es $X = 500$. ¿Cuál es la probabilidad de que se llene?.

c) ¿Cuál es el número promedio de autos que entran al estacionamiento?.

d) Si el evento comienza a la 10 de la mañana, ¿Cuál es la probabilidad de que si Ud. llega al recinto a las 3 de la tarde encuentre estacionamiento?.

9. (*)Un alfarero muy meticuloso en su trabajo y en todo lo que lo rodea, se dedica a fabricar ollas de greda. Un día en que usted paseaba su vecindario, se encontró con este alfarero. Él le dijo que según mediciones que había realizado, el número de ollas que fabrica en un intervalo de largo h [horas] sigue una distribución de Poisson de media $\lambda_1 h$, para cualquier valor de h e independiente del número de ollas que haya fabricado antes o después de ese lapso. Además, él debe despachar a Santiago toda su producción diaria (de T horas de trabajo) al final del día. Sabiendo que usted realiza estudios de ingeniería, él le consultó si podía contestarle algunas preguntas que son las siguientes:

a) Conteste cada uno de los siguiente puntos:

- Se sabe que en un día se produjo una olla. Condicional a ese evento, calcule la esperanza del tiempo de "espera" de esa olla. Considere que la "espera" de cada olla es el tiempo entre su producción y su despacho a Santiago.
- Si en un día se produjeron N ollas (y condicional a ese evento), ¿cuál es el valor esperado del tiempo total de espera de las N ollas?. El "total" se refiere a la suma de los tiempos de espera de cada una de las ollas.
- ¿Cuál es la esperanza del tiempo total de espera, de todas las ollas producidas en un día?.
- Suponga que ahora, además de despachar al final del día, el alfarero puede hacerlo en algún instante t durante el día ($0 < t < T$). Es decir, se realizarán dos despachos: uno en el instante t y el otro en T, al final del día. Escriba ahora, en función de t, la nueva esperanza del tiempo total de espera, de todas las ollas producidas en un día.
- ¿Qué instante t^* elegiría para realizar el nuevo despacho durante el día, de modo de minimizar el tiempo medio total de espera?.

Su conocido alfarero ha decidido asociarse con un vecino, el cual fabricará las tapas de las ollas. El tiempo de fabricación de cada tapa se distribuye exponencialmente con tasa λ_2. Al final del día (después de T horas de trabajo), se mandan a Santiago las "parejas" ollas - tapas que se lograron producir (en este caso sólo existe un único despacho). Si hay más ollas que tapas, éstas se guardan para el día siguiente y viceversa.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer día de sociedad se despachen K ollas con sus respectivas tapas?.

c) Suponga que al comienzo del día, en el taller del alfarero no hay ni ollas ni tapas. En promedio, ¿cuántas ollas (que no lograron ser despachadas con sus respectivas tapas) habrá disponible al comienzo del día siguiente?.

10. (*) Considere una posta de atención de urgencias médicas donde llegan dos tipos de pacientes: los graves (que deben ser atendidos de inmediato) y los leves (que pueden esperar para ser atendidos). Se sabe que cada uno de estos grupos de pacientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con tasas 2 y 4 pacientes por hora respectivamente. Además, todos los pacientes graves deben permanecer

en observación hasta el día siguiente, momento en el cual son dados de alta o son trasladados a un hospital.

Considere que a las 7:00 a.m. los pacientes graves son evaluados para decidir si son dados de alta o trasladados. Por ello, a las 7:00 todas las camas se desocupan. Los pacientes ingresan las 24 horas al servicio.

Los pacientes leves NO ocupan camas.

a) La posta desea determinar el número de camas que debe tener para los pacientes graves, de modo que con probabilidad de por lo menos 0.95 puedan ser atendidos todos los pacientes graves que ingresen y no deban ser derivados a otra posta. Entregue una expresión para determinar este número de camas.

b) Se sabe que sólo un paciente grave ingresó entre las 7:00 y 8:00. Ese día el médico llegó cinco minutos atrasado (es decir a las 7:05, ya que su turno comenzaba a las 7:00). ¿Cuál es la probabilidad que dicho paciente haya muerto debido a que no estaba presente el médico? (suponga que un paciente grave muere si no es atendido de inmediato).

c) Dado que llegaron 10 pacientes, ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros cinco hayan sido graves y los siguientes cinco leves?.

d) Para el ingreso de pacientes leves y graves debe llenarse un formulario y entregarse en una ventanilla de atención al paciente. Si la persona que atiende la ventanilla debe ausentarse por unos minutos para ir al baño. ¿Cuánto es el máximo de tiempo que puede hacerlo de modo que la probabilidad de que llegue un paciente durante su ausencia sea menor que 5 %?.

11. (*) Un conductor se acerca en su automóvil a una intersección por una vía secundaria, y enfrenta un disco "Pare". No hay ningún vehículo antes que él esperando pasar (por su misma vía). Por la vía principal (la que tiene prioridad) el paso de vehículos a través de la intersección se puede modelar como un proceso Poisson de tasa λ [vehículos/segundo].

El conductor que llega por la vía secundaria detendrá su vehículo al llegar a la intersección, y observará cuánto tiempo falta para que el próximo vehículo atraviese la intersección por la vía principal. Si ese tiempo es igual o mayor que τ segundos él considerará que es seguro pasar, y atravesará la intersección. Por el contrario, si faltan menos de τ segundos para que pase el próximo vehículo por la vía principal, él pensará que es imprudente pasar, y esperará detenido a que ese vehículo pase, y seguirá esperando hasta que se produzca una "brecha" igual o mayor a τ segundos. Suponga que en la esquina hay buena visibilidad, de manera que el conductor siempre puede determinar con exactitud cuánto falta para que pase el próximo vehículo.

El objetivo de este problema es encontrar la distribución del tiempo que este conductor deberá estar detenido en la intersección antes de poder pasar, tiempo que denotaremos W.

a) Calcule la probabilidad de pasar de inmediato (i.e. $\Pr[W = 0]$).

b) Suponga que nuestro conductor no pudo pasar de inmediato, pues al llegar a la intersección vio que venía un auto por la vía principal el cual iba a atravesar la intersección en menos de τ segundos. Llamemos X al tiempo que transcurre hasta que dicho auto (el que viene por la vía principal) atraviesa la intersección. Argumente que, con la información dada, la función de densidad de X viene dada por $f_X(x) = C\lambda \exp(-\lambda x)\, \forall x \in [0, \tau]$ y $f_X(x) = 0\, \forall x \notin [0, \tau]$. Calcule el valor de la constante C y el valor esperado de X.

c) El auto que venía por la vía principal acaba de atravesar la intersección. Llame W_2 al tiempo que transcurrirá *a partir de este instante* hasta que nuestro conductor logre pasar. Compare la distribución de W_2 con la distribución (a priori) de W.

d) Calcule $E[W]$.
Hint: Calcule la esperanza condicional en el evento que nuestro conductor haya podido pasar de inmediato o se haya visto obligado a esperar. Use sus resultados de las partes (a), (b) y (c).

e) Argumente que W se puede expresar como $W = \sum_{i=1}^{N} X_i$ donde N es una variable aleatoria y $\{X_i\}_{i\geq 1}$ son variables aleatorias iid que además son independientes de N. Especifique la distribución de N y de X_i.

12. A una tienda comercial llegan clientes de acuerdo a un proceso Poisson de parámetro λ [clientes/semana]. La tienda ofrece un único producto y los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto. Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta (entendemos por disposición a pagar la mayor cantidad de dinero que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto). Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar d de un cliente cualquiera es una variable aleatoria con función de densidad $f(d)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F(d)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor que el precio al que la tienda vende el producto; en caso contrario se va sin comprar. Suponga que la tienda dispone de inventario infinito.

   a) Si la tienda vende el producto a un precio P ¿Cuál es la probabilidad que un cliente cualquiera que entra a la tienda compre el producto?. ¿Cuál es la ley de probabilidad para el número de personas que compra el producto y para el número de personas que se van sin comprar en una semana dada?. ¿Cuánto vale el ingreso esperado por ventas en una semana cualquiera?.

   b) ¿Qué condiciones debe satisfacer P^*, el precio que maximiza el ingreso esperado por ventas en una semana cualquiera?.

   Suponga ahora que el inventario disponible es de C unidades al comienzo de una semana dada, y no tiene la posibilidad de reabastecerse en caso que se agote el producto.

   c) ¿Cuánto vale $B(P, C)$, el ingreso esperado por ventas para esa semana si se vende a un precio P?.

13. (*) Partiendo en $t = 0$, los buses llegan a un paradero según un proceso de Poisson de tasa λ. Por su parte, lo pasajeros llegan a esperar al paradero según un proceso de Poisson de tasa μ. Al llegar el bus, todos los pasajeros que se encuentren esperando se suben instantáneamente a él (i.e. capacidad del bus es infinita), y los pasajeros que llegan posteriormente a esperar se suben al siguiente bus.

   a) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que entran al m-ésimo bus, dado que el tiempo entre las llegadas del bus $m - 1$ y del bus m-ésimo es t.

   b) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al m-ésimo bus.

   c) Dado que un bus llega a las 10:30 AM y no llegan buses entre las 10:30 y las 11:00 AM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.

   d) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros esperando en algún momento cualquiera del tiempo, por ejemplo, 2 : 30 PM. Suponga que el proceso empezó *hace mucho* tiempo.

   e) Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus (que pasa después de las 2:30 PM).

   f) Dado que Ud. llega a esperar el bus a las 2:30 PM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.

14. (*) Al parque nacional "Santuario de la Naturaleza" llegan diariamente automóviles de acuerdo a un proceso de Poisson con tasa λ [automóviles/hora]. La entrada al recinto se paga por persona que ingresa y el precio individual de p [$], es decir, si en un automóvil vienen tres personas, la entrada total de este auto es de $3 \cdot p$ [$].

Estadísticamente se sabe que el número de personas en cada automóvil, X, son variables aleatorias i.i.d con las siguiente ley de probabilidad:

$$\begin{array}{ll} \Pr[X=1]=0{,}1 & \Pr[X=4]=0{,}3 \\ \Pr[X=2]=0{,}2 & \Pr[X=5]=0{,}1 \\ \Pr[X=3]=0{,}3 & \end{array}$$

El parque abre sus puertas diariamente desde las 08:00 hasta las 16:00 hrs. Una hora después de cerrar todas las personas abandonan el parque (suponga que nadie se va antes).

a) Se sabe que a las 8:15 habrán llegado 2 personas al parque. ¿Cuál es la probabilidad de que las primeras 2 personas que llegan al parque vengan juntas?.

b) ¿Cuál es la recaudación diaria promedio del parque?.

c) Se está pensando hacer un descuento a aquellos autos con más de 2 pasajeros (3 o más). En este caso se cobraría el 80 % del precio por persona ¿Cuál sería la recaudación promedio diaria en este caso?.

d) Se está pensando en construir un estacionamiento techado. ¿Cuál debe ser su tamaño M [sitios] de modo que la probabilidad de que algún auto no alcance a estacionarse bajo techo sea menor o igual a 5 %?. Asuma que un conductor siempre se estaciona bajo techo si hay espacio disponible.

15. (*) Considere una sala de cine con capacidad para 200 personas. La entrada a la función es de p [$] por persona. Sin embargo, si el cliente es "socio" del cine se le hace un 20 % de descuento.

Asuma que las personas llegan al cine de acuerdo a un proceso de Poisson a comprar las entradas y que cada persona compra sólo una entrada. Las entradas para la función de las 22:00 horas comienzan a venderse durante el mismo día desde las 16:00 horas, y la boletería se cierra a las 22:00.

Las tasa de llegada es de 40 personas/hora, y cada una persona posee tarjeta de socio con una probabilidad de un 25 %.

a) Si usted sabe que se vendieron n entradas ¿Cuál es la probabilidad de que i entradas se hayan vendido a "socios" del cine?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se vendan n entradas ($n \in \{0, 1, 2, ...\}$)?.

c) ¿Cuál es la utilidad esperada por función?.

d) Suponga que la administración del cine ha decidido no vender más de 50 entradas a precio rebajado para cada función. Una vez alcanzado este límite, se rechazará a los "socios" del cine (asuma que los clientes a los que se les rechace la entrada rebajada no optarán por pagar el valor completo, sino que se retirarán). ¿Cuál es la probabilidad que se vendan 50 entradas a precio rebajado?.

16. (*) A un Banco llegan clientes de acuerdo a un proceso Poissoniano no homogéneo, cuya tasa está dada por

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{14,1-t}}, \ 0 < t < 14,1$$

El tiempo está medido en horas, y el banco opera desde las 9 y hasta las 14 horas. Los clientes, sin embargo, llegan entre las 9 y las 14:06 hrs.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cliente llegue entre las 10:00 y las 11:00 ?.

b) Si todos los clientes se demoran exactamente 12 min. dentro del banco, determine el número esperado de clientes dentro del banco en cualquier instante del día.

c) Calcule el número promedio de clientes que se retiran indignados pensando seriamente en cambiarse de banco cada día (esto ocurre cuando el cliente encuentra que el banco ya cerró sus puertas, haciendo gala de mucha puntualidad y poca comprensión). ¿A qué hora debiese cerrar sus puertas el banco para que este número disminuya a la mitad?.

17. (*) En un instante cualquiera del día, usted llega a una parada de buses a la cual llegan buses de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Si usted toma el bus desde el paradero, demora un tiempo fijo R desde que sube al bus hasta llegar a su casa. Si camina desde el paradero a su casa demora un tiempo fijo W. Suponga que su política al llegar a la parada de buses es esperar el bus un tiempo s y si éste no ha pasado hasta ese instante, entonces decide caminar.

    a) ¿Cuál es la distribución del tiempo de pasada del siguiente bus desde que usted llega a la parada de buses?. Dada su política de espera, cuál es la probabilidad que usted camine a su casa?.

    b) Si el bus pasa en un instante $t \leq s$ desde su llegada a la parada de buses, ¿cuánto tiempo demora usted en llegar a su casa desde su arribo al paradero?.¿Y si el bus pasa en un instante $t \geq s$?.

    c) calcule el tiempo esperado que transcurre desde su llegada al paradero hasta llegar a su casa.

    d) Muestre que si $W < \frac{1}{\lambda} + R$ entonces el tiempo esperado de la parte anterior se minimiza en s=0; si $W > \frac{1}{\lambda} + R$ entonces se minimiza en s=∞; y si $W = \frac{1}{\lambda} + R$ todos los valores de s entregan el mismo tiempo esperado.

    e) ¿Qué representa en realidad $s = 0$ y $s = \infty$?. Entregue una explicación intuitiva de por qué esas son las únicas dos políticas interesantes al considerar minimizar el tiempo esperado.

18. (*) Dos amigos asisten a un partido de fútbol para ver al equipo de sus amores. Durante un partido los jugadores de este equipo hacen goles de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Los amigos sin embargo, celebran cada gol durante un tiempo B, lapso de tiempo durante el cual no son capaces de ver lo que sucede en la cancha. Si se supone que tras cada gol, el partido es reasumido instantáneamente conteste:

    a) ¿Cuál es la probabilidad que los amigos vean los 7 primeros goles?.

    b) Para $t \geq (n-1)B$, encuentre $Pr[R(t) \geq n]$, donde $R(t)$ es el número de goles vistos por los amigos hasta el instante t.

19. (*) Suponga que clientes llegan a una estación de servicios según un proceso de Poisson de tasa λ. A su llegada cada cliente es atendido inmediatamente por uno de los innumerables empleados. Los tiempos de servicio se distribuyen según una distribución $G(t)$. Determine la distribución del número de clientes en el sistema en el instante t.

20. (*) Suponga que autos entran en una carretera de un solo sentido y de un largo L, de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Cada auto viaja a velocidad constante determinada aleatoriamente, independientemente de los otros autos, mediante una distribución F. Cuando un auto se encuentra con un auto más lento, lo sobrepasa sin pérdida de tiempo. Suponga que un auto entra a la carretera en el instante t. Muestre que cuando $t \rightarrow \infty$ la velocidad del auto que minimiza el número de encuentros con otros autos, donde un encuentro con un auto se produce cuando el auto es sobrepasado o sobrepasa a otro, es la esperanza de la distribución del tiempo de viaje.

21. (*) Los votantes en la elección municipal llegan a un determinado local de votación según un proceso de Poisson de tasa λ. Cada votante, independiente de todo lo demás, vota con probabilidad 0.5 por el candidato A y con probabilidad 0.5 por el candidato B. Suponga que la votación comienza en $t = 0$ y dura indefinidamente.

    a) Condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, ¿cuál es la probabilidad que el candidato A reciba n de estos votos?.

b) Nuevamente condicional en que votaron 1000 personas durante las primeras 10 horas, encuentre la probabilidad que el candidato A reciba n votos en las primeras 4 horas de votación.

c) Sea T el instante de la llegada del primer votante por A. Encuentre la función de densidad de A.

d) Encuentre la función de probabilidad del número de votantes por B que llegan antes del primer votante por A.

e) Defina el $n-$ésimo votante como una inversión si éste vota distinto que el $(n-1)-$ésimo. Por ejemplo, en la secuencia AABAABB, el tercer, cuarto y sexto votantes son inversiones. Encuentre la densidad de probabilidad del tiempo entre inversiones.
Hint: Deduzca la probabilidad que una llegada cualquiera produzca una inversión. Con ello deduzca el proceso de conteo de inversiones y encuentre la densidad de tiempo entre estos eventos.

22. (*) Suponga que autos entran en el kilómetro 0 a una carretera de una dirección infinita según un proceso de Poisson de tasa λ. El auto i que entra escoge una velocidad constante V_i (kms/hrs) a la cual viajar. Suponga que las velocidades V_i son variables aleatorias, independientes, positivas y de distribución común F. Encuentre la distribución del número de autos que se encuentran entre los kilómetros a y b $(a < b)$ de la carretera en el instante t (medido en horas). Suponga que los autos se adelantan unos a los otros sin pérdida de tiempo.

23. (*) Suponga que un aparato está sujeto a shocks que ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. El i-ésimo shock causa un daño D_i, $i > 1$, los cuales se asumen son iid. e independientes de $[N(t), t > 0]$, donde $N(t)$ es el número de shocks en [0,t]. El daño provocado por un shock de daño inicial D_i decae exponencialmente en el tiempo. Esto es, si el shock provoca un daño inicial D, entonces t unidades de tiempo más tarde este daño será $D \cdot e^{-t}$. Si se supone que los daños son aditivos:

a) Calcule la esperanza de $D(t)$, donde $D(t)$ es el daño que presenta el dispositivo en el instante t.

b) Repita el cálculo mediante el uso de la función generadora de momentos.

24. En esta pregunta asumiremos que tenemos dos procesos de Poisson independientes entre sí, A y B, con tasas λ_1 y λ_2, respectivamente.

a) Suponga que observamos los dos procesos en su conjunto, y elegimos un evento. Argumente o muestre que la probabilidad de que ese evento corresponda al proceso A es $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

b) Calcule el número de medio de eventos del proceso B entre dos eventos sucesivos del proceso A.

c) Consideremos ahora los procesos de conteo asociados, $N_A(t)$ y $N_B(t)$; éstos pueden graficarse en el plano $(x,\, y)$ y observar de este modo la evolución del proceso en dos dimensiones. Calcule la probabilidad que el proceso intersecte la línea $x + y = z$ en el punto $(x_0,\, y_0)$ tal que $x_0 + y_0 = z$

25. (*) Utilizando la definición de un proceso de conteo y una aproximación “Bernoulli” a un proceso de Poisson, mostraremos que $N(t)$ se distribuye Poisson de media $\lambda \cdot t$. Para esto dividiremos el intervalo $[0,\, t]$ en k intervalos de tamaño t/k con $k >> 0$ y contestaremos las siguientes preguntas.

a) Muestre que la probabilidad de que ocurran 2 o más eventos en algún subintervalo tiende a 0 si $k \to \infty$.

b) Muestre que $N(t)$ es binomial de parámetro k, $p = \frac{\lambda t}{k} + o(\frac{t}{k})$

c) Utilizando la parte anterior concluya que $N(t)$ se distribuye Poisson de media $\lambda \cdot t$.

26. (*) Autos llegan a un semáforo de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Este semáforo cambia de color cada A unidades de tiempo. Si un auto llega al cruce y encuentra el semáforo en verde pasará inmediatamente. Si lo encuentra en rojo deberá esperar hasta el próximo cambio de luz. Suponiendo que la calle es lo suficientemente ancha como para que no se formen colas, y que el tiempo que demora un auto en atravesar el cruce es despreciable, calcule:

a) La distribución de probabilidades de X(t), la cantidad de autos que han tenido que esperar para cruzar en algún instante, en t.

b) La distribución de probabilidades del número de autos que están esperando para cruzar en el instante t.

Suponga que en realidad este semáforo está instalado en el cruce entre dos calles. Por una de las calles (calle x) llegan autos según un proceso de Poisson de tasa λ_x. Cada unidad de tiempo que un auto espera en esta calle significa un costo de M [$]. Por otro lado, los autos que vienen por la otra calle (calle y) llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_y. Si un auto que viene por esta última vía espera t unidades de tiempo en el semáforo, se incurre en un costo t^2M [$]. Si llamamos A al lapso de tiempo durante el cual el semáforo está en rojo para la calle x y B al tiempo durante el cual el semáforo está en rojo para la calle y ($A + B = C$, con C constante).

c) Calcule la esperanza del costo incurrido desde que el semáforo de luz roja, cambia a verde y vuelve a ser roja.

d) Calcule los tiempos A^* y B^* que minimizan el costo incurrido por el sistema durante el ciclo C.

27. Considere un ascensor que parte en el zócalo de un edificio y sube por éste. Sea N_i el número de personas que se suben al ascensor en el piso i. Suponga que los N_i son independientes y que de distribuyen según Poisson de tasa λ_i. Cada persona que se sube en el piso i, independiente de todo el resto, se bajará en el piso j con una probabilidad P_{ij}. Sea O_i el número de personas que se bajan del ascensor en el piso j.

   a) Calcule la distribución de O_j

   b) ¿Cuál es la esperanza de O_j?.

   c) ¿Cuál es la distribución conjunta de O_i y O_K?.

28. (*) Sea $[N_1(t), t > 0]$ un proceso de Poisson de tasa λ_1 . Las llegadas de este proceso se colocan en ON o en OFF debido a un switch activado y desactivado por las llegadas de un segundo proceso de Poisson independiente de tasa λ_2 $[N_2(t), t > 0]$. Sea $[N_a(t), t > 0]$ el proceso resultante, o sea $N_a(t)$ incluye las llegadas de $N_1(t)$ cuando $N_2(t)$ es par.

   a) Encuentre la distribución del número de eventos de $N_1(t)$ registrados durante el $N-$ésimo período en que el switch está en ON.

   b) Dado que la primera llegada del segundo proceso ocurrió en τ, encuentre la distribución condicional del número de llegadas de $N_1(t)$ hasta τ .

   c) Dado que el número de llegadas de $N_1(t)$ hasta la primera llegada de $N_2(t)$ es n, encuentre la densidad de la primera llegada de $N_2(t)$.

   d) Sea X_a el tiempo entre arribos del proceso $N_a(t)$, calcule $E(X_a)$.

29. Un proceso de Poisson bi-dimensional es aquel cuyos eventos pertenecen a $\mathbb{R}^2$ tal que:

   - Para cualquier región del plano de área A el número de eventos en A se distribuye según un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot A$.
   - El número de eventos en regiones disjuntas son independientes.

   Considere un punto fijo r. Sea X la distancia entre r y el evento más cercano (utilizando norma euclidiana). Demuestre que:

   a) $Pr[X > t] = e^{-\lambda\pi t^2}$

   b) $E[X] = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\lambda}}$

c) Sea R_i, la distancia desde un punto arbitrario hasta el $i-$ésimo evento más cercano a él, $R_0 = 0$. Muestre que

$$\pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2 \quad (i \geq 1)$$

son variables aleatorias independientes exponencialmente distribuidas de tasa λ.

30. Suponga que eventos ocurren según un proceso de Poisson no homogéneo de tasa $\lambda(t)$ y que si un evento ocurre en el instante s contribuye con una cantidad aleatoria de distribución F_s, $s \geq 0$. Muestre que W, la suma de todas las contribuciones hasta el tiempo t es un proceso de Poisson compuesto. Es decir muestre que W tiene la misma distribución que $\sum_{i=1}^{N} X_i$, donde X_i son variables aleatorias iid e independientes de N.

31. *a*) Considere un proceso de Poisson no homogéneo $[N(t), t \geq 0]$, con función media $m(t)$. Dado $N(t) = n$, muestre que el conjunto de tiempos de llegada (desordenados) tienen la misma distribución que n variables iid con distribución:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{m(x)}{m(t)} & si \quad x \leq t \\ 1 & si \quad x > t \end{cases}$$

b) Suponga que trabajadores sufren accidentes según un proceso de Poisson no homogéneo con función de valor medio $m(t)$. Además suponga que cada trabajador accidentado queda sin trabajar durante un tiempo aleatorio distribuido según F. Sea $X(t)$ el número de trabajadores fuera del trabajo en el instante t. Calcule $E(X(T))$ y $Var(X(t))$.

32. A un aeropuerto llegan pasajeros a la zona de embarque según un proceso de Poisson no homogéneo de tasa $\lambda(t)$. Se sabe que los pasajeros pueden ser de dos tipos: *sospechosos* o *con buena presencia*. Cada pasajero tiene una probabilidad q_s de ser de tipo *sospechoso*, y una probabilidad $q_n = 1 - q_s$ de tener buena presencia.

La seguridad de la línea aérea ha dispuesto que una fracción de los pasajeros *sospechosos* y de los que tienen *buena presencia* tengan que someterse a una revisión para detectar eventuales terroristas. La selección de los pasajeros para este control es tal que con probabilidad $R_s(t)$ un pasajero de tipo *sospechoso* que llega en el momento t deberá someterse a la revisión, mientras que si es de tipo *buena presencia* esta probabilidad es $R_n(t)$.

La revisión de los pasajeros es instantánea, incurriéndose en un costo C por cada pasajero controlado. Además, se sabe que con seguridad el sistema de control detectará a un terrorista intentando abordar el avión, los que serán entregados a la justicia. Estudios de la CIA han determinado que una fracción B_s de los pasajeros que parecen *sospechosos* son terroristas, mientras que una fracción B_n de los pasajeros *con buena presencia* también son terroristas ($B_s > B_n$).

Los pasajeros aceptados en el control y aquellos que no tuvieron que someterse a revisión ingresan al salón VIP donde deben esperar hasta que salga el vuelo. El avión despega en un tiempo T con a lo más N pasajeros. La línea aérea incurre en un costo p por cada unidad de tiempo que un pasajero espera en el salón VIP por concepto de bebidas y entretenciones, además de un costo D por cada pasajero que estando en el salón VIP para abordar el vuelo no puede hacerlo por falta de espacio, en este caso, los pasajeros tienen todos la misma probabilidad de no poder abordar independiente del orden en que llegaron.

Por otra parte, la compañía sabe que si en el avión van k terroristas hay una probabilidad A_k que los terroristas secuestren la aeronave, lo que significa un costo en imagen valorado en X con $X >> C$.

a) Encuentre la distribución del proceso de llegadas al salón VIP.

b) Calcule el costo esperado por concepto de bebidas y entretenciones en el salón VIP.
<u>Hint:</u> Puede ser de utilidad recordar lo demostrado en la pregunta anterior.

c) Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas detectados en el control. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de los que están esperando en el salón VIP en el tiempo T?.

d) Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas que finalmente abordan a un vuelo.

e) Calcule el costo esperado total que deberá incurrir la línea aérea en un vuelo.

2. Resolución problemas de Procesos de Poisson

■ **3.** *a*) Como los meses son intervalos disjuntos de tiempo estas probabilidades son independientes. La esperanza del número de fallas será $30 \cdot (\lambda_D + \lambda_A)$ en 1 mes.

b) Esta es la típica pregunta tipo "¿Cuál es la probabilidad que pase A antes de B?". Si T_D es el tiempo en que ocurre la primera falla domiciliaria y T_A es el tiempo en que ocurre la primera falla de alumbrado público sabemos que $T_D \rightsquigarrow exp(\lambda_D)$ y $T_A \rightsquigarrow exp(\lambda_A)$

$$P(T_D < T_A) = \frac{\lambda_D}{\lambda_D + \lambda_A}$$

c) Una manera de verlo es darse cuenta que los 3 procesos involucrados son independientes, y proceder a calcular directamente la esperanza. Otra manera es calcular la esperanzas de las fallas condicionado al tiempo que dure la reparación y luego calcular lo que nos piden. Si T_r es el tiempo que dura la reparación en meses:

$$\begin{aligned}
E[\text{N fallas Domiciliarias}/T_r = t] &= \lambda_D \cdot \frac{t}{24} \\
\Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] &= \int_0^\infty \frac{\lambda_D \cdot t}{24} \cdot \frac{1}{T} \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t}\, dt = \frac{\lambda_D}{24} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{T} \cdot t \cdot \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t}\, dt \\
&= \frac{\lambda_D \cdot T}{24} \\
\Rightarrow E[\text{N fallas Alumbrado público}] &= \frac{\lambda_A \cdot T}{24}
\end{aligned}$$

d) En este caso los costos están divididos en 2 tramos: Si N_A = Número de fallas de Alumbrado público son menores que R se pagará $s_1 \cdot R$, mientras que si $N_A > R$ se pagará $s_1 \cdot R + s_2 \cdot (N_A - R)$. Así el problema de minimización queda:

$$\min_R \left\{ s_1 \cdot R \cdot P(N_A \leq R) + \sum_{k=R+1}^{\infty} [s_1 \cdot R + s_2 \cdot (k - R)] \cdot P(N_A = k) \right\}$$

$$\min_R \left\{ s_1 \cdot R + \sum_{k=R+1}^{\infty} s_2 \cdot (k - R)] \cdot \frac{(\lambda_A \cdot 30)^k \exp^{-\lambda_A \cdot 30}}{k!}) \right\}$$

■ **9.** *a*) Sea t_1 = instante en que se produce la olla.

$$\begin{aligned}
\text{Dado que N(T)=1} \quad &\Rightarrow t_1 \sim U[o, t] \\
&\Rightarrow \mathbb{E}(t_1 | N(T) = 1) = \tfrac{T}{2}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(T - t_1 | N(T) = 1) = \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(t_1 | N(T) = 1) = \frac{T}{2}$$

Generalizando lo anterior, es decir, si se producen N ollas:

$$\mathbb{E}(\sum_{t=1}^{N} T - t_1 | N(T) = N) = N \cdot T - \mathbb{E}(\sum_{t=1}^{N} t_1 | N(T) = N) = NT - \frac{NT}{2} = \frac{NT}{2}$$

Recordando que $\mathbb{E}_x(x) = \mathbb{E}_y(\mathbb{E}_x(x|y))$, entonces:

$$\mathbb{E}(\text{Tiempo total de espera}) = \mathbb{E}_N(\mathbb{E}(\text{Tiempo total de espera} | N(T) = N))$$

$$\mathbb{E}(\text{Tiempo total de espera}) = \mathbb{E}_N(\frac{NT}{2}) = \frac{T}{2} \cdot \mathbb{E}_N(N) = \frac{T}{2} \cdot \lambda \cdot T = \frac{T^2 \cdot \lambda}{2}$$

Si hay dos despachos, el análisis es exactamente igual al anterior, solamente que tenemos dos "días", uno de largo s y otro de largo T-s. Ocupando el resultado de la parte anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Tiempo total de espera}) &= \frac{s^2 \cdot \lambda}{2} + \frac{(T-s)^2 \cdot \lambda}{2} \\ \frac{\partial \mathbb{E}()}{\partial s} &= 0 \Rightarrow s^* = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

b) Basándonos en esta nueva situación tenemos lo siguiente: Si entregamos exactamente k ollas es porque el mínimo entre la producción de ollas y tapas es k. Entonces:

$$\mathbb{P}(\text{mín}\{N_1(T), N_2(T)\} = k) = \mathbb{P}(N_1(T) = k, N_2(T) \geq k) + \mathbb{P}(N_2(T) = k, N_1(T) > k)$$

Dada la independencia de los procesos se tiene:

$$\mathbb{P}() = \mathbb{P}(N_1(T) = k) \cdot \mathbb{P}(N_2(T) \geq k) + \mathbb{P}(N_2(T) = k) \cdot \mathbb{P}(N_1(T) > k)$$

Donde las expresiones pueden determinarse explícitamente dada la distribución de los procesos.

c) Sea O(T)= Número de ollas sobrantes al final del día = $\text{máx}\{N_1(T) - N_2(T), 0\}$, entonces:

$$\mathbb{E}(O(T)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(O(T) = k)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(O(T) = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1(T) = j + k) \cdot \mathbb{P}(N_2(T) = j) \\ \mathbb{P}(O(T) = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{2j+k} \lambda^{j+k} \lambda_2^j e^{-T(\lambda + \lambda_2)}}{(j+k)! \cdot j!} \end{aligned}$$

Sólo resta remplazar...

■ **10.** *a)* Supongamos que se decide colocar N camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en t=0 (7:00 am) y termina en t=T (7:00am del día siguiente). De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más N pacientes graves}] = \sum_{i=0}^{N} \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!}$$

Donde λ_1 es la tasa de llegada de los pacientes graves (2 al día). Entonces buscamos un N^* tal que:

$$N^* = \inf \left\{ N | N \in \{0, 1, ...\} \quad \wedge \quad \sum_{i=0}^{N^*} \frac{(\lambda_1 T)^i e^{-\lambda_1 T}}{i!} \geq 0{,}95 \right\}$$

b) El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llegó. Si llegó antes de $t = 5$ (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llegó después de las $t = 5$ sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llegó en el instante X $(0 \leq X \leq 60)$ Entonces:

$$P[\text{Muerto}|\text{Llego en X}] = 1_{X \leq t=5}$$

Si embargo debemos descondicionar. Para esto vemos que la distribución condicional de las llegadas de Poisson hasta un instante t se distribuyen uniformemente entre 0 y T. Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned}
P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \int_0^{5} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \int_0^{5} 1 \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \frac{5}{60} \quad = \quad \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

c) Esto es básicamente la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue un paciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}$$

donde λ_2 es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y considerando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que buscamos, P, es:

$$\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_g + \lambda_l}\right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_g + \lambda_l}\right)^5$$

d) Por la pérdida de memoria de la exponencial el mundo “comienza” cuando el tipo inicia su ida al baño. Por otro lado, debido a la suma de procesos de Poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en sí un proceso de Poisson de tasa $\lambda_g + \lambda_l$, y por lo tanto Y, el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro $\lambda_g + \lambda_l$. Entonces el tiempo máximo, T^*, de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_g + \lambda_l) \cdot T^*} = 0{,}95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{ln(0{,}95)}{\lambda_g + \lambda_l}$$

■ **11.** *a*) Sea T = el tiempo que falta para que el próximo auto cruce.

$$\begin{aligned}
P[\text{Pasar de inmediato}] &= P[\text{Primer auto demora más que } \tau] \\
&= P[T > \tau] \\
&= 1 - F(\tau) \\
&= e^{-\lambda \tau}
\end{aligned}$$

b) Derivaremos esta densidad a partir de la distribución acumulada. Nos piden:

$$P[T < t | T < \tau] = \frac{P[T < t \wedge T < \tau]}{P[T < \tau]}$$

Donde

$$P[T < t \wedge T < \tau] = \begin{cases} P[T < t] & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

Entonces:

$$P[T < t | T < \tau] = \begin{cases} \frac{P[T<t]}{P[T<\tau]} & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$F_x = \begin{cases} \frac{1-e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda\tau}} & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

Entonces:

$$f_x = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda\tau}} & t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases}$$

Esto implica que $C = \frac{1}{1-e-\lambda\tau}$

c) La distribución de W es la misma que la de W_2 (Pérdida de memoria, procesos independientes).

d)

$$\begin{aligned} E(W) &= E[W|T \geq \tau] \cdot P[T \geq \tau] + E[W|T < \tau] \cdot P[T < \tau] \\ &= 0 + (E[X] + E[W]) \cdot P[t < \tau] \end{aligned}$$

Se puede verificar que:

$$E[X] = C \int_0^\tau x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{1 - e - \lambda\tau} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau + 1))$$

Entonces:

$$E[W] = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda\tau}} \cdot (1 - e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau + 1))$$

■ **13.** *a*) Sea N_m= Número de personas que se suben al m-ésimo bus. Sea x_m= tiempo entre llagada del bus m-1 y el m-ésimo.

$$P(N_m = j | x_m = t) = \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!}$$

b) Tenemos que descondicionar el resultado de la parte anterior:

$$P(N_m = j) = \int_0^\infty P(N_m = j | x_m = t) \cdot f_{x_m}(t) \partial t$$

donde $f_{x_m}(t)$ es la densidad del tiempo entre el bus m-1 y el m-ésimo. Sin embargo sabemos que $f_{x_m}(t) \to exp(\lambda)$. Entonces:

$$P(N_m = j) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!} \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t$$

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{j+1} t^j e^{-(\lambda+\mu)t} \partial t}{j!}$$

Dado que lo que queda dentro de la integral es la densidad de probabilidad de una $Gamma(j+1, \lambda+\mu)$ se tiene que:

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

c) Si un bus llega a las 10:30 y no llegan buses entre 10:30 y 11:00, el número de pasajeros que se subirá al próximo bus será $N_1 + N_2$ donde:

- N_1= Número de personas que se sube entre 10:00 y 11:00.
- N_2= Número de personas que se sube a partir de las 11:00.

Entonces:

$$\begin{aligned}
P(N_m = n) &= \sum_{j=0}^{n} P(N_1 = j \wedge N_2 = n-j) \\
P(N_m = n) &= \sum_{j=0}^{n} P(N_1 = j) \cdot P(N_2 = n-j) \\
P(N_m = n) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{n} \frac{\frac{\mu}{2}^k}{k!} (\frac{\mu}{\lambda+\mu})^{n-k} \\
P(N_m = n) &= \frac{\lambda\mu^n}{(\lambda+\mu)^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^{n} [\frac{\lambda+\mu}{2}]^k \cdot \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

d) El número de pasajeros esperando en cualquier instante si el proceso comenzó hace "mucho tiempo" $\Rightarrow$ independiente del instante, la distribución de probabilidad de la gente esperando sigue la misma distribución de probabilidad de la parte 2. Sean:

- N_1= Número de personas que esta esperando
- N_2= Número de personas que se sube a partir del instante escogido.

Entonces:

$$P(N_1 = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

$$P(N_2 = j) = \frac{\lambda\mu^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}}$$

De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}
P(N_m = n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda\mu^k}{(\lambda+\mu)^k} \cdot \frac{\lambda\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^{n-k}} \\
P(N_m = n) &= (n+1)\frac{\lambda^2\mu^n}{(\lambda+\mu)^{n+2}}
\end{aligned}$$

- **14.** Notar que el proceso puede ser visto como una división de un proceso de Poisson. Sean:

$$\begin{aligned}
N_i(t) &= \text{número de autos con } i \text{ personas que han llegado al parque desde 0 hasta } t. \\
N(t) &= \text{número de autos que han llegado al parque desde 0 hasta } t. \\
\bar{N}(t) &= \text{número de personas que han llegado al parque desde 0 hasta } t.
\end{aligned}$$

a) Nos piden calcular:

$$\begin{aligned}
P(N_2(1/4)=1|\bar{N}(1/4)=2) &= \frac{P(N_2(\frac{1}{4})=1)\wedge \bar{N}(\frac{1}{4})=2)}{P(\bar{N}(\frac{1}{4})=2)}\\
&= \frac{P(N_2(\frac{1}{4})=1)\wedge \bar{N}(\frac{1}{4})=2)}{P(N_2(\frac{1}{4})=1)\wedge \bar{N}(\frac{1}{4})=2)+P(N_1(\frac{1}{4})=2)\wedge \bar{N}(\frac{1}{4})=2)}
\end{aligned}$$

pero:

$$\begin{aligned}
P\left(N_2\left(\frac{1}{4}\right)=1\wedge \bar{N}\left(\frac{1}{4}\right)=2\right) &= P(N_1(1/4)=0)\cdot P(N_2(1/4)=1)\cdot P(N_3(1/4)=0)\cdot\\
&\quad P(N_4(1/4)=0)\cdot P(N_5(1/4)=0)\\
P\left(N_1\left(\frac{1}{4}\right)=2\wedge \bar{N}\left(\frac{1}{4}\right)=2\right) &= P(N_1(1/4)=2)\cdot P(N_2(1/4)=0)\cdot P(N_3(1/4)=0)\cdot\\
&\quad P(N_4(1/4)=0)\cdot P(N_5(1/4)=0)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$P(N_2(1/4)=1|\bar{N}(1/4)=2) = \frac{e^{-\frac{\lambda_1}{4}}\frac{\lambda_2}{4}e^{-\frac{\lambda_3}{4}}e^{-\frac{\lambda_4}{4}}e^{-\frac{\lambda_5}{4}}}{e^{-\frac{\lambda_1}{4}}\frac{\lambda_2}{4}e^{-\frac{\lambda_3}{4}}e^{-\frac{\lambda_4}{4}}e^{-\frac{\lambda_5}{4}}+\frac{(\frac{\lambda_1}{4})^2}{2}e^{-\frac{\lambda_1}{4}}e^{-\frac{\lambda_3}{4}}e^{-\frac{\lambda_4}{4}}e^{-\frac{\lambda_5}{4}}}$$

Sólo basta con reemplazar con $\lambda_i=\lambda\cdot P[X=i]$

b) Sea $R=$ recaudación de un día. Entonces:

$$\begin{aligned}
E(R) &= E(pN_1(8)+2pN_2(8)+3pN_3(8)+4pN_4(8)+5pN_5(8))\\
&= E(pN_1(8))+E(2pN_2(8))+E(3pN_3(8))+E(4pN_4(8))+E(5pN_5(8))\\
&= p8\lambda_1+2p8\lambda_2+3p8\lambda_3+4p8\lambda_4+5p8\lambda_5\\
&= p8\lambda[0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}3+0{,}1]\\
&= 24{,}8p\lambda
\end{aligned}$$

c) En este caso:

$$\begin{aligned}
E(R) &= p8\lambda[0{,}1+0{,}2+0{,}8(0{,}3+0{,}3+0{,}1)]\\
&= 20{,}64p\lambda
\end{aligned}$$

d) Para encontrar M, imponemos la siguiente condición:

$$\begin{aligned}
P(N(8)>M) &\leq 0{,}05\\
\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{(\lambda 8)^k e^{-\lambda 8}}{k!} &\leq 0{,}05
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\sum_{k=0}^{M} \frac{(\lambda 8)^k e^{-\lambda 8}}{k!} \geq 0{,}95$$

de donde simplemente se despeja M.

■ **15.** El problema también puede ser visto como una división de un proceso de Poisson. Sean:

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{número de personas que han llegado a comprar entradas desde 0 hasta } t. \\ N_n(t) &= \text{número de personas que han llegado a comprar entradas sin ser socios desde 0 hasta } t. \\ N_m(t) &= \text{número de personas que han llegado a comprar entradas siendo socios desde 0 hasta } t. \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} P(N_m(6) = i | N(6) = n) &= \frac{P(N_m(6) = i \wedge N(6) = n)}{P(N(6) = n)} \\ &= \frac{P(N_m(6) = i)P(N_n(6) = n - i)}{P(N(6) = n)} \\ &= \frac{\frac{(0{,}25\lambda 6)^i e^{-0{,}25\lambda 6}}{i!} \frac{(0{,}75\lambda 6)^{n-i} e^{-0{,}75\lambda 6}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}} \\ &= \binom{n}{i} 0{,}25^i 0{,}75^{n-i} \end{aligned}$$

b) Distinguimos 3 casos:

- Si $n < 200 \Rightarrow P(\text{vender n}) = \frac{(\lambda 6)^n e^{-\lambda 6}}{n!}$
- Si $n = 200 \Rightarrow P(\text{vender n}) = \sum_{k=200}^{\infty} \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$
- Si $n > 200 \Rightarrow P(\text{vender n}) = 0$

c) Sea u = utilidad de una función. Entonces:

$$E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E(u|N(6) = k)P(N(6) = k)$$

pero:

- Si $k \leq 199$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} 0{,}25^i 0{,}75^{n-i}((k - i)p + i0{,}8p)$$

- si $k \geq 200$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{200}{i} 0{,}25^i 0{,}75^{200-i}((200 - i)p + i0{,}8p)$$

Como $P(N(6) = k) = \frac{(\lambda 6)^k e^{-\lambda 6}}{k!}$, sólo basta reemplazar.

d) Sean:

$$\begin{aligned} R_i &= \text{Instante de la llegada i-ésima de un cliente normal.} \\ S_j &= \text{Instante de la llegada j-ésima de un “socio”.} \end{aligned}$$

Notar que conocemos las funciones de probabilidad de $R_i \sim \text{Gamma}(i, 0{,}75\lambda)$ y de $S_j \sim \text{Gamma}(j, 0{,}25\lambda)$.
Para que se vendan 50 entradas con descuento deben pasar 2 cosas:

- Que lleguen al menos 50 personas con tarjeta en las 8 horas que está abierta la boletería
- Que el cliente $N^0 50$ que sea socio llegue antes que se cope la capacidad del cine. Esto ocurre si dicho cliente llega antes que el 150-ésimo cliente normal.

Entonces debemos calcular:

$$P(S_{50} \leq R_{150} \leq 8)$$

como conocemos las distribuciones de S_i y R_j, basta con fijar $S_{50} = S$ e integrando sobre S.

$$\begin{aligned} P(S_{50} \leq R \leq 8) &= \int_S^8 R \frac{0{,}75\lambda^{151} R^{150} e^{-0{,}75\lambda R}}{150!} dR \\ &= \int_0^8 \left(\int_S^(R \frac{\lambda^{151} R^{150} e^{-0{,}75\lambda R}}{150!} dR \right) \frac{0{,}25\lambda^{51} R^{50} e^{-0{,}25\lambda R}}{50!} dS \end{aligned}$$

■ **16.** Recordar que si tenemos un proceso de Poisson no homogéneo en que la tasa de ocurrencia depende del tiempo $\lambda(t)$, hacemos un cambio de reloj para ver el proceso como uniforme:

$$u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \Rightarrow P(N(t_2) - N(t_1) = k) = \frac{u(t_1, t_2)^k e^{-u(t_1,t_2)}}{k!}$$

Para este problema:

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{14{,}1 - t}} dt \\ &= -2\sqrt{14{,}1 - t}|_{t_1}^{t_2} \\ &= 2\sqrt{14{,}1 - t_1} - 2\sqrt{14{,}1 - t_2} \qquad (0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 14{,}1) \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} P(N(9, 10) = 0 \wedge N(10, 11) \geq 1) &= P(N(9, 10) = 0)P(N(10, 11) \geq 1) \\ &= P(N(9, 10) = 0)(1 - P(N(10, 11) = 0)) \\ &= u(9, 10)^0 e^{-u(9,10)}(1 - u(10, 11)^0 e^{-u(10,11)}) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} u(9,10) &= 2(\sqrt{(}5{,}1) - \sqrt{(}4{,}1)) \\ &= 0{,}467 \\ u(10,11) &= 2(\sqrt{(}4{,}1) - \sqrt{(}3{,}1)) \\ &= 0{,}528 \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(N(9,10) = 0 \wedge N(10,11) \geq 1) = e^{-0{,}467}(1 - e^{-0{,}528})$$

b) (12 min=0.6 hr). Los clientes que están en el banco en t son los que han llegado entre $t - 0{,}2$ y t. Así:

$$\begin{aligned} E(N(t-0,2;t)) &= u(t-0{,}3;t) \\ &= 2[\sqrt{14{,}1-(t-0{,}2)} - \sqrt{14{,}1-t}] \end{aligned}$$

c) Los que llegan después de las 14:00

$$\begin{aligned} E(N(14;14{,}1)) &= 2[\sqrt{0{,}1} - \sqrt{0}] \\ &= 2\sqrt{0{,}1} \end{aligned}$$

Para que disminuya a la mitad:

$$\begin{aligned} E(N(x;14{,}1)) &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{0{,}1}\right) \\ 2[\sqrt{14{,}1-x} - \sqrt{0}] &= 0{,}1 \\ &\Rightarrow x = 14{,}075 \end{aligned}$$

■ **17.** *a*) Dado que el proceso es poissoniano ⇒ Tiempo entre llegadas → $exp(\lambda)$.
Por lo tanto:

$$P_s(\text{caminar}) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t} \partial t = e^{-\lambda s}$$

b) Hay que distinguir dos casos:

- Si el bus pasa en t, con $t \leq s$, me demoro t+R en llegar a casa.
- Si el bus pasa en t, con $t > s$, me demoro s+W en llegar a casa.

c) Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre t, el instante de llegada del bus.

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty E(T|t) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \\ E(T) &= \int_0^s (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t + \int_s^\infty (S+W) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \end{aligned}$$

Desarrollando deberían llegar a la siguiente expresión:

$$E(T) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s}(W - R - \frac{1}{\lambda})$$

d) Claramente si:

- $W - R - \frac{1}{\lambda} > 0$, entonces E(T) se minimiza en s= ∞
- $W - R - \frac{1}{\lambda} < 0$, entonces E(T) se minimiza en s=0
- $W - R - \frac{1}{\lambda} = 0$, entonces la expresión no depende de s.

e) Dada la pérdida de memoria de la exponencial, si espero un s>0 y cada vez que pasa ese tiempo reevalúo mi desición estaré siempre frente al mismo problema original por lo que mi s será el mismo $\Rightarrow$ si s>0, entonces s=∞.

■ **18.** *a*) Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces:

$$P(\text{ver los 7 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B, ..., x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

b) Sea Y_i el tiempo trascurrido entre el (i-1)-ésimo gol observado y el i-ésimo gol observado. De esta manera tenemos que:

- $Y_1 \rightarrow exp(\lambda)$
- $Y_i \rightarrow exp(\lambda)\ \forall i \neq 1$

Entonces sea S_N el tiempo en que vemos el N-ésimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^{N} Y_i \Rightarrow S_N - (N-1)B \rightarrow Gamma(N, \lambda)$$

De lo anterior, y sabiendo que $P(S_N \leq t) = P(R(T) \geq N)$[1] se concluye que:

$$P(R(T) \geq N) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n-1)!}$$

■ **19.** Sea x(t)= Número de clientes en el sistema en el instante t.
Sea N(t)= Número de personas que han llegado al sistema hasta t.

Notemos que:

- $$P(x(t) = j) = \sum_{n=j}^{\infty} P[x(t) = j | N(t) = n] \cdot \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$
- Un cliente que llega en un instante s ($0 \leq s \leq t$) tiene una probabilidad de estar en el sistema igual a $1 - G(t-s)$
- Condicional a que $N(t) = n$ el instante de llegada de las n personas se distribuyen U(0,t)

tenemos que la probabilidad de que una de estas personas se encuentre en el sistema es:

$$p = \int_0^t \frac{1 - G(t-s) \partial s}{t}$$

independiente del resto.

[1] Identidad valida para cualquier proceso de conteo

Entonces:

$$P[x(t) = j|N(t) = n] = \frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(1-p)^{n-j}$$

Remplazando en la expresión inicial tenemos que:

$$\begin{aligned}
P(x(t) = j) &= \sum_{n=j}^{\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(1-p)^{n-j} \cdot \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \\
P(x(t) = j) &= \frac{e^{-\lambda t \cdot p}(\lambda \cdot t \cdot p)^j}{j!} \cdot \sum_{n=j}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t \cdot (1-p)}(\lambda \cdot t \cdot (1-p))^{(n-j)}}{(n-j)!} \\
P(x(t) = j) &= \frac{e^{-\lambda t \cdot p}(\lambda \cdot t \cdot p)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Es decir $x(t) \rightarrow Poisson(\lambda tp)$

■ **20.** Sea v la velocidad del auto entrando en el tiempo t, por lo que se tiene que el tiempo de viaje a velocidad v será $t_v = \frac{L}{v}$ donde L es el largo de la carretera.

Si definimos G como la distribución del tiempo de viaje, y dado que $T \equiv \frac{L}{X}$ es el tiempo de viaje cuando la velocidad es X, se tendrá que $G(x) = 1 - F(\frac{L}{x})$, con F la distribución de la velocidad.

Consideremos un evento a un auto que entra a la carretera, el que contaremos si se encuentra con el auto entrando en t. Independiente de los demás, un evento ocurriendo en un instante s con $s < t$ (auto entrando a la carretera en s) será contado con probabilidad $P[s + T > t + t_v]$. De la misma manera, un evento ocurriendo en un instante s con $s > t$ será contado con probabilidad $P[s + T < t + t_v]$.

Así, se puede escribir la probabilidad que un evento que ocurre en un instante s sea contado como:

$$p(s) = \begin{cases} 1 - G(t + t_v - s) & \text{si } s < t, \\ G(t + t_v - s) & \text{si } s > t, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

De esta manera el número de encuentros de un auto ingresando en t será un proceso de Poisson filtrado tal que:

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^{\infty} p(s)ds &= \lambda \int_0^t [1 - G(t + t_v - s)]ds + \int_t^{t+t_v} G(t + t_v - s)ds \\
&= \lambda \int_{t_v}^{t+t_v} [1 - G(y)]dy + \int_0^{t_v} G(y)dy
\end{aligned}$$

Ahora sólo basta con minimizar esta expresión derivando e igualando a 0.

$$\frac{d}{dt_v}\left\{\lambda \int_0^{\infty} p(s)ds\right\} = \lambda\Big[[1 - G(t + t_v)] - [1 - G(t_v)] + G(t_v)\Big]$$

Donde se tiene que $G(t_v) = \frac{1}{2}$ dado que cuando t tiende a infinito $G(t + t_v) \approx 1$. De esta manera, el óptimo tiempo de viaje es el tiempo medio, y por lo tanto la velocidad que minimiza los encuentros es la velocidad media.

■ **21.** División de procesos de Poisson:

$N(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t
$N_A(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato A

$N_B(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato B
p = Probabilidad que un votante elija al candidato A

$$
\begin{aligned}
P[N_A(t)=n] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N_A(t)=n\,/\,N(t)=k]\cdot P[N(t)=k] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P[N_A(t)=n\,/\,N(t)=k]\cdot P[N(t)=k] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} p^n \cdot (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \\
&= \frac{+^n e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Big((1-p)\lambda t\Big)^{k-n}}{(k-n)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda p)
\end{aligned}
$$

<u>Distribución condicional de los tiempos de llegada:</u>

X_1 = Tiempo en que se produce la primera llegada, condicional a que de $[0,\ t]$ hay una llegada

$$
\begin{aligned}
P[X_1 \le s / N(t)=1) &= \frac{P[X_1 \le s \wedge N(t)=1]}{P[N(t)=1]} \qquad 0 \le s \le t \\
&= \frac{e^{-\lambda s}\lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}\lambda t} = \frac{s}{t}
\end{aligned}
$$

Luego, condicional a que hay una llegada en el intervalo $[0,\ t]$ el tiempo en que esta ocurre sigue una distribución U$[0,\ t]$.

a) **Alternativa 1:**

$$
\begin{aligned}
P[N_A(10)=n\,/\,N(10)=1000] &= \frac{P[N_A(10)=n \wedge N(10)=1000]}{P[N(10)=1000]} \\
&= \frac{P[N_A(10)=n]\cdot P[N_B(10)=1000-n]}{P[N(10)=1000]} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda_A\cdot 10}(\lambda_A\cdot 10)^n}{n!}\cdot\frac{e^{-\lambda_B\cdot 10}(\lambda_B\cdot 10)^{1000-n}}{(1000-n)!}}{\frac{e^{-\lambda\cdot 10}(\lambda\cdot 10)^1000}{1000!}} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!}\cdot\left(\frac{\lambda_A}{\lambda}\right)^n\left(\frac{\lambda_B}{\lambda}\right)^{1000-n} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \qquad n \ge 0
\end{aligned}
$$

Alternativa 2:

Pensar directamente en una binomial. Si la probabilidad que c/u de los 1000 que llegaron, independiente de los demás, vote por el candidato A es p, tenemos que:

$$P[N_A(10) = n \,/\, N(10) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot p^n(1-p)^{1000-n} = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \qquad n \geq 0$$

b) Llamemos N_A^4 al número de votantes del candidato A que llegan en las primeras 4 horas de votación.

Alternativa 1:

$$\begin{aligned}
P[N_A^4 = n \,/\, N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(4) = n \wedge N(6) + N_B(4) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
&= \frac{P[N_A(4) = n] \cdot P[N^\star(6) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
\text{Donde } N^\star &\rightsquigarrow \text{ Poisson de tasa } \frac{4}{3}\lambda \\
&= \frac{\frac{(2\lambda)^n \cdot e^{-2\lambda}}{n!} \cdot \frac{(8\lambda)^{1000-n} \cdot e^{-8\lambda}}{(1000-n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{1000} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}
\end{aligned}$$

Notar que si se consideran 2 procesos independientes $N_1(t) \rightsquigarrow$ Poisson(λ) y $N_2(t) \rightsquigarrow$ Poisson($\frac{\lambda}{q}$) se tendrá que $P[N_1(t) = k] = P[N_2(qt) = k]$, por lo que es posible ajustar "el reloj" del proceso $N_B(4)$ para sumarlo con $N(6)$.

Alternativa 2:

La probabilidad que una persona llegue en las primeras 4 horas y vote por el candidato A, dado que llegó en las primeras 10 será $p = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Con esto se tiene que

$$P[N_A^4 = n \,/\, N(t) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}$$

c) Los votantes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ, por lo que si T es el tiempo en que llega el primer votante se tendrá:

$$P[T > t] = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \quad \text{Por lo que } T \rightsquigarrow exp(\lambda)$$

De la misma manera, el tiempo T_A hasta que llega el primer votante tipo A sigue una exponencial de parámetro $\frac{\lambda}{2}$.

d) Llamaremos $P[N_B^n]$ a la probabilidad que lleguen n votantes para el candidato B antes del primero para A y T_A al instante en que llega el primer votante para el candidado A.

Alternativa 1:

$$P[N_B^n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned}
P[N_B^n] &= \int_0^\infty P[N_B^n \,/\, T_A = t] \cdot f_{T_A}(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!} \cdot \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\lambda}{2}t\right)^n e^{-\frac{\lambda}{2}t}}{n!} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}t} dt \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{t^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{n!} dt = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
P[\text{Inversión}] &= P[\text{Inversión} \,/\, \text{Anterior vota A}] \cdot P[\text{Anterior vota A}] + \\
& \quad P[\text{Inversión} \,/\, \text{Anterior vota B}] \cdot P[\text{Anterior vota B}] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ahora tenemos un proceso de llegadas de votantes Poisson de tasa λ y si contamos el número de inversiones podemos notar que será el mismo proceso de Poisson "filtrado" por la probabilidad que una llegada sea una *inversión*. De esta manera el tiempo entre 2 *inversiones* consecutivas seguirá una distribución exponencial de tasa $\lambda \cdot P[\text{Inversión}] = \frac{\lambda}{2}$.

■ **22.** Sea $N_{[a,b]}(t)$= número de autos en el tramo $[a, b]$ en el instante t.

$$P(N_{[ab]}(t) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(N_{[ab]}(t) = k | N(t) = n) \cdot P(N(t) = n)$$

Un auto que entra a la carretera en el instante s y elige una velocidad v_i, se encontrará en el tramo $[a, b]$ en t siempre y cuando:

$$\begin{gathered}
v_i(t-s) \geq a \wedge v_i(t-s) \leq b \\
\Rightarrow \frac{a}{(t-s)} \leq v_i \frac{b}{(t-s)}
\end{gathered}$$

Luego la probabilidad que un auto llegado en s esté en $[a, b]$ en t es:

$$P(s,t) = \int_{\frac{a}{(t-s)}}^{\frac{b}{(t-s)}} F(v_i) dv_i$$

Luego, un auto que llega en un instante cualquiera estará en el intervalo con la siguiente probabilidad:

$$\int_0^t \frac{1}{t} P(s,t) ds = \frac{P(t)}{t}$$

Entonces el número de autos en el intervalo es:

$$P(N_{[a,b]}(t) = k) = \frac{(\lambda P(t))^k e^{-\lambda P(t)}}{k!}$$

■ **23.** *a*) D puede ser escrito de la siguiente forma:

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-(t-S_i)}$$

donde S_i denota el tiempo de arribo del i-ésimo shock. De esta forma tendremos que:

$$\begin{aligned}
E[D(t)] &= E[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-(t-S_i)}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-(t-S_i)} | N(t) = n] \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-(t-S_i)}] \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[D] \cdot e^{-t} \cdot E[\sum_{i=1}^{n} e^{S_i}] \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la independencia de los D_i y el proceso de conteo. Ahora si se considera que cada uno de los S_i se distribuye uniforme entre 0 y t, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
E[D(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[D] e^{-t} n E[e^{U_i}] \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[D] e^{-t} n \int_0^t [\frac{e^s ds}{t}] \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[D] e^{-t} n \frac{[e^t - 1]}{t} \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= \frac{E[D](1 - e^{-t})}{t} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!} \\
&= E[D](1 - e^{-t}) \cdot \lambda
\end{aligned}$$

b) Propuesto!

■ **25.** *a*)

$$\begin{aligned}
P[\text{2 o más eventos en algún subintervalo}] &\leq \sum_{i=1}^{k} P[\text{2 o más eventos en el subintervalo i-ésimo}] \\
\text{Ocupando la definición (2)} &= k \cdot o(\frac{t}{k}) \\
&= t \cdot \frac{o(\frac{t}{k})}{\frac{t}{k}} \\
&\Rightarrow \lim_{k \to \infty} t \cdot \frac{o(\frac{t}{k})}{\frac{t}{k}} = 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P[N(t)=n] &= P[\text{En } n \text{ de los } k \text{ intervalos ocurra 1 evento}]\\
&= \frac{k!}{(k-n)!n!}\cdot\left(\lambda\frac{t}{k}+o(\frac{t}{k})\right)^n\cdot\left(1-\lambda\frac{t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^{k-n}\\
\text{De esta manera } N(t) &\rightsquigarrow \text{Binomial}(k,\,\lambda\frac{t}{k}+o(\frac{t}{k}))
\end{aligned}$$

c) Primero veamos cuál es la esperanza de $N(t)$ en el límite:

$$\lim_{k\to\infty} E\Big[N(t)\Big]=\lim_{k\to\infty} k\cdot\lambda\frac{t}{k}+o(\frac{t}{k})=\lim_{k\to\infty}\Big[\lambda t+t\cdot\frac{o(\frac{t}{k})}{\frac{t}{k}}\Big]=\lambda t$$

Ahora recordemos que Binomial$(n,\,p)\rightsquigarrow$ Poisson(λ) con $n\cdot p=\lambda$ en el límite $n\rightsquigarrow\infty$, $p\rightsquigarrow 0$.

$$\begin{aligned}
P[N(t)=n] &= \frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda t}{k}+o(\frac{t}{k})\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^{k-n}\\
&= \frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!\cdot k^n}\cdot\left(\lambda t+t\cdot\frac{o(\frac{t}{k})}{\frac{t}{k}}\right)^n\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^k}{\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^n}\\
&= \frac{1}{n!}\frac{k}{k}\frac{k-1}{k}\frac{k-2}{k}\cdots\frac{k-n+1}{k}\cdot\left(\lambda t+t\cdot\frac{o(\frac{t}{k})}{\frac{t}{k}}\right)^n\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^k}{\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^n}\\
\text{Tomando el límite}\quad & k\to\infty\\
\lim_{k\to\infty} P[N(t)=n] &= \frac{1}{n!}\cdot 1\cdot(\lambda t)^n\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^k\\
\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k})\right)^k &= e^{\lim_{k\to\infty}\left[\frac{ln(1-\frac{\lambda t}{k}-o(\frac{t}{k}))}{\frac{1}{k}}\right]}\\
\text{ocupando l'Hôpital} &= e^{-\lambda t}\\
\text{De esta manera}\quad&\\
\lim_{k\to\infty} P[N(t)=n] &= \frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

■ **26.** *a*) Nos limitaremos a calcular q(t), la probabilidad que un auto cualquiera haya tenido que esperar. Para esto vemos que esta misma probabilidad condicionada en el instante de llegada toma la siguiente forma (se supone que el semáforo parte en verde):

$$P(s)=\begin{cases}1 & t\in[(2n-1)\cdot A,2n\cdot A]\text{ para algún } n\in\{1,...\}\\ 0 & t\in[2n\cdot A,(2n+1)\cdot A]\text{ para algún } n\in\{0,1...\}\end{cases}$$

De esta forma es directo ver que:

$$q(t)=\begin{cases}\frac{(n-1)\cdot A+t-(2n-1)\cdot A}{t} & t\in[(2n-1)\cdot A,2n\cdot A]\text{ para algún } n\in\{1,...\}\\ \frac{n\cdot A}{t} & t\in[2n\cdot A,(2n+1)\cdot A]\text{ para algún } n\in\{0,1...\}\end{cases}$$

Entonces podemos afirmar que $X(t)$ sigue un proceso de poisson de tasa $(\lambda t\cdot q(t))$.

b) Mediante la misma lógica anterior tendremos que:

$$q(t) = \begin{cases} \frac{t-(2n-1)\cdot A}{t} & t \in [(2n-1)\cdot A, 2n\cdot A] \text{ para algún } n \in \{1,...\} \\ 0 & t \in [2n\cdot A, (2n+1)\cdot A] \text{ para algún } n \in \{0,1...\} \end{cases}$$

Entonces podemos afirmar que $X(t)$ sigue un proceso de Poisson de tasa $(\lambda t \cdot q(t))$.

c) Claramente el costo del ciclo será el costo del semáforo rojo para los de la calle x más el costo del semáforo rojo para los de la calle y. Entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo calle x}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Costo calle x}|N_x(A)=n]\cdot P[N_x(A)=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{A\cdot M}{2}\cdot P[N_x(A)=n] \\ &= \lambda_x A\frac{A\cdot M}{2} \end{aligned}$$

Donde el término para $E[\text{Costo calle x}|N_x(A)=n]$ viene del hecho que las llegadas condicionales de Poisson se distribuyen (idénticas) uniformes en el intervalo que condiciona y que si un automóvil llega en el instante s, se incurrirá en un costo de $M\cdot(A-s)$.

De la misma forma:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo calle y}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Costo calle y}|N_y(B)=n]\cdot P[N_y(B)=n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{B^2\cdot M}{3}\cdot P[N_y(B)=n] \\ &= \lambda_y B\frac{B^2\cdot M}{3} \end{aligned}$$

Donde el término para $E[\text{Costo calle x}|N_y(B)=n]$ viene del hecho que las llegadas condicionales de poisson se distribuyen (idénticas) uniformes en el intervalo que condiciona y que si un automóvil llega en el instante s, se incurrirá en un costo de $M\cdot(B-s)^2$.

Entonces:

$$E[\text{Costos}] = \lambda_x\frac{A^2\cdot M}{2} + \lambda_y\frac{(C-A)^3\cdot M}{3}$$

d) La idea es derivar e igualar a 0, siempre y cuando el resultado sea coherente (A este entre 0 y C).

$$\frac{dE[\text{Costos}]}{dA} = \lambda_x A\cdot M - \lambda_y(C-A)^2\cdot M = 0 \Rightarrow A^*$$

■ **28.** *a*) El proceso combinado $\{N_1(t)+N_2(t); t\geq 0\}$ es un proceso de poisson de tasa $\lambda_1+\lambda_2$ y cada llegada pertenece a $N_1(t)$ indep. con probabilidad $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$. Entonces para que el número de llegadas del proceso $N_1(t)$ sean n tiene que darse que la llegada del primer proceso le "gane" a la del segundo exactamente n veces y que luego "pierda". Esto es:

$$P[N=n] = (\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^n\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

b) Simplemente buscamos la distribución del número de llegadas de $N_1(t)$ en $[0,\tau]$:

$$P[N_1(t)=n]=\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}$$

c) Sea $R=n$ llegadas en primer periodo ON, y $\tau=$ tiempo de término del primer periodo ON. Entonces buscamos:

$$\begin{aligned} f_{\tau|R}(t|R)dt &= P[t\le\tau\le t+dt|R] \\ &= \frac{P[R|t\le\tau\le t+dt]\cdot P[t\le\tau\le t+dt]}{P[R]} \end{aligned}$$

Pero de las partes anteriores y de la distribución exponencial del tiempo entre arribos del segundo proceso se tendrá que:

$$\begin{aligned} f_{\tau|R}(t|R)dt &= \frac{\frac{(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t}}{n!}\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^n\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}dt \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^{n+1}t^n}{n!} \end{aligned}$$

Es decir se distribuye de acuerdo a una $gamma(n+1,\lambda_1+\lambda_2)$

d) Condicionaremos sobre la primera llegada del proceso combinado $N_1(t)+N_2(t)$.

$$\begin{aligned} E[X_a] &= E[X_a|N_1(t)\text{primero}]\cdot P[N_1(t)\text{primero}]+E[X_a|N_2(t)\text{primero}]\cdot P[N_2(t)\text{primero}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+[\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_2}+E[X_a]]\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\cdot[\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+1] \\ &= \frac{2}{\lambda_1} \end{aligned}$$