IN44A / IN3702: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: S. Astroza, R. Lagos, C. Thraves

Pauta Auxiliar 2

Martes 11 de Agosto de 2009

Problema 1

1. De la figura 1 se ve que el precio máximo es $v = 35$.

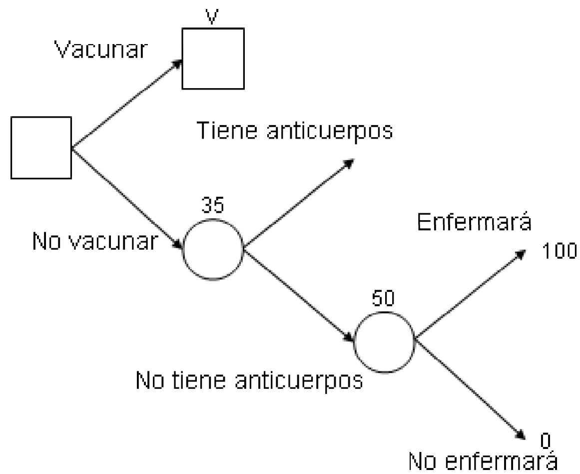


Figura 1: Arbol problema 1.1

2. Sean:

A	=	Persona con anticuerpos.
S	=	Persona sin anticuerpos.
TA	=	Test dice persona tiene anticuerpos.
TS	=	Test dice persona no tiene anticuerpos.

   Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{aligned} P[A] &= 0{,}3 & P[S] &= 0{,}7 \\ P[TS|A] &= 0{,}1 & P[TA|A] &= 0{,}9 \\ P[TS|S] &= 1-p & P[TA|S] &= p \end{aligned}$$

   Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[TA] = P[TA|A] \cdot P[A] + P[TA|S] \cdot P[S] = 0{,}7p + 0{,}27 = 1 - P[TS]$$

   Por otro lado tendremos que:

$$P[S|TS] = \frac{P[TS|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}7 - 0{,}7p}{0{,}73 - 0{,}7p} = 1 - P[A|TS]$$

$$P[S|TA] = \frac{P[TA|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}27}{0{,}27 + 0{,}7p} = 1 - P[A|TA]$$

   El árbol resultante se muestra en la figura 2.

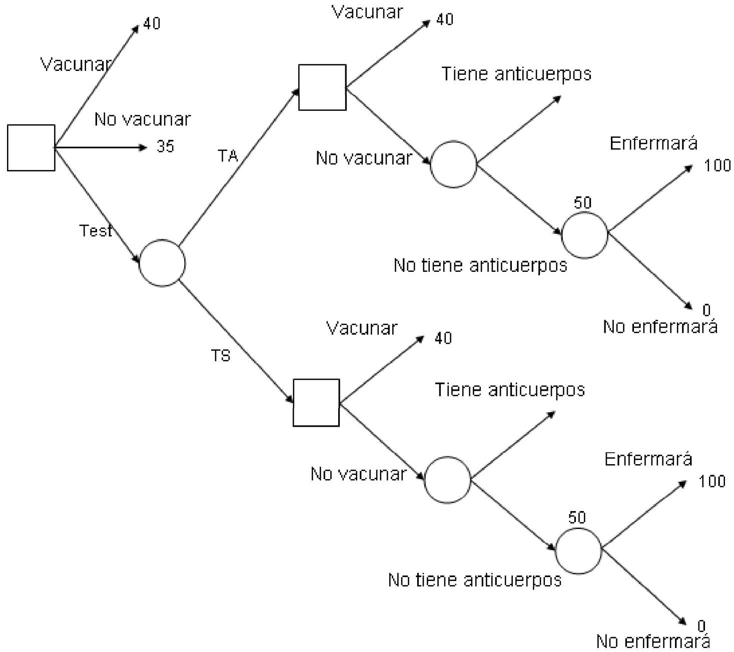


Figura 2: Arbol problema 1.2

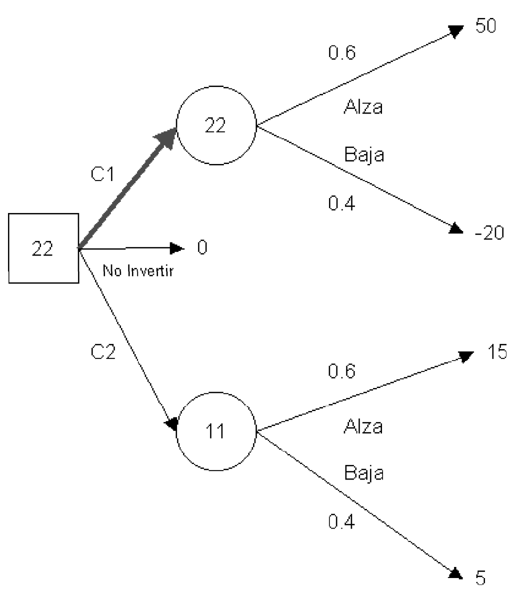
Donde:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{35p}{0{,}27+0{,}7p} < 40 \Rightarrow p < \frac{10{,}8}{7} \\
\beta &= \frac{35-35p}{0{,}73-0{,}7p} > 40 \Rightarrow p < 0{,}829 \\
\delta &= 35p + (0{,}73-0{,}7p)\cdot 40
\end{aligned}
$$

3. Propuesto

Problema 2

1. Para determinar la política óptima de inversión se debe resolver el siguiente árbol:



Luego se obtiene que la política óptima es invertir en C_1, con un valor esperado de los beneficios de 22M$.

2. Definamos los siguiente eventos:

   - OPT: Amigo optimista y opina que el mercado está al alza.
   - PES: Amigo pesimista y opina que el mercado está a la baja.
   - A: Mercado a la alza
   - B: Mercado a la baja

   Según los datos del enunciado sabemos que:

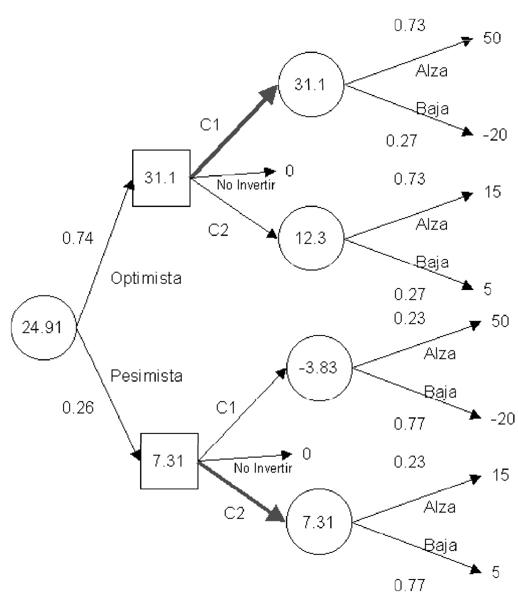
$$P(\mathsf{OPT/A}) = 0{,}9$$
$$P(\mathsf{OPT/B}) = 0{,}5$$
$$P(\mathsf{PES/A}) = 0{,}1$$
$$P(\mathsf{PES/B}) = 0{,}5$$

   Se deben calcular las siguientes probabilidades:

$$P(\mathsf{OPT}) = P(\mathsf{OPT/A})P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{OPT/B})P(\mathsf{B}) = (0{,}9 \cdot 0{,}6) + (0{,}5 \cdot 0{,}4) = 0{,}74$$
$$P(\mathsf{PES}) = P(\mathsf{PES/A})P(\mathsf{A}) + P(\mathsf{PES/B})P(\mathsf{B}) = (0{,}1 \cdot 0{,}6) + (0{,}5 \cdot 0{,}4) = 0{,}26$$

$$P(\mathsf{A/OPT}) = \frac{P(\mathsf{OPT/A})P(\mathsf{A})}{P(\mathsf{OPT})} = \frac{0{,}54}{0{,}74} = 0{,}730$$
$$P(\mathsf{B/OPT}) = \frac{P(\mathsf{OPT/B})P(\mathsf{B})}{P(\mathsf{OPT})} = \frac{0{,}20}{0{,}74} = 0{,}270$$
$$P(\mathsf{A/PES}) = \frac{P(\mathsf{PES/A})P(\mathsf{A})}{P(\mathsf{PES})} = \frac{0{,}06}{0{,}26} = 0{,}231$$
$$P(\mathsf{B/PES}) = \frac{P(\mathsf{PES/B})P(\mathsf{B})}{P(\mathsf{PES})} = \frac{0{,}20}{0{,}26} = 0{,}769$$

   Luego, con la nueva información, la situación se resume en el siguiente árbol:



Luego lo máximo que estariá dispuesto a pagar por la información es :

$$VE(\mathsf{Info}) = 24,91 - 22 = 2,91$$

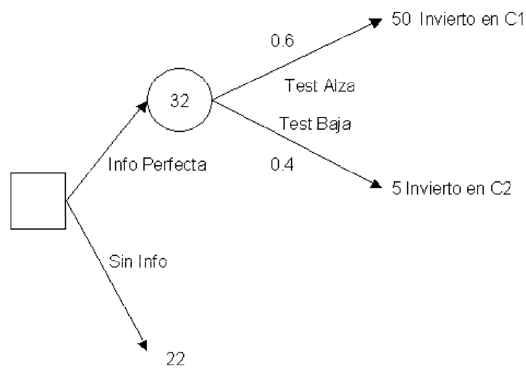
3. Para el de un Test de Información Perfecta definamos la siguiente notación adicional:

   - TA: Test predice alza.
   - TB: Test precide baja.

   Luego se tiene que:

$$P(\mathsf{A}/\mathsf{TA}) = 1$$
$$P(\mathsf{B}/\mathsf{TB}) = 1$$
$$P(\mathsf{TA}) = 0{,}6$$
$$P(\mathsf{TB}) = 0{,}4$$

   Y el árbol correspondiente queda como sigue:



   Luego el Valor esperado de la Información Perfecta es:

$$VEIP = 32 - 22 = 10$$

Problema 3

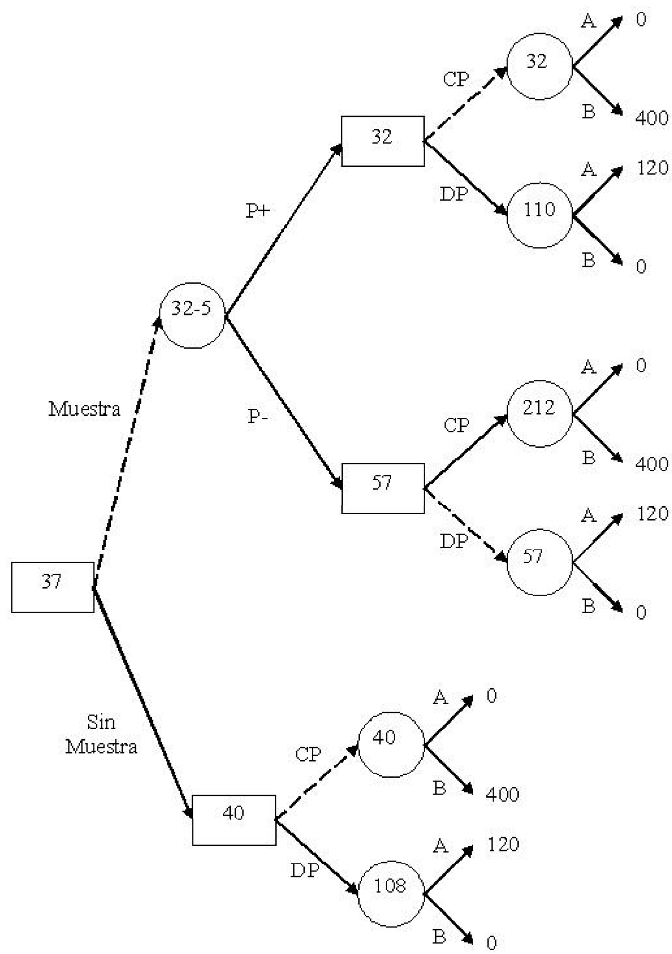
Sean los eventos:

A	=	empresa bajo control.
B	=	empresa fuera de control.
P+	=	se obtiene pieza buena de la muestra.
P-	=	se obtiene una pieza mala.

Y las decisiones:

CP	=	continuar producción.
DP	=	detener producción.

Usando Bayes y Probabilidades Totales se calculan las probabilidades asociadas a cada evento, obteniendo el siguiente árbol:



Problema 4

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

2. Modelo de Programación Dinámica

   Etapas:

   - $k = 1, \ldots K$ c/u de los meses.

   Variable de estado:

   - S_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k-1$ al k.

   Variable de decisión:

   - X_k Número aviones a fabricar el mes k.

   Recursión:

   - $S_{k+1} = S_k + X_k - D_k$

   Función objetivo:

- Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato) solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{aligned} V_k^\star(S_k) &= \min_{X_k} \left[C_{X_k,k} + h \cdot S_k + V_{k+1}^\star(S_{k+1}) \right] \\ \textbf{s.a.} \quad & X_k \geq \max\{0, D_k - S_k\} \\ & X_k \leq M\chi_{\{D_k > S_k\}} \end{aligned}$$

Notar que el costo de bodegaje desde el período $k-1$ al k es contabilizado en el período k. Además la primera restricción sobre la variable de decisión impide que algún mes no se cumpla el contrato de entrega de los aviones. La segunda restricción impide que se produzcan aviones si quedan en bodega, salvo para satisfacer la demanda del período en cuestión (χ es la función indicatriz y M es un número grande).

Condiciones de Borde:

- $S_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
- $S_{K+1} = 0$ o $D_K = X_K + S_K$ Al final no deben sobrar aviones.
- $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

3. Caso Particular

Primero debemos notar que la restricción de no producir si quedan aviones guardados y la condición de borde que nos dice que $S_5 = 0$ reduce notablemente el cuadro de solución en todos los períodos.

Período 4

S_4	0	1	$V_4^\star(\$)$	$X_4^\star$
0	i	3	3	1
1	0.1	i	0.1	0

Período 3

S_3	0	1	2	$V_3^\star(\$)$	$X_3^\star$
0	i	6 + 3	7 + 0.1	7.1	2
1	0.1 + 3	i	i	3.1	0
2	0.2 + 0.1	i	i	0.3	0

Período 2

S_2	0	1	2	3	$V_2^\star(\$)$	$X_2^\star$
0	i	6 + 7.1	9 + 3.1	12 + 0.3	12.1	2
1	0.1 + 7.1	i	i	i	7.2	0
2	0.2 + 3.1	i	i	i	3.3	0
3	0.3 + 0.3	i	i	i	0.6	0

Período 1

S_1	0	1	2	3	4	$V_1^\star(\$)$	$X_1^\star$
0	i	5 + 12.1	10 + 7.2	15 + 3.3	17 + 0.6	17.1	1

Entonces, la política de producción óptima es: Producir una unidad el mes 1, producir 2 unidades el mes 2, no producir el mes 3 y producir una unidad el mes 4.

4. Ahora debemos agregar una nueva variable que nos indique cuantas aviones se han fabricado hasta un mes en particular.

   Modelo de Programación Dinámica Modificado

   Estados:

   - $k = 1, \ldots K$ c/u de los meses.

   Variable de estado:

   - S_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k-1$ al k.
   - A_k Cantidad de aviones fabricados hasta el comienzo del mes k.

   Variable de decisión:

   - X_k Número aviones a fabricar el mes k.

   Recursión:

   - $S_{k+1} = S_k + X_k - D_k$
   - $A_{k+1} = A_k + X_k$

   Función objetivo:

   - Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato) solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{array}{rcl} V_k^\star(S_k, A_k) & = & \min\limits_{X_k} \left[C_{X_k,k} + \sum\limits_{j=1}^{X_k} R(A_k + j, k) + h \cdot S_k + V_{k+1}^\star(S_{k+1}, A_{k+1}) \right] \\ \textbf{s.a.} & & X_k \geq \max\{0, D_k - S_k\} \\ & & X_k \leq M \chi_{\{D_k > S_k\}} \end{array}$$

   Condiciones de Borde:

   - $S_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
   - $A_1 = 0$ Al comienzo no se han fabricado aviones.
   - $S_{K+1} = 0$ o $D_K = X_K + S_K$ o $A_{K+1} = \sum_{k=1}^{K} D_k$ Al final no deben sobrar aviones.
   - $V_{K+1} = 0$ Valor residual.