INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Richard Weber, Rodrigo Wolf

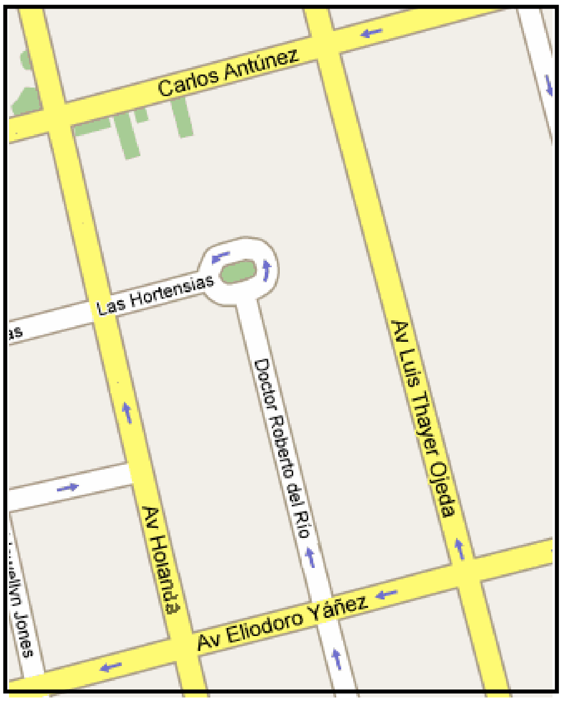
Auxiliares: Andrés Abeliuk, Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 9
29 de Octubre, 2009

Problema 1

Nuestro buen amigo Danielillo necesita de su ayuda: Su madre le ha pedido que vaya a comprar el pan todos los días al negocio más cercano a su hogar. Danielillo siempre se ha cuestionado cuál es la ruta más corta desde su casa al negocio y, dado que ahora tendrá que hacer el recorrido a diario, le gustaría saber el camino óptimo a seguir. Debido a su alta carga de trabajo, Danielillo no es capaz de hacer un estudio detallado de su problema, por lo que le ha pedido a usted que se lo resuelva.

Usted sabe que su amigo vive en la esquina de Luis Thayer Ojeda con Eliodoro Yañez, y que el almacén queda en la esquina de Carlos Antunez con Holanda. Además, usted ya ha estimado previamente la distancia recorrida en cada una de las cuadras de interés, las que se resumen a continuación junto al mapa respectivo:



- Luis Thayer Ojeda, entre Carlos Antunez y Eliodoro Yañez: 350 metros
- Eliodoro Yañez, entre Luis Thayer Ojeda y Doctor Robert del Río: 100 metros
- Eliodoro Yañez, entre Doctor Roberto del Río y Holanda: 100 metros
- Holanda, entre Eliodoro Yañez y Las Hortensias: 200 metros
- Doctor Roberto del Río entre Eliodoro Yañez y Las Hortensias: 150 metros
- Las Hortensias, entre Doctor Roberto del Río y Holanda: 70 metros
- Holanda, entre las Hortensias y Carlos Antunez: 100 metros
- Carloz Antunez, entre Luis Thayer Ojeda y Holanda: 180 metros

Modele el problema como un grafo dirigido, indicando arcos y nodos y los costos asociados. Luego, encuentre la ruta más corta desde la casa de Danielillo a todas las esquinas mencionadas anteriormente, utilizando Dijkstra.

Problema 2

Suponga que tiene una red de sólo 3 nodos con un arco del nodo 1 al nodo 2, con capacidad mínima y máxima igual a (5,8), y otro arco del nodo 2 al nodo 3, con capacidad mínima y máxima igual a (2,3). Aplique el algoritmo de flujo inicial (fase I de Ford y Fulkerson) para demostrar que no existe un flujo factible del nodo 1 al nodo 3. Explique el resultado teórico que está usando para justificar que dicho flujo no existe.

Problema 3

La multinacional líder en el mercado de bebidas de fantasía, Carboni-Cola Company, quiere mejorar la planificación de la producción de sus I marcas y el posterior embotellado en distintos formatos, el que genera J productos diferentes[1]. Para efectos de modelamiento considere conocido el parámetro S_{ij} que vale 1 si el producto final j se produce con el producto genérico i, y 0 si no.

El proceso productivo comienza con M maquinas capaces de producir cualquiera de las I marcas, a una tasa PM_{mi} por hora para la maquina m y la marca i. Luego, la producción se pasa a uno de los I estanques, uno para cada marca, donde puede almacenarse o traspasarse a una de las L líneas de embotellado.

Las líneas de embotellado son capaces de producir cualquiera de los J productos finales, y trabajan a una tasa PL_{lj} por hora para la línea l y el producto final j. Cada máquina puede producir sólo una de las I marcas cada día y cada línea sólo puede embotellar un producto final por día. La jornada de producción diaria dura NH horas, y cuando se produce un cambio de marca en una maquina entre un día y el anterior es necesario dedicar TCG horas para realizarlo, análogamente cuando se produce un cambio de producto final entre un día y el anterior es necesario dedicar TCF hora para realizarlo.

El horizonte de planificación es de T días, y se conocen las demandas Djt para cada producto final j en el día t, las que deben ser satisfechas en algún momento durante los T días considerados. El inventario inicial de cada marca es conocido y son Si unidades, mientras que el inventario inicial de productos finales es nulo. Dado que el horizonte de planificación no es muy largo, se considera que los costos de producción son fijos una vez conocida la demanda, por lo que el interés de la empresa es minimizar el inventario de productos finales y de productos genéricos en los estanques. Además, se sabe que se puede dejar demanda insatisfecha en un periodo, satisfaciéndola en alguno de los siguientes días. Sin embargo, ejecutivos de la empresa estiman que el costo de no satisfacer una unidad de demanda por un periodo es igual a W veces el costo de mantener una unidad de inventario un periodo (W>>1).

Desarrolle un modelo de programación lineal mixto que permita resolver el problema de Carboni-Cola Company, es decir decidir cuánto producir y almacenar de cada producto genérico y final en cada periodo, de modo de satisfacer la demanda durante el horizonte de planificación minimizando los inventarios y la demanda insatisfecha según sus costos relativos.

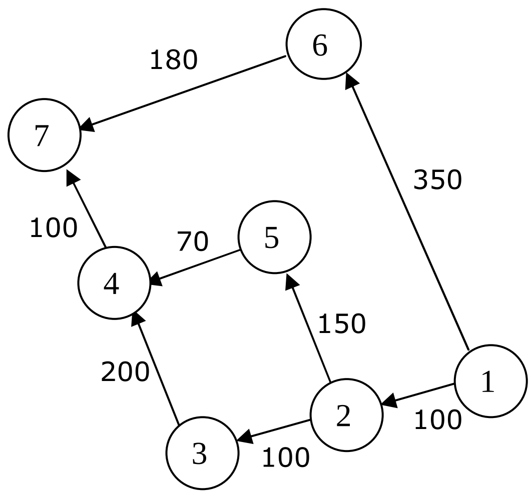
[1] Por ejemplo, algunas de las I marcas pueden ser Carboni-Cola, Fantabeliuk, Bucareite, etc, mientras que algunos de los J productos finales pueden ser Carboni-Cola de 500cc, Carboni-Cola de 1000cc, Fantabeliuk de 500cc, etc. (marca + tamaño/tipo envase).

<u>Solución</u>

Problema 1

Primero, debemos construir la red. Las calles serán representadas por arcos, las esquinas por nodos y las distancias serán los costos de los arcos. Con este esquema, podemos usar Dijkstra para calcular la ruta más corta desde un nodo a todos los otros de la red, i.e. desde una esquina a todas las otras.

El grafo queda:



Inicialización:

- $\Pi(1)=0$
- $\Pi(i)=+$infinito $\forall i \neq 1$
- $P(1)=1$
- $S=\emptyset$

Iteración 1:

- $S=\{1\}$

- ¿$\Pi(2) > \Pi(1)+100$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(2)=\Pi(1)+100=100$
- $P(2)=1$

- ¿$\Pi(6) > \Pi(1)+350$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(6)=\Pi(1)+350=350$
- $P(6)=1$

Iteración 2:

- $S=\{1,2\}$

- ¿$\Pi(3) > \Pi(2)+100$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(3)=\Pi(2)+100=200$
- $P(3)=2$

- ¿$\Pi(5) > \Pi(2)+150$? Sí, entonces actualizamos $\Pi(5)=\Pi(2)+150=250$
- $P(5)=2$

Iteración 3:

- S={1,2,3}

- ¿Π(4) > Π(3)+200? Sí, entonces actualizamos Π(4)=Π(3)+200=400
- P(4)=3

Iteración 4:

- S={1,2,3,5}

- ¿Π(4) > Π(5)+70? Sí, entonces actualizamos Π(4)=Π(5)+70=320
- P(4)=5

Iteración 5:

- S={1,2,3,5,4}

- ¿Π(7) > Π(4)+100? Sí, entonces actualizamos Π(7)=Π(4)+100=420
- P(7)=4

Iteración 6:

- S={1,2,3,5,4,6}

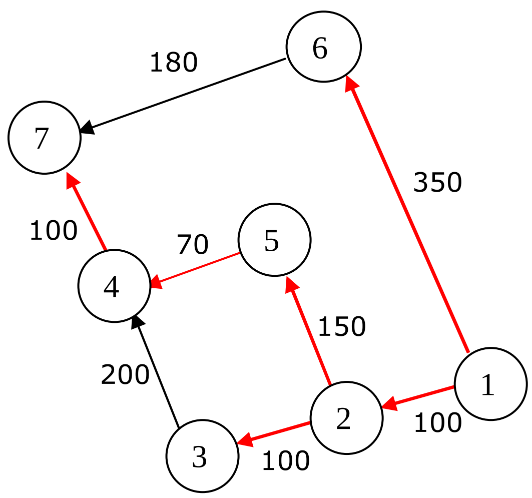
- ¿Π(7) > Π(6)+180? NO, así que no actualizamos nada y seguimos.

Iteración 7:

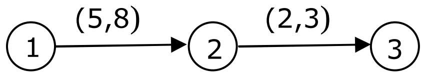
- S={1,2,3,5,4,6,7}

Como ya entraron todos los nodos, termina el algoritmo (no se hace nada en esta iteración).
Noten que el número de iteraciones es igual al número de nodos, siempre (pues va entrando un nodo a S en cada iteración).

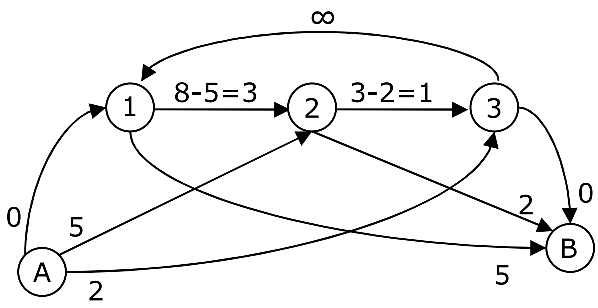
Gráficamente, la solución queda:



Problema 2:



Debemos determinar el flujo máximo F* en G* a través de F&F. El grafo auxiliar G* es el siguiente, el cual muestra la capacidad máxima de flujo a través de cada arco (la capacidad mínima es cero para todos).



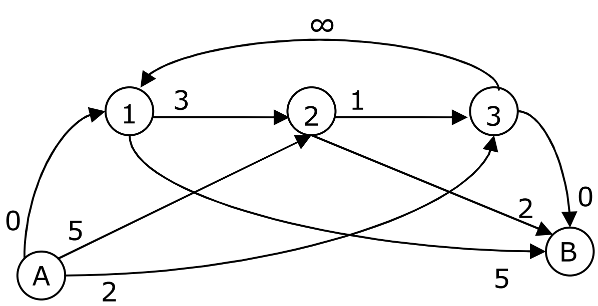
Notar que el grafo auxiliar fue construido usando **Fase 1** de F&F. Para ver instrucciones de cómo hacerlo, vean los PPT de clases (diapositiva 25, capitulo de redes) y sigan los pasos mientras miran esta pauta. Fase 1 sirve para calcular un flujo factible inicial para la red, cuando el flujo inicial "obvio" (enviar cero por todos los arcos) no es factible, i.e. cuando existen capacidades mínimas en los arcos.

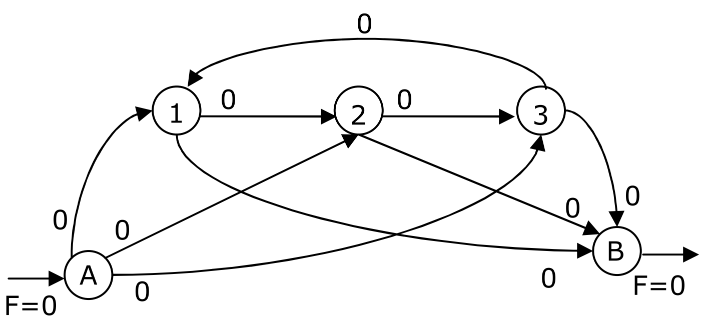
Una vez construido el grafo auxiliar con fase 1, debemos resolver el problema de flujo máximo usando F&F "normalmente" en esta nueva red, suponiendo que ahora el flujo externo llega al nodo A (nodo inicial) y sale de la red por el nodo B (nodo final). Ojo que el arco que une a 3 con 1 tiene capacidad infinita, por construcción.

Ahora sí, encontremos el flujo máximo de la red. Para esto, usaré por comodidad y claridad 2 columnas de grafos. Los de la izquierda representarán el grafo auxiliar en cada iteración, mientras que el de la derecha llevará la cuenta de cuanto flujo ha pasado por cada arco hasta dicha iteración. Obviamente el grafo de la derecha al comienzo ("iteración 0") tiene sólo ceros, ya que no se ha enviado nada de flujo ;)

GRAFO AUXILIAR ***FLUJO ACTUAL***

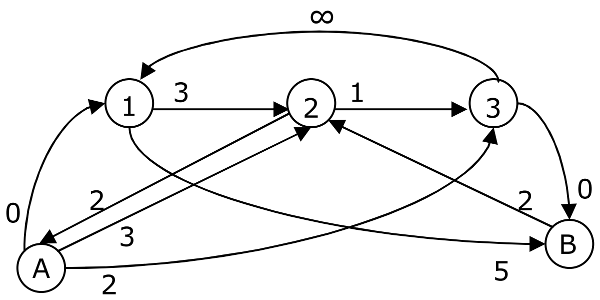
Iteración 0
(esto no es necesario hacerlo pero para que quede claro cómo partimos):

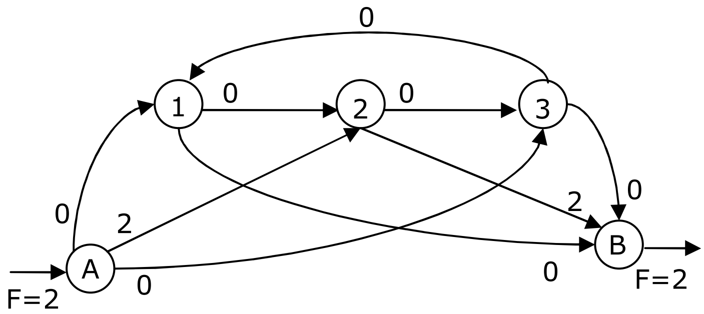




Iteración 1:

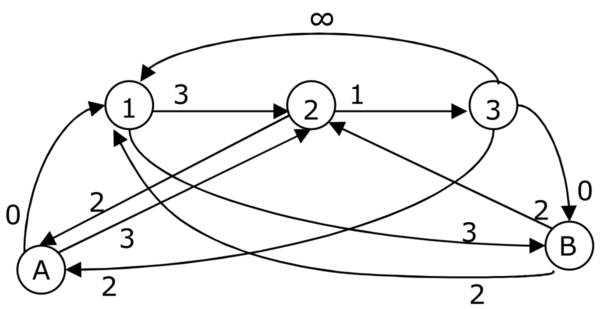
Usamos el camino A -> 2 -> B, ε=2

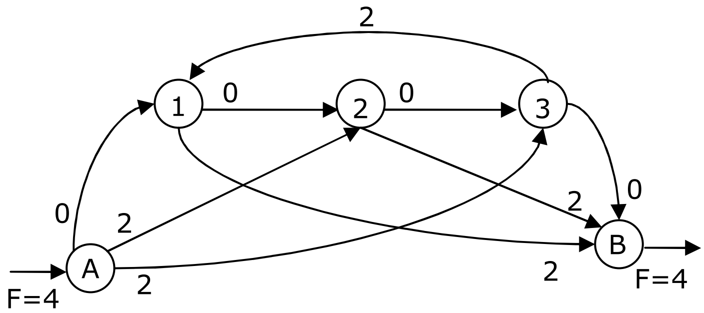




Iteración 2:

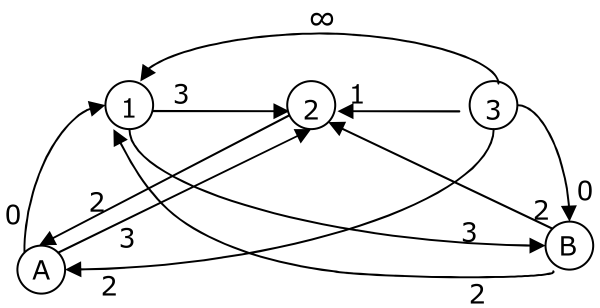
Usamos el camino A -> 3 -> 1 -> B, ε=2

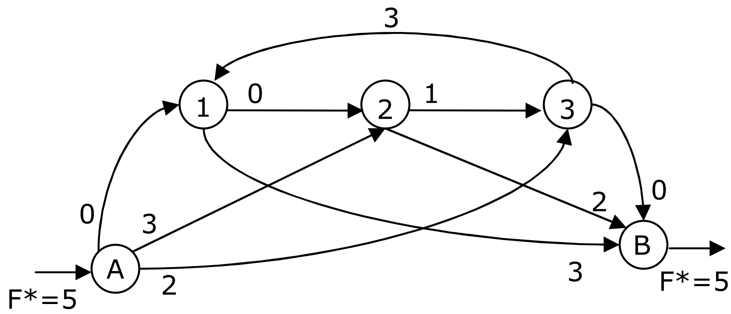




Iteración 3:

Usamos el camino A -> 2 -> 3 -> 1 -> B, ε=1





Podemos notar que ya no existe otro camino, hemos llegado al óptimo. Ahora debemos comprobar la siguiente condición:

$$F^* < \sum_{(i,j)\in A} l_{ij}$$

donde l_{ij} son las capacidades mínimas de los arcos en la red original.
Como esta condición se cumple ($5 < l_{12}+l_{23}=5+2=7$), entonces NO existe flujo factible inicial desde 1 hasta 3. Notar que si hubiera dado F* mayor o igual a la sumatoria, entonces no hubiera habido problema y hay que usar los pasos de la diapositiva 25 para calcular el flujo factible inicial (flujo inicial=$f^*_{ij}+l_{ij}$).

Problema 3

Parámetros:

NH = duración de la jornada de trabajo en horas.
PM_{mi} = Producción/hora de la máquina m para el producto genérico i.
PL_{lj} = Producción/hora de la línea l para el producto final j.
D_{jt} = Demanda del producto final j en día t.
I_i = Inventario inicial producto genérico i.
S_{ij} = 1 si el producto final j puede ser producido con el producto genérico i. 0 si no.
TCG = tiempo que toma hacer un cambio de producto genérico.
TCF = tiempo que toma hacer un cambio de producto final.
W = costo relativo de dejar demanda insatisfecha en comparación a tener inventario.

Variables de decisión (1 pto.):

G_{mit} = 1 si el producto genérico i se produce en la máquina m el día t. 0 si no.
GX_{mit} = Producción del producto genérico i en la máquina m el día t.
GI_{it} = Inventario del producto genérico i (en estanque i) al final del día t.
F_{ljt} = 1 si el producto final j se envasa en la línea l el día t. 0 si no.
FX_{ljt} = Producción del producto final j en la línea l el día t.
FI_{jt} = Inventario del producto final j al final del día t.
B_{jt} = Demanda no satisfecha del producto final j al final del día t.

Aunque no es necesario, también se puede definir la variable:
E_{jt} = Cantidad enviada a los clientes del producto final j, el día t.

Función Objetivo (1 pto.):

$$MinZ = \sum_{i,t} GI_{it} + \sum_{j,t} (FI_{jt} + W \cdot B_{jt})$$

Restricciones (4 ptos.):

1) Naturaleza de las variables:

$$G_{mit}, F_{ljt} \in \{0,1\}$$

$$GX_{mit}, GI_{it}, FX_{ljt}, FI_{jt}, B_{jt}, E_{jt} \in N^*$$

Con i=1,…,I; j=1,..,J; m=1,…,M; l=1,…,L; t=0,1,…,T

Obs: El periodo t=0 es ficticio, y solo se utiliza para considerar el inventario inicial.

2) Solo se puede producir un producto genérico por día en cada máquina:

$$\sum_i G_{mit} \le 1 \qquad \forall m \ \forall t \ge 1$$

3) Solo se puede embotellar un producto final por día en cada línea:

$$\sum_j F_{ljt} \le 1 \qquad \forall l \ \forall t \ge 1$$

4) Capacidad de producción de maquina m para producto genérico i el día t:

$$GX_{mit} \le NH \cdot PM_{mi} \cdot G_{mit} \qquad \forall m, i \ \forall t \ge 1$$

5) Capacidad de maquina m si se cambia de producto genérico:

$$GX_{mit} \le NH \cdot PM_{mi} - TCG \cdot PM_{mi} \cdot \left(G_{mit} - G_{mi(t-1)}\right) \ \forall m, i \ \forall t \ge 2$$

Obs: Hasta aquí el supuesto implícito es que el primer día no se paga el tiempo de cambio. Si se supone lo contrario se agrega:

$$GX_{mi1} \le NH \cdot PM_{mi} - TCG \cdot PM_{mi} \cdot G_{mi1}$$

6) Capacidad de envasado de la línea l para producto genérico k el día t:

$$FX_{ljt} \le NH \cdot PL_{lj} \cdot F_{ljt} \qquad \forall l, j \ \forall t \ge 1$$

7) Capacidad de línea l si se cambia de producto final:

$$FX_{ljt} \le NH \cdot PL_{lj} - TCF \cdot PL_{lj} \cdot \left(F_{ljt} - F_{lj(t-1)}\right) \qquad \forall l, j \ \forall t \ge 2$$

Obs: Análoga a 5)

8) Flujo de productos genéricos:

$$GI_{it} = GI_{i(t-1)} + \sum_m GX_{mit} - \sum_l \sum_j FX_{ljt} \cdot S_{ij} \qquad \forall i, t \ge 1$$

9) Flujo de productos finales:

$$FI_{j(t-1)} + \sum_{l} FX_{ljt} - B_{j(t-1)} = D_{jt} + FI_{jt} - B_{jt} \quad \forall j, t \geq 1$$

Equivalentemente, con la variable de envíos E_{jt} queda:

$$FI_{j(t-1)} + \sum_{l} FX_{ljt} = E_{jt} + FI_{jt} \qquad \forall j, t \geq 1$$

$$E_{jt} = D_{jt} + B_{j(t-1)} - B_{jt} \qquad \forall j, t \geq 1$$

10) Satisfacer la demanda en alguno de los periodos:

$$B_{jT} = 0 \qquad \forall j$$

11) Condiciones iniciales:

$$GI_{i0} = I_i \qquad \forall i$$

$$FI_{j0} = 0 \qquad \forall j$$

$$B_{j0} = 0 \qquad \forall j$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl