IN44A / IN3702: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, R. Lagos, C. Thraves

Pauta Auxiliar 4: Probabilidades, Árboles y PDE

Martes 25 de Agosto de 2009

Problema 1

1. Para calcular este valor esperado debemos calcular las probabilidades de obtener premios con una apuesta común.

   La probabilidad de obtener un primer premio es igual a $\frac{1}{\binom{N}{K}}$.

   Mientras que la probabilidad de obtener un segundo premio es $\frac{K\cdot(N-K)}{\binom{N}{K}}$ pues es el resultado de que de los K números escogidos en el cartón, salgan $K-1$ de éstos ganadores, lo que es igual a K, (o bien $\binom{K}{K-1}$), y debe ser multiplicado esto por los casos del número sobrante sorteado que no acertó en el cartón, que tiene N-K posibilidades (o bien $\binom{N-K}{1}$), (OJO, este último número sorteado se refiere al número de la tombola (NO del cartón), el cual no tiene más remedio que ser alguno de los $N-K$ que no se escogieron en al cartón).

   Además, si se obtiene un premio se obtiene solo uno. Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta simple es igual a $\frac{P+K\cdot(N-K)\cdot S}{\binom{N}{K}}$.

2. En este caso, la probabilidad de obtener un primer premio es igual a $\frac{K+1}{\binom{N}{K}}$, ya de los $K+1$ números escogidos en el cartón, sirven los casos en donde los K números sorteados están en los $K+1$ números escogidos (lo que es equivalente a: $\binom{K+1}{K}$).

   La probabilidad de obtener el segundo premio es $\frac{\binom{K+1}{K-1}\cdot(N-K-1)}{\binom{N}{K}} = \frac{(K+1)\cdot K\cdot(N-K-1)}{2\cdot\binom{N}{K}}$, ya que de los $K+1$ números escogidos en el cartón, deben salir $K-1$ como ganadores (lo cual es $\binom{K+1}{K-1}$), y además se debe multiplicar por las posibilidades que tiene el número restante (digamos el *k-ésimo* número sorteado) del sorteo que no acertó en mi cartón, el cual puede haber caido en cualquiera de los $N-K-1$ números que no se jugaron en el cartón.

   Nuevamente, si se obtiene un premio se obtiene solo uno. Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta especial es igual a

$$\frac{(K+1)\cdot P+(K+1)\cdot K\cdot(N-K-1)\cdot m\cdot S}{2\cdot\binom{N}{K}} = (K+1)\cdot\frac{P+K\cdot(N-K-1)\cdot m\cdot S}{2\cdot\binom{N}{K}}$$

3. *a*) De acuerdo a lo calculado en los puntos anteriores, m debería satisfacer:

$$(K+1)\cdot\frac{P+K\cdot(N-K)\cdot S}{\binom{N}{K}} = (K+1)\cdot\frac{P+K\cdot(N-K-1)\cdot m\cdot S}{2\cdot\binom{N}{K}}$$

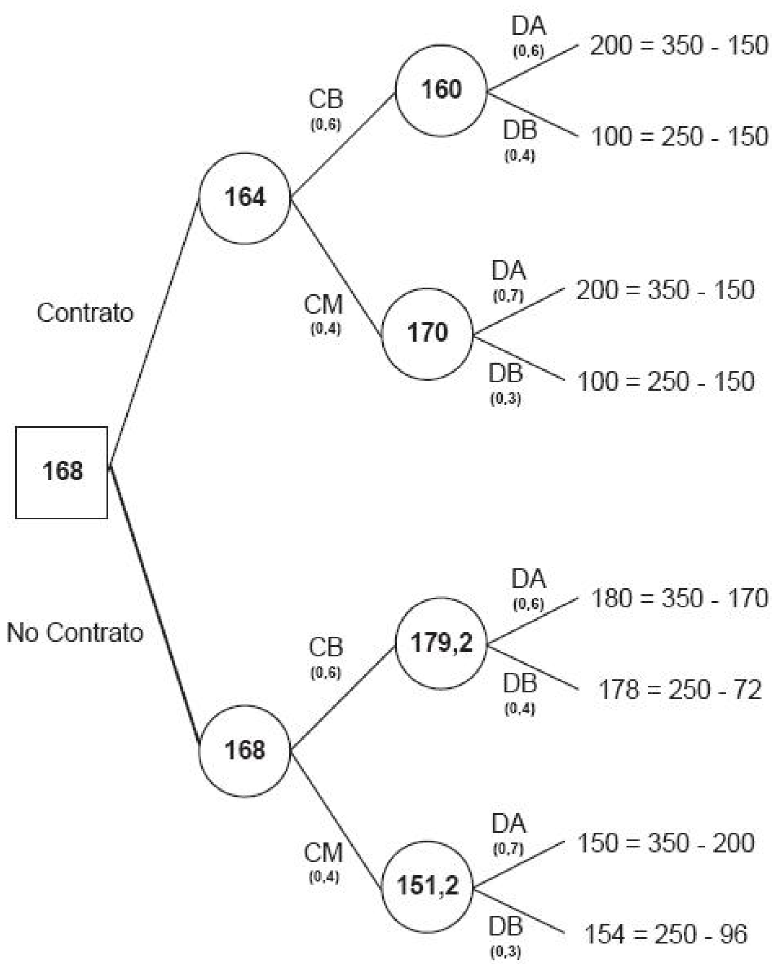
   ,es decir, $P+K\cdot(N-K)\cdot S = P+K\cdot(N-K-1)\cdot\frac{m\cdot S}{2}$, y por lo tanto, $m=\frac{2\cdot(N-K)}{(N-K-1)}$.

   b) Debería preferir jugar las $K+1$ apuestas "disjuntas" porque tienen menor variabilidad. Para verificar esto comparamos las varianzas. Sea X el premio a recibir si se realizan $K+1$ apuestas simples sin repetir números e Y, el premio a recibir por una apuesta especial. Entonces:

$$
\begin{aligned}
Var(Y) - Var(X) &= \left(E[Y^2] - (E[Y])^2\right) - \left(E[X^2] - (E[X])^2\right) \\
&= E[Y^2] - E[X^2] \\
&= \frac{K+1}{\binom{N}{K}} \cdot \left(P^2 + K \cdot (N-K-1) \cdot \frac{m^2 \cdot S^2}{4} - (P^2 + K \cdot (N-K) \cdot S^2)\right) \\
&= \frac{(K+1) \cdot K \cdot S^2}{\binom{N}{K}} \cdot \left((N-K-1) \cdot \frac{m^2}{4} - (N-K)\right) \\
&= \frac{(K+1) \cdot K \cdot S^2}{\binom{N}{K}} \cdot \left((N-K-1) \cdot \frac{(N-K)^2}{(N-K-1)^2} - (N-K)\right) \\
&= \frac{(N-K) \cdot (K+1) \cdot K \cdot S^2}{\binom{N}{K}} \cdot \left(\frac{(N-K)}{(N-K-1)} - 1\right) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Problema 2

1. Representando a los eventos "Cosecha Buena" y "Cosecha Mala" por 'CB'y 'CM', respectivamente y a "Demanda Alta" y "Demanda Baja", por 'DA'y 'DB', respectivamente, el árbol que resulta se ve en la figura (los valores en las hojas están en millones de pesos):



2. Para calcular el valor de la información provista por el analista, vamos a plantear un árbol que incluya los resultados de su análisis. Para esto, se necesitan las probabilidades de que la cosecha sea buena o mala,

condicionada en la información del analista y las probabilidades de que el analista prediga una cosecha "Abundante" o "Escasa". Es decir, las probabilidades que necesitamos y no tenemos son $P(Abundante)$, $P(CB|Abundante)$ y $P(CB|Escasa)$:

$$
\begin{aligned}
P(Abundante) &= P(Abundante|CB)P(CB) + P(Abundante|CB)P(CB) \\
&= 0,8 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 \\
&= 0,6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(CB|Abundante) &= \frac{P(Abundante|CB) \cdot P(CB)}{P(Abundante)} \\
&= \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,6} \\
&= 0,8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(CB|Escasa) &= \frac{P(Escasa|CB) \cdot P(CB)}{P(Escasa)} \\
&= \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,4} \\
&= 0,3
\end{aligned}
$$

Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el árbol asociado a esta parte, que se muestra en la figura:

De los valores finales, podemos calcular que lo más que estaría dispuesto es $171 - 168 = 3$ millones de pesos.

Problema 3

Una empresa de transportes cuenta con dos locales y con una flota de N vehículos idénticos para atender las solicitudes de sus clientes. Cada solicitud, cuando es atendida, mantiene ocupado un vehículo por el día completo.

Cada día la empresa enfrenta, en cada local, una demanda incierta, de la cual se conoce la distribución de probabilidades. Se sabe que el día t, el local 1 recibirá exactamente k solicitudes con probabilidad $p_k(t)$, mientras que el local 2 recibirá exactamente k solicitudes con probabilidad $q_t(k)$.

La empresa recibe un ingreso de valor I por cada pedido que puede atender. Cada pedido fuera de su capacidad se pierde. Movilizar un vehículo del local 1 al local 2, de un día para el otro, tiene un costo C_{12}, mientras que trasladar un vehículo del local 2 al 1, tiene un costo C_{21}. Inicialmente todos los vehículos están en el local 1.

Plantee un modelo de programación dinámica estocástica que permita determinar cómo distribuir los vehículos en los locales cada día para un horizonte de T días, de manera de maximizar el beneficio total esperado durante este período.

`Solución:`

Un modelo para determinar la distribución de vehículos podría ser el siguiente.

- **Etapas**

  Cada uno de lo días: $t = 1, \ldots, T$

- **Variables de Estado**

  Debemos saber cuántos vehículos hay en cada local. Para esto bastan con saber cuántos hay en el local 1, pues el resto estará en el local 2.

  Siendo así definimo s_t como el número de vehículos en el local 1 el día $t-1$. s_1 será el número de vehículos en el local 1 al inicio del análisis.

- **Variables de Decisión**

  Las decisiones a tomar corresponden a cuántos vehículos tener disponibles en cada local para cada día. De esta manera definimos x_t como el número de vehículos a tener disponibles en el local 1 el día t.

  `Observación:` También se puede realizar un modelo cuyas variables de decisión sean cuántos vehículos mover de un local para el otro en cada día.

- **Variables Aleatorias**

  Las demandas que se observan son aleatorias. Hay una demanda para cada local para cada día. Entonces definimos las variables d_t^i como la demanda para el local i en el día t.

  La distribución de d_t^1 está dada por $P(d_t^1 = k) = p_t(k)$, mientras que la distribución de d_t^2 está dada por $P(d_t^2 = l) = q_t(l)$.

- **Recurrencias**

  Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguiente recurrencia:

$$s_{t+1} = x_t$$

- **Función de Beneficio Acumulado**

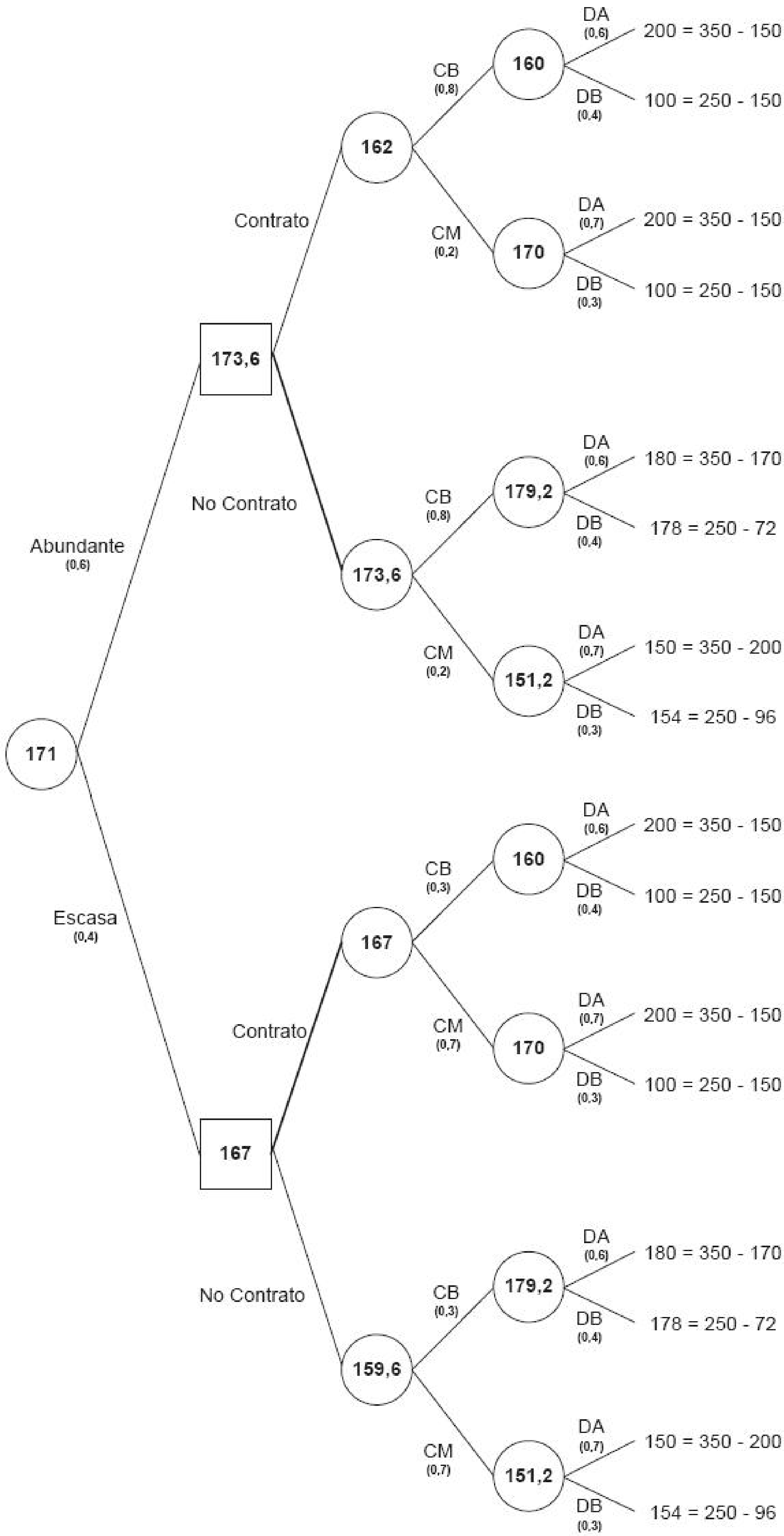
$$\begin{aligned} V_t(s_t, x_t) &= \mathbb{E}_{d_t^1, d_t^2}\left[I\left(\min\left\{x_t, d_t^1\right\} + \min\left\{N - x_t, d_t^2\right\}\right) - C_{21}\max\left\{x_t - s_t, 0\right\} - C_{12}\max\left\{s_t - x_t, 0\right\} + V_{t+1}^*(x_t)\right] \\ &= I\left(\sum_{k=0}^{\infty}\max\left\{k, x_t\right\}p_t(k) + \sum_{l=0}^{\infty}\max\left\{l, N - x_t\right\}q_t(l)\right) - C_{21}\max\left\{x_t - s_t, 0\right\} - C_{12}\max\left\{s_t - x_t, 0\right\} + V_{t+1}^*(x_t) \end{aligned}$$

  donde

$$V_t^*(s_t) = \max\left\{V_t(s_t, x_t) \;:\; 0 \leq x_t \leq N, entero\right\}$$

- **Condición de Borde**

  El estado inicial es $s_1 = N$ y no hay valor residual para la configuración final: $V_{T+1}(\cdot) = 0$


171
Abundante
(0,6)
Escasa
(0,4)
173,6
Contrato
No Contrato
162
CB
(0,8)
CM
(0,2)
160
DA
(0,6)
200 = 350 - 150
DB
(0,4)
100 = 250 - 150
170
DA
(0,7)
200 = 350 - 150
DB
(0,3)
100 = 250 - 150
173,6
CB
(0,8)
CM
(0,2)
179,2
DA
(0,6)
180 = 350 - 170
DB
(0,4)
178 = 250 - 72
151,2
DA
(0,7)
150 = 350 - 200
DB
(0,3)
154 = 250 - 96
167
Contrato
No Contrato
167
CB
(0,3)
CM
(0,7)
160
DA
(0,6)
200 = 350 - 150
DB
(0,4)
100 = 250 - 150
170
DA
(0,7)
200 = 350 - 150
DB
(0,3)
100 = 250 - 150
159,6
CB
(0,3)
CM
(0,7)
179,2
DA
(0,6)
180 = 350 - 170
DB
(0,4)
178 = 250 - 72
151,2
DA
(0,7)
150 = 350 - 200
DB
(0,3)
154 = 250 - 96