

## Control 1

Martes 1 de Septiembre de 2009

### Problema 1

Suponga que Usted está estudiando la posibilidad de adquirir una **tarjeta bip especial** para el próximo año. Dicha tarjeta debe comprarla anticipadamente por 100.000 pesos y le permitirá realizar 900 viajes durante el año. Su otra opción es no comprar la tarjeta especial y pagar cada pasaje a su precio de mercado del momento.

El precio de mercado esperado depende del **balance anual de TranSantiago** (Bueno o Malo) y del **nivel de demanda** (Alta o Baja), como se muestra en la tabla en pesos por viaje:

	Nivel de demanda	
	Alta	Baja
Bueno	170	90
Malo	200	120

Usted sabe que en un año de **demanda Alta** deberá viajar obligadamente 900 veces y en un año de **demanda Baja** deberá viajar sólo 750 veces. Además una importante marca deportiva le beneficia a Ud. con dinero si viaja utilizando alguna de las poleras de esa marca, otorgándole un beneficio de 350.000 pesos al año si es un periodo de **demanda Alta** y 250.000 pesos al año si es un período de **demanda Baja**. Si ha comprado la tarjeta especial y le sobran viajes al final del año, simplemente se pierden.

Con la información que se cuenta actualmente se espera un **balance Bueno** con probabilidad 0,6. En caso de un **balance Bueno**, se espera que la demanda sea **Alta** en el 60 % de los casos; mientras que para una temporada de **balance Malo** se espera que la demanda sea **Alta** en el 70 % de los casos.

- a) Plantee y resuelva un **árbol de decisiones** que le permita determinar si le conviene comprar la tarjeta especial por adelantado o esperar hasta el próximo año y pagar el pasaje a su precio del momento.

Un **experto en Transporte** le ofrece mejor información sobre el balance que se espera. Este le propone realizar un estudio que puede tener como resultados **Aceptable** o **No Aceptable**. Se sabe que el 80 % de las veces que el balance resultó **Bueno**, el experto había indicado **Aceptable**, mientras que en el 70 % de los casos que el balance resultó **Malo**, el experto había indicado **No Aceptable**.

- b) ¿Cuál es el valor de la información provista por el experto?

### Problema 2

- a) (2 puntos) Una ancianita compra un gatito con probabilidad  $p$  y un canario con probabilidad  $1 - p$ , comprando un total de  $N$  animales. Por otro lado se sabe que los gatos lanzan un maullido según una distribución exponencial de tasa  $\lambda_g$ , mientras que los canarios lanzan un silbido según una distribución exponencial de tasa  $\lambda_c$ . Además cada vez que los animales emiten un sonido (ya sea maullido o silbido) la ancianita lo escucha con probabilidad  $q$  y no lo escucha con probabilidad  $1 - q$ . Asuma que la ancianita compra todos los animales al mismo tiempo y de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer sonido que escuche la ancianita proveniente de los animales sea un silbido?
- b) (2 puntos) Los 142 alumnos del curso de **Investigación de Operaciones** participan en una lotería. Cada alumno saca un número del 1 al 142 desde una tómbola pero no lo puede ver. Dentro de los 12 mejores promedios de notas del curso se va a dar un premio al alumno que sacó el mayor número desde la

tómbola. Los profesores diseñaron una máquina que permite comparar los números de dos alumnos, sin siquiera verlos, identificando al mayor. **Pedrito** es uno de los doce mejores alumnos y ya se comparó con otros 10 de los doce seleccionados, ganando en cada caso. Sólo le falta compararse con **Juanito** quien no se ha comparado aún con nadie. ¿Cuál es la probabilidad de que **Pedrito** le gane a **Juanito**?

- c) (2 puntos) Un bus con 40 asientos está por iniciar su viaje a **Puerto Montt**, con todos los asientos vendidos. En el bus viaja una delegación de 39 turistas suizos y un guía chileno. Los suizos son respetuosos para ocupar el asiento que está marcado en su ticket, sin embargo si al subir encuentran su asiento ocupado prefieren no molestar y toman un asiento desocupado al azar. Por su parte el chileno ignora el número del ticket y simplemente toma un asiento al azar. El guía chileno es el primero en subir al bus y tomar asiento. ¿Cuál es la probabilidad que el último pasajero en subirse encuentre su asiento desocupado?

### Problema 3

Un inversionista se ha especializado en comprar y vender la acción de la **empresa ABC**. El inversionista es dueño de  $N$  acciones en el día 0 y está diseñando una estrategia de compra y venta de acciones para los próximos  $T$  días. En cualquier día de ese período, el inversionista tiene sólo tres opciones: comprar una acción, vender una acción, o hacer nada. Por regulaciones legales el inversionista sólo puede vender acciones que posee. El precio de la acción es una variable aleatoria que puede tomar  $k$  valores distintos  $\{v_1, \dots, v_k\}$ , y el precio en el día  $t+1$  sólo depende del precio de la acción en el día  $t$  (i.e.,  $p_{ij}^t = \mathbb{P}[y_{t+1} = v_j | y_t = v_i]$  es dato del problema, donde  $y_t$  el precio en el día  $t$ ). El inversionista ha calculado la ganancia (o pérdida) esperada en el precio de la acción durante cada período  $[t, T]$  en función del precio de la acción en el día  $t$ . Si llamamos a este valor  $G_t(y)$  matemáticamente lo podemos expresar como:  $G_t(y) = \mathbb{E}(y_T | y_t = y) - y$ . Además cada vez que el inversionista compra o vende paga un costo de transacción de  $C$ . El inversionista quiere maximizar la suma de las ganancias (pérdidas) esperadas menos los costos de transacción, durante los  $T$  días.

- i) (3 puntos) Formule el problema como un problema de **Programación Dinámica Estocástica**.
- ii) (2 puntos) Asuma que  $G_t(y)$  es decreciente en  $y$  y que  $N \geq T$ . Muestre que si  $y_t$  es tal que  $G_t(y_t) \geq C$ , entonces conviene comprar. De la misma forma, verifique que si  $y_t$  es tal que  $G_t(y_t) \leq -C$ , entonces conviene vender. También muestre que en cualquier otro caso conviene hacer nada.
- iii) (1 punto) Explique por qué si el número de acciones  $N < T$ , la política de la parte (ii) podría no ser óptima.