|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Profesores:  Coordinador: | Fernanda Bravo, Rodrigo Wolf, Richard Weber  Daniel Lillo |
| Auxiliares: | Andrés Abeliuk, Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia |

**Examen**

**05 Diciembre 2009**

**Pregunta 1**

1. Mediante las definiciones de solución básica y vértice, demuestre que dado *x* una solución básica de un poliedro P, entonces ésta es también vértice de P. (1,2 ptos)
2. En simplex. Dada una solución básica degenerada, porque puede darse que no toda dirección básica es factible?. Dada una solución básica factible, ¿Cómo demostramos optimalidad y/o encontramos una mejor solución?. (1,2 ptos)
3. Sea el siguiente problema:

Y su correspondiente dual:

Demuestre que si el primal es no acotado (zp=) entonces el dual es infactible. (1,2 ptos)

1. Una empresa a resuelto un problema de optimización y ha encontrado que el óptimo le permite tener utilidades de $500.000.000. Sin embrago, ante cambios en los parámetros del problema las utilidades que se encuentran con son en algunos casos bajísimas en comparación al mejor valor posible y en otros casos se comporta bastante bien. Por su parte, genera una utilidad de $480.000.000, pero ante cambios en los parámetros del problema siempre se comporta bien, nunca esta a más de un 5% del mejor valor posible. Los ingenieros que definieron los parámetros del problema trabajaron mucho para encontrar estos valores, mas ellos mismos señalan que es imposible asegurar que la demanda, precios de las materias primas, etc tengan exactamente el mismo comportamiento que ellos predijeron. Por ejemplo, si la predicción de la demanda es errada en un 1% la solución genera utilidades muy bajas. ¿Qué solución le recomendaría a la empresa que aplique? o . ¿Por qué?.

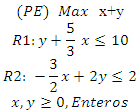
(1,2 ptos)

1. Pizza Arrivederchi, desea ser lo más eficiente posible con sus tiempos de viajes, es por ello que han modelado la ciudad como una red. Es así como cuando entra un pedido la idea es que el repartidor vaya al lugar del pedido y retorne a la pizzería en el menor tiempo posible. ¿Cómo resolvería este problema, es decir, el de ir de un lugar a otro y luego retornar al de origen en el menor tiempo posible sin hacer un PPL?

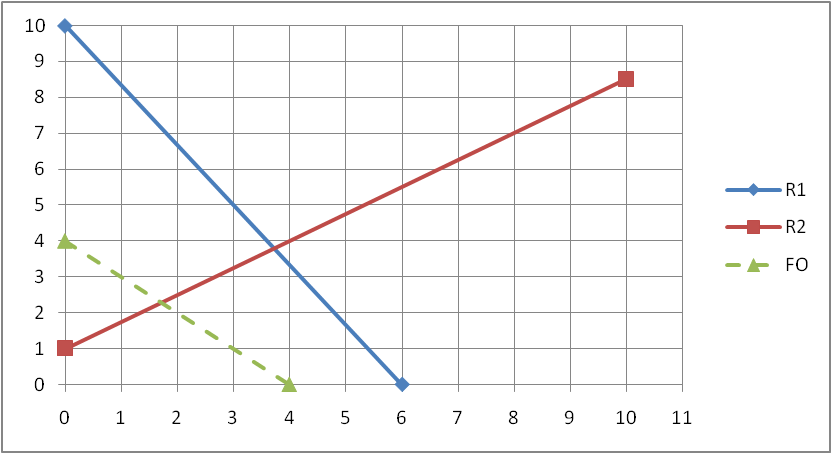
(1,2 ptos)

**Pregunta 2**

1. (2.4 Ptos.) Sea el siguiente Problema Entero.



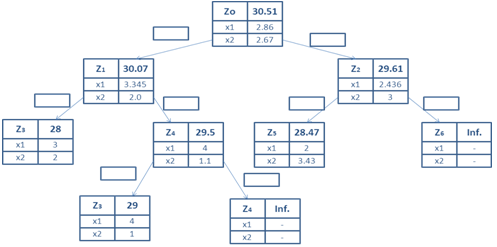
La región factible para Relajación Lineal (PL) se muestra el siguiente gráfico. A partir de ésta genere nuevas restricciones con el fin de encontrar la menor envoltura convexa del poliedro, de manera de asegurar que la solución óptima de PL sea la solución óptima de PE.



2. (3 Ptos.) Suponga que ha resuelto mediante B&B un problema de optimización *ENTERO,*  PE.



El árbol final se muestra en la siguiente figura, considerando que se ramifico en profundidad y luego a lo ancho:



Justifique el árbol final obtenido, indicando las restricciones agregadas en cada ramificación, los criterios de poda utilizados, y los valores que toma el incumbente desde Zo hasta el término del algoritmo. ¿Cuál es el óptimo del problema?

3. (0,6 Ptos) Nombre los 3 criterios de detención de B&B.

**Pregunta 3**

Una empresa de telecomunicaciones debe diseñar su red de transmisión de datos. Existen un conjunto N = {1,…,n} de nodos entre algunos de los cuales se originan flujos de datos. Específicamente, existe un conjunto de pares D = {(ri, si), i = 1,…,q}, donde ri y si ∈ N. Entre cada uno de estos pares se genera un requerimiento de flujo. Sea di la demanda por flujo, en Mb (Megabyte), que debe transmitirse entre los elementos del par i, i = 1,…,q, desde ri hacia si (en algunos casos en D puede estar un par (r, s) y también el par (s, r), indicando esto que hay requerimiento de flujo en ambos sentidos). No todos los nodos del conjunto N corresponden a puntos entre los que se generan o reciben comunicaciones, pero pueden ser utilizados como nodos “de paso”. Existe un costo fijo Fij si se habilita una conexión de comunicación entre los nodos i y j, con i, j ∈ N. Igualmente, existe un costo cij por cada Mb que se transmita a través de la conexión entre el nodo i y el nodo j. La empresa no está dispuesta a incurrir en un costo variable total de flujo superior a C pesos. También, por diseño, la conexión i− j, si se habilita, tendrá una capacidad total de Kij Mb.  
Para incentivar la conexión del país, el gobierno ha decidido subsidiar el costo de instalación de ciertos pares de flujo entre dos nodos correspondientes a S= {(ri, si), i = 1,…,t} (no necesariamente S), pero con la condición que al menos la mitad de los pares propuestos se habiliten.

Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita decidir cuáles conexiones deben ser habilitadas (construidas) de modo que se satisfaga la demanda por flujo de comunicaciones, no se exceda el presupuesto por costo de flujo, y que el costo total de habilitación sea mínimo.

**PAUTA**

**Solución:**

**Pregunta 1**

1. 



1. Primera 0.5 ptos

Segunda 0.7 ptos



1. Supongamos que el óptimo del primal es infinito (no acotado) y que el problema dual tiene una solución factible p. Por dualidad débil cx ≤ bp para toda solución del primal x. En particular ≤bp, lo cual es imposible y prueba que el dual no puede tener solución factible.
2. parece ser mejor solución ya que posee un buen comportamiento ante cambios en los valores de los parámetros, cambios que según los propios ingenieros son muy posibles. Además no es sólo que deje de ser óptimo, sino que por ejemplo ante cambios en un 1% de la demanda pasa a ser una pésima solución.

Ahora bien, si alguien argumento que prefiere ya que es una persona sumamente arriesgada y prefiere correr el riesgo, dar algo de puntaje. El problema es que es desde el punto de vista de la empresa o lo natural es que la empresa prefiera la opción del párrafo anterior.

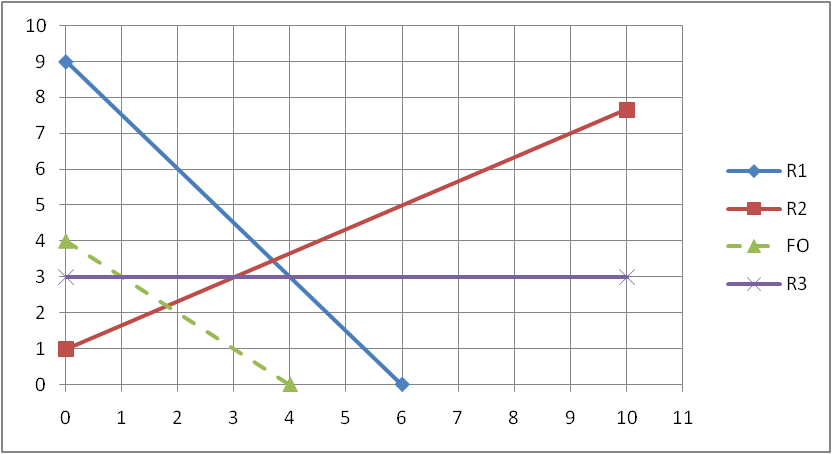
1. Hay que aplicar dijkstra tomando como origen la pizzería y como destino el lugar del pedido y luego aplicar dijkstra como origen el lugar del pedido y destino la pizzería. Finalmente se suman los valores. Notar que hay que hacer dijkstra para la ida y la vuelta, ya que en un dígrafo no necesariamente son iguales, 0,6 cada mención.

**Pregunta 2**

1. Gráficamente se ve que el óptimo está en el punto entero (4,3) done el valor de Z=7.

Para encontrar la menor envoltura convexa debemos modificar y agregar nuevas restricciones de manera que todos los puntos enteros del problema original estén contenidos en la envoltura.

1. Cambiamos la pendiente de R1 de modo que pase por el punto (4,3)
2. Cambiamos la pendiente de R2 hasta que toque al punto (3,3) (ojo que no pueden cambiarla hasta que pase por (4,3) pues dejan un punto entero fuera).
3. Finalmente agregamos la restricción



Con esto el poliedro queda:

Notar que pueden haber hecho otra envoltura, lo que importa es que envuelvan todos los puntos enteros del problema original. De lo contrario quitar MITAD del puntaje.

1. El arbol de B&B queda:

****

2.0 ptos por las restricciones de cada nodo (poner las restricciones)



1.0 pto por el incumbente y óptimo.

La secuencia de valores para el incumbente son: . El óptimo es el valor encontrado en el subroplema 5.

1. 0,2 cada una

* El problema en el nodo resulta infactible. Obviamente luego cualquier ramificación será infactible.
* La solución en el nodo es entera, por lo tanto cualquier ramificación no podría tener mejor solución entera.
* Si en un nodo el valor óptimo es z y el valor del incumbente es mejor (mayor o menor dependiendo del caso) , es claro que seguir ramificando va a dar soluciones enteras peores que el incumbente obtenido hasta el momento.

**Pregunta 3**

xijk = Flujo en Mb que circula entre i y j, correspondiente al par origen destino k.

yij = 1 Si se habilita la conexión (i, j)

0 si no

Llamáremos además:

dk = Demanda por flujo que debe transmitirse por el par k

Fij = Costo de habilitar la conexión entre i y j

cij = Costo unitario por transmitir entre i y j

C = Máximo costo variable en que está dispuesta a incurrir la empresa

Kij = Capacidad total de la conexión (i, j)

F.O:

Satisfacer la demanda por flujo de comunicaciones:

Presupuesto de la empresa:

Mitad de pares en S para el subsidio:

No pueda existir flujo entre i y j si la conexión (i, j) no está habilitada

Naturaleza de las variables: