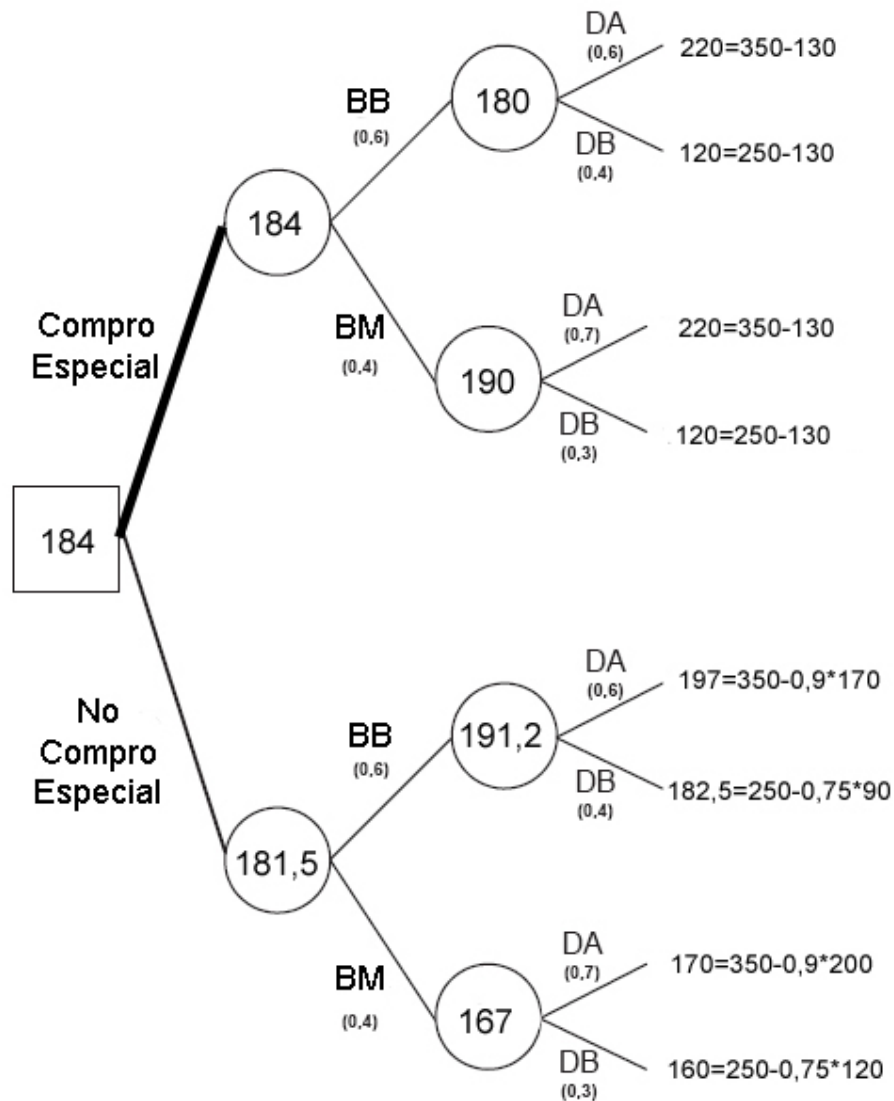


Pauta Control 1

Martes 1 de Septiembre de 2009

Problema 1

- a) (3 puntos) Representando a los eventos “Balance Bueno” y “Balance Malo” por ‘BB’ y ‘BM’, respectivamente y a “Demanda Alta” y “Demanda Baja”, por ‘DA’ y ‘DB’, respectivamente, el árbol que resulta se ve en la figura (los valores en las hojas están en miles de pesos):



- b) (3 puntos) Para calcular el valor de la información provista por el experto, vamos a plantear un árbol que incluya los resultados de su estudio. Para esto se necesitan las probabilidades de que el balance sea bueno o malo, condicionada en la información del experto y las probabilidades de que el experto prediga un balance “Aceptable” o “No Aceptable”. Es decir, las probabilidades que necesitamos y no tenemos son $P(\text{Aceptable})$, $P(BB|\text{Aceptable})$ y $P(BB|\text{No Aceptable})$:

$$\begin{aligned}
P(Acceptable) &= P(Acceptable|BB)P(BB) + P(Acceptable|BM)P(BM) \\
&= 0,8 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 \\
&= 0,6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(BB|Acceptable) &= \frac{P(Acceptable|BB) \cdot P(BB)}{P(Acceptable)} \\
&= \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,6} \\
&= 0,8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(BB|No\ Acceptable) &= \frac{P(No\ Acceptable|BB) \cdot P(BB)}{P(No\ Acceptable)} \\
&= \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,4} \\
&= 0,3
\end{aligned}$$

Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el árbol asociado a esta parte, que se muestra en la figura de la última página.

De los valores finales, podemos calcular que lo más que estaría dispuesto es $186,6 - 184 = 2,6$ miles de pesos.

Problema 2

- a) (2 puntos) Primero calcularemos la probabilidad de que el primer sonido que escuche la ancianita proveniente de los animales sea un silbido dado que hay k canarios (y obviamente $N - k$ gatos). Llamando a la probabilidad anterior p_k se tiene:

$$\begin{aligned}
p_k &= \mathbb{P}(\text{Escuche primero silbido} \mid \text{Hay } k \text{ canarios}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{El primer sonido que escuche sea el } i - \text{esimo} \wedge \text{el } i - \text{esimo sonido sea un silbido} \mid \text{Hay } k \text{ canarios})
\end{aligned}$$

Como la ancianita escucha con probabilidad q y no escucha con probabilidad $1 - q$, podemos decir que el número del primer sonido que escuche se comporta como una geométrica. Luego:

$$\mathbb{P}(\text{El primer sonido que escuche sea el } i - \text{esimo}) = q(1 - q)^{i-1}$$

Además apelando a la propiedad de pérdida de memoria de la exponencial y la probabilidad de que se escuche un silbido antes que un maullido es una carrera de exponenciales entre el mínimo de los tiempos de los canarios (que distribuye $\exp(k\lambda_c)$) y el mínimo de los tiempos de los gatos (que distribuye $\exp((N - k)\lambda_g)$) se tiene:

$$\mathbb{P}(\text{El } i - \text{esimo sonido sea un silbido} \mid \text{Hay } k \text{ canarios}) = \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N - k)\lambda_g}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
p_k &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} q(1-q)^{i-1} \\
&= \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} q \sum_{i=1}^{\infty} (1-q)^{i-1} \\
&= \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} \frac{q}{q} \\
&= \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g}
\end{aligned}$$

Sólo nos falta condicionar por el número de canarios (claramente corresponde a una binomial).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Escuche primero un silbido}) &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(\text{Escuche primero un silbido} \mid \text{hay } k \text{ canarios}) \mathbb{P}(\text{hay } k \text{ canarios}) \\
&= \sum_{k=0}^N p_k \mathbb{P}(\text{hay } k \text{ canarios}) \\
&= \sum_{k=0}^N \frac{k\lambda_c}{k\lambda_c + (N-k)\lambda_g} \binom{N}{k} (1-p)^k p^{N-k}
\end{aligned}$$

b) (2 puntos)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Pedro gane a Juan} \mid \text{Pedro gana a los otros 10}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{Juan gane a Pedro} \mid \text{Pedro gana a los otros 10}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{Juan gane}) \\
&= 1 - \frac{1}{12} \\
&= \frac{11}{12}
\end{aligned}$$

Lo anterior se tiene pues cada alumno puede obtener cada uno de los números de la tómbola equiprobablemente. Luego la probabilidad que Juanito tenga el mayor es $1/12$.

c) (2 puntos) Sólo para explicar de manera más simple la solución consideraremos que los turistas suizos son un poco más alemanes para sus cosas y cuando ven al chileno ocupando su asiento lo enfrentan, haciendo que se cambie de lugar (a otro asiento que nuevamente el chileno elige al azar entre los disponibles). Esta manera de mirar el problema es equivalente a la descrita en el enunciado.

Es fácil notar que si en vez de un bus de 40 personas fuera un bus de 2 (1 turista y 1 chileno) o de 3 (2 turistas y 1 chileno) la probabilidad pedida sería $1/2$. Demostraremos por inducción que para un bus de N asientos la probabilidad de que el último en subirse encuentre su asiento desocupado es $1/2$. Asumiremos que lo anterior se cumple para $1, \dots, N-1$ y lo demostraremos para N .

Sin pérdida de generalidad enumeraremos los asientos de 1 a N , siendo el asiento i el del pasajero que se sube en i -ésimo lugar al bus (por ejemplo el pasajero que se sube tercero al bus tiene en su ticket marcado el asiento número 3). Condicionaremos según el asiento que elige el chileno (el primero en subir), recordando que $\mathbb{P}(\text{Chileno ocupa el asiento } i) = 1/N$

$$\mathbb{P}(\text{Pasaj } N \text{ encuentre asiento desocup}) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\text{Pasaj } N \text{ encuentre asiento desocup} \mid \text{Chileno ocupa el asiento } i) / N$$

Notar que cuando el chileno se sienta en su asiento (el primero) la probabilidad que el último pasajero encuentre su asiento desocupado es 1. Cuando el chileno se sienta en el asiento N la probabilidad mencionada será nula. En el caso en que el chileno se sienta en el asiento i , lo que sucederá es que el turista

i lo sacará del asiento y el chileno deberá sentarse al azar entre $N - i$ asientos disponibles, siendo, por hipótesis de inducción, la probabilidad de que el último turista encuentre su asiento desocupado igual a $1/2$. Luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Pasaj } N \text{ encuentre asiento desocup}) &= (1 + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{N} + 0) \frac{1}{N} \\ &= (1 + \frac{1}{2}(N-2)) \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Problema 3

i) (3 puntos)

- **Etapas:** Los días $t = 1, \dots, T$.
- **Variables de estado:** Número de acciones al inicio del día t (I_t) y precio de la acción en el día t (y_t).
- **Variable de decisión:** $x_t \in S_t$ con $S_t = \{-1, 0, 1\}$ si $I_t \geq 1$ o $S_t = \{0, 1\}$ si $I_t = 0$
- **Recurrencia de estados:**

$$I_{t+1} = I_t + x_t$$

- **Variable aleatoria:** Precio en el día t (y_t)
- **Condiciones de borde:**

$$f_T^*(y_T, I_T) = 0$$

$$I_0 = N$$

- **Función de Beneficios:**

$$f_t(x_t, I_t, y_t) = x_t G_t(y_t) - C |x_t| + \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t + x_t, y_{t+1}) | y_t]$$

Con

$$f_t^*(I_t, y_t) = \max_{x_t \in S_t} f_t(x_t, I_t, y_t)$$

ii) (2 puntos) Para ver cuando conviene comprar calcularemos la siguiente diferencia:

$$f_t(1, I_t, y_t) - f_t(0, I_t, y_t) = G_t(y_t) - C + \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t + 1, y_{t+1}) | y_t] - \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) | y_t]$$

Notar que los valores esperados en la ecuación debieran ser iguales excepto en el caso de inventario restrictivo (cuando $I_t = 0$), pero ese caso no puede ocurrir cuando consideramos $N \geq T$. Por lo tanto convendrá comprar cuando:

$$G_t(y_t) - C \geq 0 \quad \Rightarrow \quad G_t(y_t) \geq C$$

En el caso de que queramos saber si conviene vender debemos calcular la siguiente diferencia:

$$f_t(-1, I_t, y_t) - f_t(0, I_t, y_t) = -G_t(y_t) - C + \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t - 1, y_{t+1}) | y_t] - \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) | y_t]$$

Por razones similares el caso anterior, conviene vender cuando:

$$-G_t(y_t) - C \geq 0 \quad \Rightarrow \quad G_t(y_t) \leq -C$$

iii) (1 punto) Cuando $N < T$ podríamos llegar al caso en que I_t sea nulo (se nos acabe el inventario). Luego en el caso de la compra el valor $\mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t + 1, y_{t+1}) | y_t] - \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) | y_t]$ sería mayor o igual a 0 porque el primer término se maximizaría en $S_t = \{-1, 0, 1\}$ y el segundo en $S_t = \{0, 1\}$, siendo el último más restrictivo. La condición para que convenga comprar sería que $G_t(y_t) - C \geq \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) | y_t] - \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t + 1, y_{t+1}) | y_t]$

Cuando queramos decidir si vender o no la diferencia $\mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t - 1, y_{t+1}) | y_t] - \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) | y_t]$ será negativa y necesitaremos que $-G_t(y_t) - C \geq \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t, y_{t+1}) | y_t] - \mathbb{E} [f_{t+1}^*(I_t - 1, y_{t+1}) | y_t]$ para que convenga vender.

