

Pauta Auxiliar 5: Procesos de Poisson

Martes 8 de Septiembre de 2009

Problema 1

- De acuerdo a las propiedades de los Procesos de Poisson, se tiene que $P(N(30)k) = \frac{e^{30\lambda} \cdot (30\lambda)^k}{k!}$, $P(N(30) \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{e^{30\lambda} \cdot (30\lambda)^i}{i!}$ y que $E(N(30)) = 30\lambda$.
- Sea X_k el tiempo entre la falla k-ésima y la k+1-ésima, y sea T_r el tiempo de reparación de una falla. Entonces la probabilidad buscada es $P(X_k < T_r) = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{24} + \lambda}$. Debido a la pérdida de memoria de la exponencial, la probabilidad que la falla k+1 no sea atendida tiene el mismo valor.
- Como los meses son intervalos disjuntos de tiempo estas probabilidades son independientes. La esperanza del número de fallas será $30 \cdot (\lambda)$ en 1 mes.
- Esta es la típica pregunta tipo “¿Cuál es la probabilidad que pase A antes de B?”. Si T_D = tiempo en que ocurre la primera falla domiciliaria y T_A = tiempo en que ocurre la primera falla de alumbrado público sabemos que $T_D \sim \exp(\lambda_D)$ y $T_A \sim \exp(\lambda_A)$

$$P(T_D < T_A) = \frac{\lambda_D}{\lambda_D + \lambda_A}$$

- Una manera de verlo es darse cuenta que los 3 procesos involucrados son independientes, y proceder a calcular directamente la esperanza. Otra manera es calcular la esperanzas de las fallas condicionado al tiempo que dure la reparación y luego calcular lo que nos piden. Si T_r es el tiempo que dura la reparación en meses:

$$\begin{aligned} E[\text{N fallas Domiciliarias} / T_r = t] &= \lambda_D \cdot \frac{t}{24} \\ \Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda_D \cdot t}{24} \cdot \frac{1}{T} \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt = \frac{\lambda_D}{24} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{T} \cdot t \cdot \exp^{-\frac{1}{T} \cdot t} dt \\ &\Rightarrow E[\text{N fallas Domiciliarias}] = \frac{\lambda_D \cdot T}{24} \\ &\Rightarrow E[\text{N fallas Alumbrado público}] = \frac{\lambda_A \cdot T}{24} \end{aligned}$$

- En este caso los costos están divididos en 2 tramos: Si N_A = Número de fallas de Alumbrado público son menores que R se pagará $s_1 \cdot R$, mientras que si $N_A > R$ se pagará $s_1 \cdot R + s_2 \cdot (N_A - R)$. Así el problema de minimización queda:

$$\begin{aligned} \min_R \left\{ s_1 \cdot R \cdot P(N_A \leq R) + \sum_{k=R+1}^{\infty} [s_1 \cdot R + s_2 \cdot (k - R)] \cdot P(N_A = k) \right\} \\ \min_R \left\{ s_1 \cdot R + \sum_{k=R+1}^{\infty} s_2 \cdot (k - R) \cdot \frac{(\lambda_A \cdot 30)^k \exp^{-\lambda_A \cdot 30}}{k!} \right\} \end{aligned}$$

Problema 2

- Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces: $P(\text{perderse un gol}) = P(x_2 < B)$ y $P(\text{perderse 2 goles}) = P(N(B) \geq 2)$
- Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Entonces:

$$P(\text{ver los 7 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B, \dots, x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

- Debido a la pérdida de memoria de la exponencial, tenemos que:

- $Y_1 \rightarrow \exp(\lambda)$
- $Y_i \rightarrow \exp(\lambda) \forall i \neq 1$

- Sea S_n el tiempo en que vemos el n-ésimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i + (n-1)B \Rightarrow S_n - (n-1)B \rightarrow \text{Gamma}(n, \lambda)$$

De lo anterior, y sabiendo que $P(S_n \leq t) = P(R(t) \geq n)$ ¹ se concluye que:

$$P(R(t) \geq n) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n-1)!}$$

Problema 3

- Dado que el proceso es poissoniano \Rightarrow Tiempo entre llegadas $\rightarrow \exp(\lambda)$.
Por lo tanto:

$$P_s(\text{caminar}) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t} \partial t = e^{-\lambda s}$$

- Hay que distinguir dos casos:

- Si el bus pasa en t , con $t \leq s$, me demoro $t+R$ en llegar a casa.
- Si el bus pasa en t , con $t > s$, me demoro $s+W$ en llegar a casa.

- Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre t , el instante de llegada del bus.

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty E(T|t) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \\ E(T) &= \int_0^s (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t + \int_s^\infty (s+W) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \end{aligned}$$

Desarrollando deberían llegar a la siguiente expresión:

$$E(T) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s} (W - R - \frac{1}{\lambda})$$

- Claramente si:

- $W - R - \frac{1}{\lambda} > 0$, entonces $E(T)$ se minimiza en $s = \infty$
- $W - R - \frac{1}{\lambda} < 0$, entonces $E(T)$ se minimiza en $s = 0$
- $W - R - \frac{1}{\lambda} = 0$, entonces la expresión no depende de s .

- Dada la pérdida de memoria de la exponencial, si espero un $s > 0$ y cada vez que pasa ese tiempo reevalúo mi decisión estaré siempre frente al mismo problema original por lo que mi s será el mismo \Rightarrow si $s > 0$, entonces $s = \infty$.

¹Identidad válida para cualquier proceso de conteo

Problema 4

División de procesos de Poisson:

$N(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t

$N_A(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato A

$N_B(t)$ = Número total de votantes que llegan hasta tiempo t y votan por candidato B

p = Probabilidad que un votante elija al candidato A

$$\begin{aligned} P[N_A(t) = n] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} p^n \cdot (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \\ &= \frac{+^n e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda p) \end{aligned}$$

Distribución condicional de los tiempos de llegada:

X_1 = Tiempo en que se produce la primera llegada, condicional a que de $[0, t]$ hay una llegada

$$\begin{aligned} P[X_1 \leq s / N(t) = 1] &= \frac{P[X_1 \leq s \wedge N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} \quad 0 \leq s \leq t \\ &= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

Luego, condicional a que hay una llegada en el intervalo $[0, t]$ el tiempo en que esta ocurre sigue una distribución $U[0, t]$.

1. Alternativa 1:

$$\begin{aligned} P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(10) = n \wedge N(10) = 1000]}{P[N(10) = 1000]} \\ &= \frac{P[N_A(10) = n] \cdot P[N_B(10) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\ &= \frac{\frac{e^{-\lambda_A \cdot 10} (\lambda_A \cdot 10)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \cdot 10} (\lambda_B \cdot 10)^{1000-n}}{(1000-n)!}}{\frac{e^{-\lambda \cdot 10} (\lambda \cdot 10)^{1000}}{1000!}} \\ &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda}\right)^n \left(\frac{\lambda_B}{\lambda}\right)^{1000-n} \\ &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Alternativa 2:

Pensar directamente en una binomial. Si la probabilidad que c/u de los 1000 que llegaron, independiente de los demás, vote por el candidato A es p , tenemos que:

$$P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot p^n (1-p)^{1000-n} = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \geq 0$$

2. Llamemos N_A^4 al número de votantes del candidato A que llegan en las primeras 4 horas de votación.

Alternativa 1:

$$\begin{aligned} P[N_A^4 = n / N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(4) = n \wedge N(6) + N_B(4) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\ &= \frac{P[N_A(4) = n] \cdot P[N^*(6) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\ \text{Donde } N^* &\rightsquigarrow \text{Poisson de tasa } \frac{4}{3}\lambda \\ &= \frac{\frac{(2\lambda)^n \cdot e^{-2\lambda}}{n!} \cdot \frac{(8\lambda)^{1000-n} \cdot e^{-8\lambda}}{(1000-n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}} \\ &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{1000} \\ &= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n} \end{aligned}$$

Notar que si se consideran 2 procesos independientes $N_1(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$ y $N_2(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\frac{\lambda}{q})$ se tendrá que $P[N_1(t) = k] = P[N_2(qt) = k]$, por lo que es posible ajustar “el reloj” del proceso $N_B(4)$ para sumarlo con $N(6)$.

Alternativa 2:

La probabilidad que una persona llegue en las primeras 4 horas y vote por el candidato A , dado que llegó en las primeras 10 será $p = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$. Con esto se tiene que

$$P[N_A^4 = n / N(t) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}$$

3. Los votantes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ , por lo que si T es el tiempo en que llega el primer votante se tendrá:

$$P[T > t] = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \quad \text{Por lo que } T \rightsquigarrow \exp(\lambda)$$

De la misma manera, el tiempo T_A hasta que llega el primer votante tipo A sigue una exponencial de parámetro $\frac{\lambda}{2}$.

4. Llamaremos $P[N_B^n]$ a la probabilidad que lleguen n votantes para el candidato B antes del primero para A y T_A al instante en que llega el primer votante para el candidato A .

Alternativa 1:

$$P[N_B^n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Alternativa 2:

$$\begin{aligned}
P[N_B^n] &= \int_0^\infty P[N_B^n / T_A = t] f_{T_A}(t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!} \cdot \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\frac{\lambda}{2} t)^n e^{-\frac{\lambda}{2} t}}{n!} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} t} dt \\
&= \frac{(\frac{\lambda}{2})^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{t^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{n!} dt = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
P[\text{Inversión}] &= P[\text{Inversión} / \text{Anterior vota A}] \cdot P[\text{Anterior vota A}] + \\
&\quad P[\text{Inversión} / \text{Anterior vota B}] \cdot P[\text{Anterior vota B}] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ahora tenemos un proceso de llegadas de votantes Poisson de tasa λ y si contamos el número de inversiones podemos notar que será el mismo proceso de Poisson “filtrado” por la probabilidad que una llegada sea una *inversión*. De esta manera el tiempo entre 2 *inversiones* consecutivas seguirá una distribución exponencial de tasa $\lambda \cdot P[\text{Inversión}] = \frac{\lambda}{2}$.