IN44A / IN3702: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, R. Lagos, C. Thraves

Pauta CTP 1

Martes 11 de Agosto de 2009

Definimos las siguientes variables aleatorias:
D: Resultado al tirar el dado
T: tiempo ocupado en el trayecto hacia la U
T_1: tiempo ocupado en el trayecto hacia la U dado que se decede por esperar en el paradero 1
T_2: tiempo ocupado en el trayecto hacia la U dado que se decede por esperar en el paradero 2
X_1: tiempo que tarda en pasar la micro *A1* desde que se llegó al paradero
X_2: tiempo que tarda en pasar la micro *Z2* desde que se llegó al paradero
Y: tiempo que tarda en pasar la primera micro dado que se esta esperando en el paradero 2

Donde notemos que:
$X_1 \sim \exp(\lambda)$
$X_2 \sim \exp(\mu)$
$Y \sim \exp(\lambda + \mu)$

Sean los eventos, P1 si es que en el dado sale 1 ó 6, y P2 en caso contrario.

1. Calcule el tiempo promedio que se tarda en el trayecto hacia la Universidad, dado que al lanzar el dado salió 6. (1 punto)

$$\begin{aligned} E[T|P1] &= E[T_1] \\ &= E[X_1 + \frac{d+b}{v}] \\ &= E[X_1] + E[\frac{d+b}{v}] \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{d+b}{v} \end{aligned}$$

2. Calcule el tiempo promedio de trayecto, dado que en el dado salió 4. (1 punto)

$$\begin{aligned} E[T|P2] &= E[T_2] \\ &= E[\frac{d}{c} + Y + \frac{b}{v}] \\ &= E[\frac{d}{c}] + E[Y] + E[\frac{b}{v}] \\ &= \frac{d}{c} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{b}{v} \end{aligned}$$

3. Calcule el tiempo promedio que se tarda en el trayecto a la U. (1 punto)

   En este caso se debe descondicionar con respecto al resultado al tirar previamente el dado.

$$\begin{aligned} E[T] &= E[T|P1] \cdot P[P1] + E[T|P2] \cdot P[P2] \\ &= E[T_1] \cdot P[P1] + E[T_2] \cdot P[P2] \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{d+b}{v}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{d}{c} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{b}{v}\right) \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. Suponiendo que los parámetros del problema son tales que el tiempo promedio de trayecto es igual tanto si se elige el paradero 1 ó el 2, ¿ Cúal debiese ser la elección acerca de que paradero elegir ? Para esto haga el calculo de la varianza del tiempo de trayecto de ambas opciones de viaje. (Suponga que la gente es aversa al riesgo). (1 punto)
   Hint: Si $X \sim exp(\lambda)$*, entonces* $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

   Hacemos el cálculo de la varianza para ambos casos:
   Para el caso en donde se elige el paradero 1:

$$
\begin{aligned}
V[T_1] &= V[X_1 + \frac{d+b}{v}] \\
&= V[X_1] + V[\frac{d+b}{v}] \\
&= \frac{1}{\lambda^2} + 0 \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

   Para el caso en donde se elige el paradero 2:

$$
\begin{aligned}
V[T_2] &= V[\frac{d}{c} + Y + \frac{b}{v}] \\
&= V[\frac{d}{c}] + V[Y] + V[\frac{b}{v}] \\
&= 0 + \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} + 0 \\
&= \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}
\end{aligned}
$$

   Dado que a el tiempo promedio es el mismo, entonces el factor a tomar en consideración es la varianza. Por ende, si se considera la aversión al riesgo, lo que se espera es escoger la alternativa aquella que tenga menor variabilidad, lo que corresponde a el caso de ir hacia el paradero 2. Esto hace sentido, pues apesar de que se ocupa más tiempo caminando, se disminuye el riesgo de espera ya que se tienen dos alternativas de buses y no así depender de sólo uno.

5. Suponiendo que se decide ir al paradero 2, calcule la probabilidad de que mientras vaya en camino hacia éste, vea pasar la micro *A1* (donde no podrá tomarla, ya que no está un paradero). (1 punto)

   Sea X la VA del tiempo que tarda en pasar la micro *A1* desde que Don Viajero parte caminando desde su casa (o paradero 1), que bien como sabemos, por perdeda de memoria seigue una distribución exponencial de parámetro λ.
   El evento que me interesa ver, es que mientras vaya caminando, vea pasar la micro a mi lado, por ende, dado que se empieza a contar el tiempo desde que se parte del paradero 1 (o casa), la micro alcanzará a Don Viajero sólo si es que ésta llega a el paradero 1 antes de el tiempo que me demoro en caminar hasta el paradero 2 menos el tiempo que se demora en llegar la micro desde el paradero 1 hasta el 2, (ya que no basta que la micro se demore en pasar un tiempo de $\frac{d}{c}$, pues en ese caso, la micro estaría recien en el paradero 1 y no alcanzaría a pasar por el lado de Don Viajero.)

   Luego, la probabilidad que se busca es:

$$
P[X < \frac{d}{c} - \frac{d}{v}] \quad = \quad 1 - e^{-\left(\frac{d}{c} - \frac{d}{v}\right)\cdot\lambda}
$$

   De todos modos, dar 0.8 a quienes hicieron el cálculo sin considerar este efecto (o sea a quienes tomaron solamente el tiempo como $\frac{d}{c}$).

6. Calcule nuevamente la parte 2, pero suponiendo esta vez que la velocidad de los buses troncales es de w, y suponiendo que en el paradero 2, se toma la primera micro que pase. (1 punto)

   Definamos la VA:
   T_3: tiempo que tarda en el viaje solamente ocupado en el trayecto en micro.

   Definamos los eventos:
   A: si llega primero la micro *A1* (antes que la *Z2*) al paradero 2
   Z: si llega primero la micro *Z2* (antes que la *A1*) al paradero 2

$$
\begin{aligned}
E[T|P2] &= E[T_2] \\
&= E[\frac{d}{c} + Y + T_3] \\
&= E[\frac{d}{c} + Y + T_3|A] \cdot P[A] + E[\frac{d}{c} + Y + T_3|Z] \cdot P[Z] \\
&= E[\frac{d}{c} + Y + \frac{b}{v}|A] \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) + E[\frac{d}{c} + Y + \frac{b}{w}|Z] \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) \\
&= \left(\frac{d}{c} + E[Y] + \frac{b}{v}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) + \left(\frac{d}{c} + E[Y] + \frac{b}{w}\right) \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) \\
&= \left(\frac{d}{c} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{b}{v}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) + \left(\frac{d}{c} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{b}{w}\right) \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)
\end{aligned}
$$