

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 10
12 de Noviembre de 2009

Problema 1: KKT

A) Dado el siguiente problema (P):

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 \leq x_2 \\ & x_1^2 + x_2 - 5 \leq 0 \end{aligned}$$

- Encuentre gráficamente el óptimo
- Verificar gráfica y analíticamente que el punto óptimo cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).
- Puede haber otro punto que verifique KKT. En caso que sí, encuéntralo. En caso que no, justifique.

B) Supongamos que la función objetivo del problema (P) cambia como lo muestra el siguiente problema:

$$(P1) \quad \begin{aligned} \min \quad & x_2 - 10x_1 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 \leq x_2 \\ & x_1^2 + x_2 - 5 \leq 0 \end{aligned}$$

Resuelva los puntos a., b. y c. de la parte A

Problema 2: Optimización Irrestricada

- Mencione las desventajas del método de Newton.
- Considere la función:

$$f(x, y) = ye^{x-1} + \frac{y^3}{3} - x - 2y$$

Analice su convexidad y verifique si el punto (1,1) es estacionario y concluya sobre si es un mínimo global.

- Considere el siguiente problema de optimización:

$$\min f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

Resolver utilizando el Método de Newton y del Gradiente. Tome como punto de partida el (2,4). ¿Qué puede observarse de ambos métodos?

Problema 3: Preguntas teórica

- A partir de las condiciones de KKT verifique que un punto interior no puede ser óptimo en un problema de programación lineal.
- Un punto interior puede ser óptimo en un problema de programación no lineal? Justifique.
- Teorema condiciones necesarias de segundo orden:
Si x^* es un mínimo local de f y $f \in C^2(B(x^*, \epsilon))$ entonces
 $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

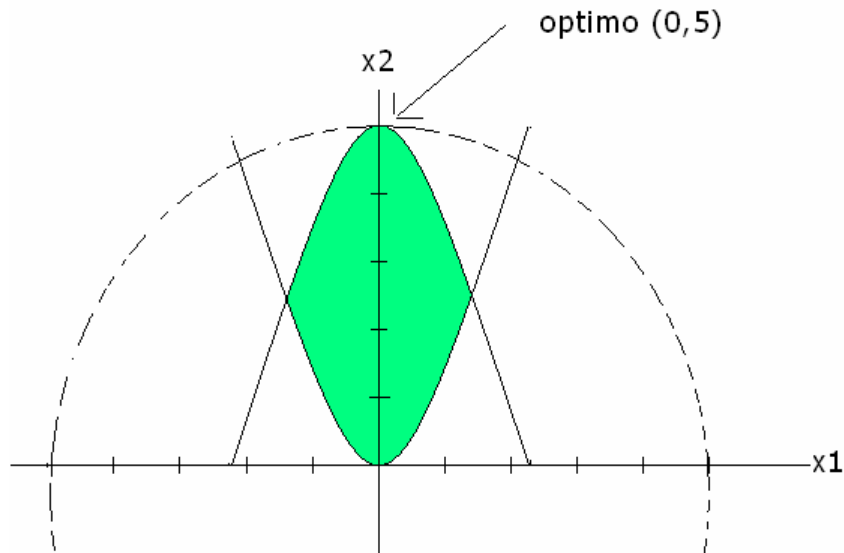
IN3701 – Modelamiento y Optimización
Pauta Auxiliar 10
12 de Noviembre de 2009

Problema 1

A) Dado el siguiente problema (P):

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} & g_1: x_1^2 \leq x_2 \\ & g_2: x_1^2 + x_2 \leq 5 \end{array}$$

a. Encuentre gráficamente el óptimo



b. Verificar gráfica y analíticamente que el punto óptimo cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Calculemos los gradientes del problema expresado según la forma estándar de un problema de KKT

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1^2 - x_2^2 \\ \text{s.a} & g_1: x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & g_2: x_1^2 + x_2 - 5 \leq 0 \end{array}$$

Gradientes

$$\nabla f = (-2x_1, -2x_2)$$

$$\nabla g_1 = (2x_1, -1)$$

$$\nabla g_2 = (2x_1, 1)$$

Condiciones de KKT

$$\nabla f(0,5) + \mu_1 \nabla g_1(0,5) + \mu_2 \nabla g_2(0,5) = 0$$

$$\mu_1 g_1 = 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0$$

De la segunda ecuación se tiene que

$$\mu_1(x_1^2 - x_2) = 0 \Rightarrow \mu_1(0 - 5) \Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$\mu_2(x_1^2 + x_2 - 5) = 0 \Rightarrow \mu_2(0 + 5 - 5) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Así se tiene que:

$$\nabla f(0,5) + \mu_2 \nabla g_2(0,5) = 0$$

$$(0, -10) + \mu_2(0,1) = 0$$

$$\mu_2 = 10$$

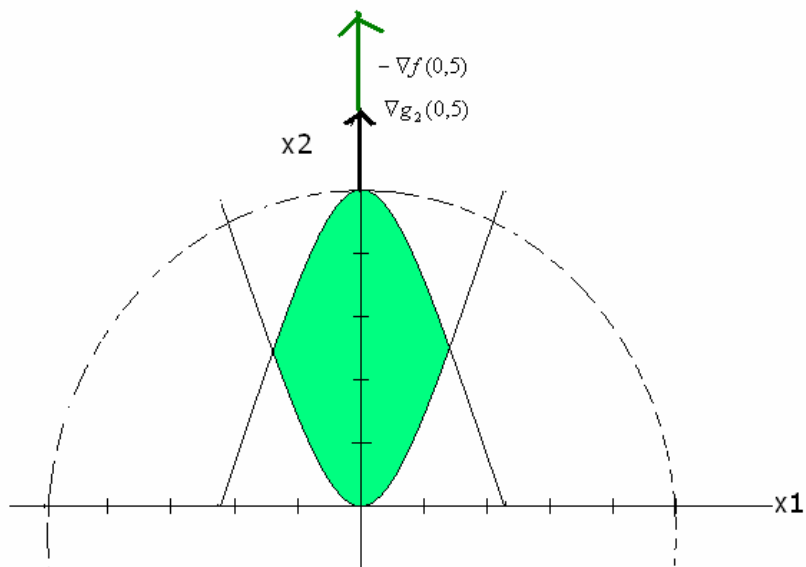
Luego Analíticamente cumple KKT

Veamos gráficamente: Tenemos los vectores:

$$-\nabla f(0,5) = (0,10)$$

$$\nabla g_2(0,5) = (0,1)$$

Gráficamente se puede ver que menos el gradiente de la función objetivo es una combinación lineal (en particular una ponderación) de la restricción activa.



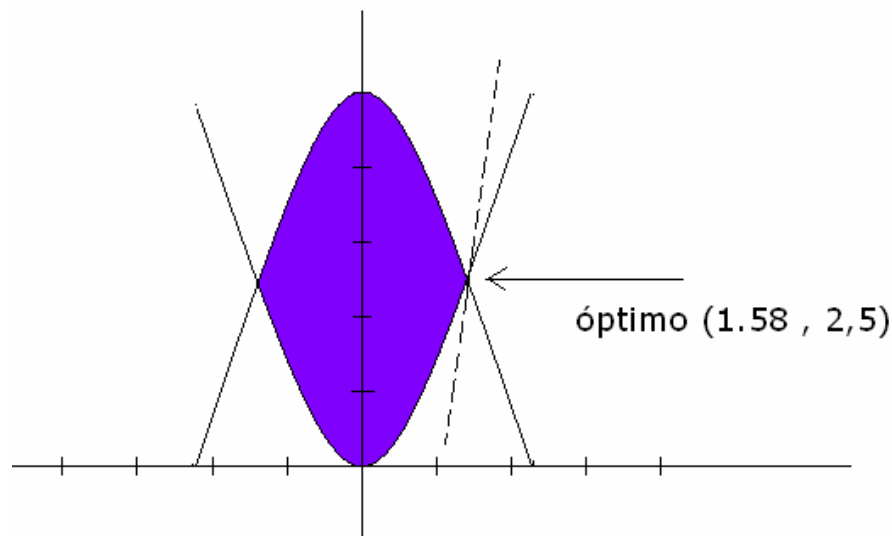
c. Puede haber otro punto que verifique KKT. Justifique.

Sí, el (0,0) verifica, y puede darse porque al no ser la función f convexa no podemos afirmar que los puntos que verifican KKT sean óptimos globales del problema.

B) Supongamos que la función objetivo del problema (P) cambia como lo muestra el siguiente problema:

$$(P1) \quad \begin{array}{ll} \min & x_2 - 10x_1 \\ \text{s.a} & g_1: x_1^2 \leq x_2 \\ & g_2: x_1^2 + x_2 \leq 5 \end{array}$$

a. (0.5 ptos) Encuentre gráficamente el óptimo



b. Verificar gráfica y analíticamente que el punto óptimo cumple con las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Calculemos los gradientes del problema expresado según la forma estándar de un problema de KKT

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & -x_2 - 10x_1 \\ \text{s.a} & g_1: x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & g_2: x_1^2 + x_2 - 5 \leq 0 \end{array}$$

Gradientes

$$\begin{aligned} \nabla f &= (-10, 1) \\ \nabla g_1 &= (2x_1, -1) \\ \nabla g_2 &= (2x_1, 1) \end{aligned}$$

Condiciones de KKT

$$\begin{aligned} \nabla f(1.58, 2.5) + \mu_1 \nabla g_1(1.58, 2.5) + \mu_2 \nabla g_2(1.58, 2.5) &= 0 \\ \mu_1 g_1 &= 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1^2 - x_2) &= 0 \Rightarrow \mu_1(5 - 5) \Rightarrow \mu_1 \in \Re \\ \mu_2(x_1^2 + x_2 - 5) &= 0 \Rightarrow \mu_2(2.5 + 2.5 - 5) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \Re \end{aligned}$$

Así se tiene que:

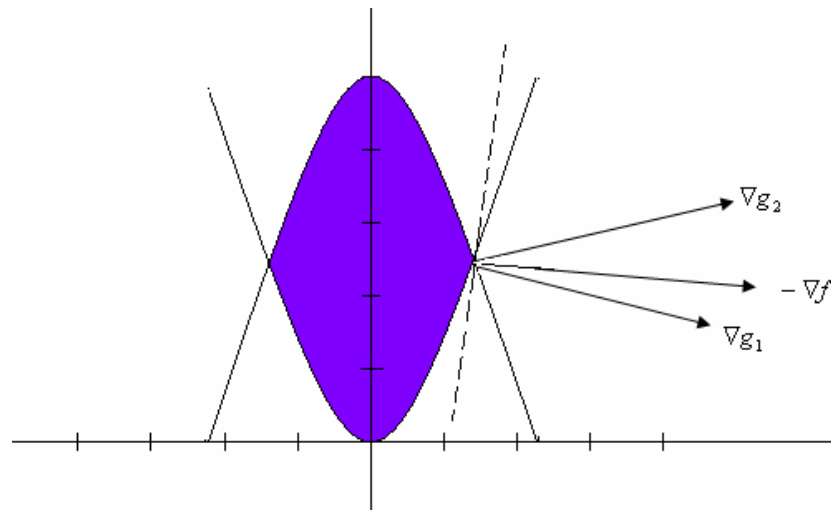
$$\begin{aligned}\nabla f(1.58, 2.5) + \mu_1 \nabla g_1(1.58, 2.5) + \mu_2 \nabla g_2(1.58, 2.5) &= 0 \\ (-10, 1) + \mu_1 (3.16, -1) + \mu_2 (3.16, 1) &= 0 \\ \mu_2 = 1.08 \quad \mu_1 = 2.08\end{aligned}$$

Luego Analíticamente cumple KKT

Veamos gráficamente: Tenemos los vectores:

$$\begin{aligned}-\nabla f(1.58, 2.5) &= (10, -1) \\ \nabla g_1(1.58, 2.5) &= (3.16, -1) \\ \nabla g_2(1.58, 2.5) &= (3.16, 1)\end{aligned}$$

Gráficamente se puede ver que menos el gradiente de la función objetivo es una combinación lineal (en particular una ponderación) de la restricción activa.



2.

a)

- Tener que invertir la matriz hessiana en cada iteración es caro computacionalmente.
- La matriz hessiana puede ser no invertible con lo cual el método se indefin, además la dirección es de descenso sii la matriz es definida positiva.
- La convergencia depende drásticamente del punto inicial y tiene éxito si se parte cerca de un punto estacionario, de lo contrario el método puede diverger.

b)

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{x-1} - 1 \\ e^{x-1} + y^2 - 2 \end{pmatrix}, H_F(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{x-1} & e^{x-1} \\ e^{x-1} & 2y \end{pmatrix}$$

Los determinantes de las sub-matrices principales de H son:

$$\det(ye^{x-1}) = ye^{x-1}$$

$$\det \begin{pmatrix} ye^{x-1} & e^{x-1} \\ e^{x-1} & 2y \end{pmatrix} = 2y^2e^{x-1} - (e^{x-1})^2$$

Ambas pueden ser mayores o menores a 0, luego no es posible afirmar que la función f sea convexa o cóncava en $\mathbb{R}^2$

Para el punto (1,1) se tiene que:

$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ luego es un punto estacionario y $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es definido positivo ($\det H = 1$) por lo tanto es un mínimo local.

Sin embargo no es un mínimo Global, por ejemplo $F(-20, -20) < f(1,1)$ (se puede apreciar sin calcularlo)

c)

Método de Newton:

Iteración 1: estamos en el punto $x^0 = (2,4)$

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_f^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que no estamos en el óptimo
Se calcula el segundo punto con el método:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración 2: estamos en el punto $x^1 = (0,0)$

$\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que estamos en un punto estacionario
El Hessiano es positivo luego es un óptimo => FIN

Método del Gradiente:

Iteración 1: estamos en el punto $x^0 = (2,4)$

$$\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, lo que implica que no estamos en el óptimo
Se calcula el siguiente punto usando el método:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda_0 \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Con $\lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(x^k - \lambda \nabla f(x^k))$, luego

$$f(x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0)) = f \begin{pmatrix} 2 - \lambda_0 4 \\ 4 - \lambda_0 4 \end{pmatrix} = (2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2} (4 - \lambda_0 4)^2$$

$$\lambda_0 = \arg \min_{\lambda} (2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2} (4 - \lambda_0 4)^2$$

$$\frac{\partial \left((2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2} (4 - \lambda_0 4)^2 \right)}{\partial \lambda_0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2}{3}$$

Luego el siguiente punto es:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = x^1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Iteración 2: estamos en el punto $x^1 = (-2/3, 4/3)$

$$\nabla f \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ lo que implica que no estamos en el óptimo}$$

Etc..

Vemos que la convergencia del método de Newton en este caso es mejor que la del método del Gradiente. Esto es, con el método de Newton se converge más rápido al punto. Esto se debe a que las superficies de nivel son excéntricas lo que se traduce en un mayor número de iteraciones en el método del gradiente.

3.

a)

Sea un PL , donde se quiere optimizar $F(x) = \vec{c} \cdot \vec{x}$ lineal, en la región factible S convexa. Sea $\bar{x}$ punto interior de S candidato a óptimo. Las Condiciones de KKT aplicadas a $\bar{x}$

$\exists \mu_i \geq 0, \forall i$ tal que:

$$\nabla F(\bar{x}) + \sum_i \mu_i \nabla g_i = 0 \quad (1)$$

$$\mu_1 g_1(\bar{x}) = 0 \quad (HC)$$

$$\vdots \quad (HC)$$

$$\mu_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad (HC)$$

Para $\bar{x}$ todas las restricciones $g_i(\bar{x})$ son NO activas, luego, por las condiciones de holgura complementaria, se tiene que $\forall i \quad \mu_i = 0$.

Luego, (1) también debe satisfacerse para que $\bar{x}$ sea óptimo del PL , lo cual se tiene sólo si $\nabla F(\bar{x}) = 0$, lo cual no podría ser, pues implicaría que $\nabla F(\bar{x}) = \vec{c} = \vec{0}$, con lo que $F(x) = 0$. Luego, un punto interno de la región factible no puede ser óptimo en un PL .

Sea un Problema de Optimización No Lineal. Al igual que antes planteamos KKT para un punto interior de la región factible S . Obtenemos que si $\nabla F(\bar{x}) = 0$ entonces se cumple KKT. Lo anterior se tiene sólo si $\bar{x}$ es un punto estacionario al interior de la región factible S para $F(x)$. Luego un punto interior de la región factible podría ser óptimo en un problema de optimización no lineal

b)

Condiciones Suficientes

Teorema condiciones necesarias de segundo orden

Si x^* es un mínimo local de f y $f \in C^2(B(x^*, \varepsilon))$ entonces $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

Demostración. ■ Por las condiciones de primer orden $\nabla f(x^*) = 0$

- Sea $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces $f(x^* + \varepsilon p) = f(x^*) + \varepsilon^2 \frac{1}{2} p^t \nabla^2 f(x^*) p + R_2(\varepsilon p, x^*)$.
- $R_2(\varepsilon p, x^*) / \|\varepsilon p\| = 0$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Por mínimo local se tiene $0 \leq \varepsilon^2 \frac{1}{2} p^t \nabla^2 f(x^*) p$, y tomando límite de $\varepsilon \rightarrow 0$ $p^t \nabla^2 f(x^*) p \geq 0$.

□

Dudas y/o Comentarios a:

Andrés Abeliuk

andabek@hotmail.com