INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Andrés Abeliuk, Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 5
10 de Septiembre, 2009

Problema 1:

Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&\text{s.a.} \quad -2x_1 + 5x_2 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_1 + 4x_2 \leq 16 \\
&\qquad\quad 4x_1 - 3x_2 \leq 7 \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_2 \textit{irrestricta}
\end{aligned}
$$

a. Escriba el Problema en Forma Estándar
b. Grafique el problema. Identifique la región factible, los puntos que podría describir mediante una base, cuántos de estos puntos son factibles y el óptimo del problema. ¿Cuánto vale la Función Objetivo en el óptimo? ¿Qué restricción adicional agregaría al problema original para hacer el problema más sencillo sin cambiar la región factible?
c. ¿Qué particularidad tiene el origen? ¿Qué bases describen este punto? ¿Es alguna infactible? Compruébelo. ¿Tendría sentido que lo fuera? ¿Necesitaría realizar Fase I para resolver el problema? ¿Por qué no?
d. Aplique Simplex partiendo desde el óptimo encontrado en la parte b.

Nota: Para las partes b), c), d) describa o interprete lo que va realizando en forma gráfica.

Problema 2:

Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&\max - x_1 - x_2 - 10x_3 \\
&\text{s.a.} \quad x_2 + 4x_3 = 2 \\
&\qquad\quad -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Encuentre una base inicial factible usando fase 1 de simplex.

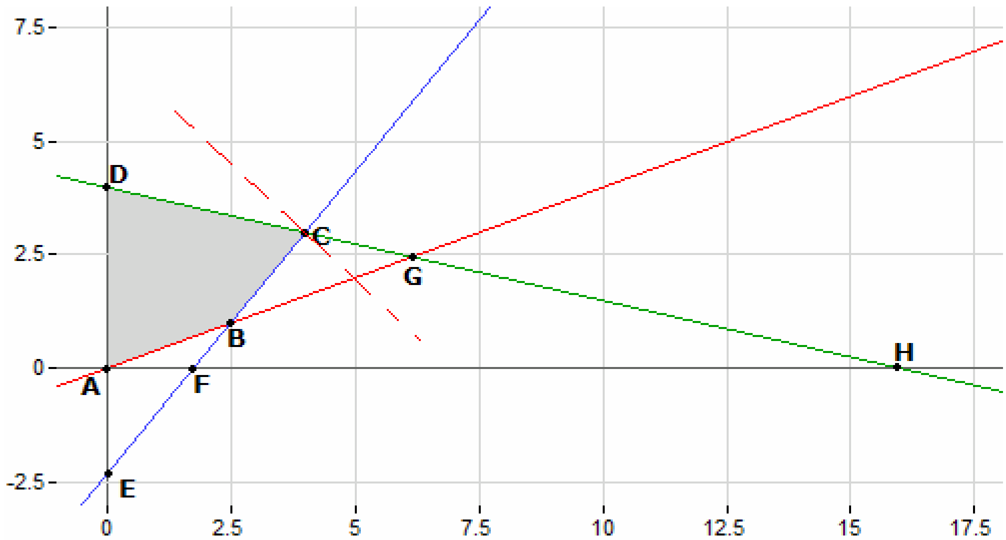
Solución

Problema 1:

a. La forma estándar del problema es:

$$\begin{aligned}
&\min -x_1 - x'_2 + x''_2 \\
&\text{s.a.} \quad -2x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 - x_3 = 0 \\
&\qquad x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + x_4 = 16 \\
&\qquad 4x_1 - 3x'_2 + 3x''_2 + x_5 = 7 \\
&\qquad x_2 = x_2' - x_2'' \\
&\qquad x_1, x_3, x_4, x_5, x_2', x_2'' \geq 0
\end{aligned}$$

b. Gráficamente:



- Los puntos que se podrían plantear con una base son: A, B, C, D, E, G, que corresponden a la intersección de todas las restricciones del problema. Son en total 6 bases. **OJO**: Los puntos F y H no se pueden representar con una base, ya que en este problema x_2 es irrestricto, es decir, en esos puntos solo pasa una restricción como vimos en la clase. El eje esta dibujado como referencia, pero en este problema no funciona como restricción como en problemas habituales donde $x_2 \geq 0$.

- De estos 6 puntos, 4 son factibles (A, B, C, D). Por lo tanto, existen 4 bases factibles.

- El óptimo está en el punto C, donde $X_1=4$, $X_2=3$, con lo que Z=7.

- A este problema, se puede agregar la restricción $X_2 \geq 0$. Esta restricción no cambia la región factible del problema, y facilita el uso de simplex 'habitual'.

c. Suponiendo que agregamos la restricción $x2 \geq 0$, entonces el origen es un punto **degenerado**. Esto se puede argumentar de 2 formas:

- Se ve claramente en el gráfico, ya que el (0,0) está formado por la intersección de los 2 ejes y una restricción.

- Como en el punto existe una variable básica igual a cero, entonces es degenerado.

Nota de corrección: Ambas son correctas, aunque TIENEN que nombrar por lo menos la primera, ya que se pide expresamente la interpretación gráfica. Si ponen solo la segunda, descontar puntaje.

Este punto está descrito por 3 bases, que se muestran a continuación:

1. $X_N=(X_1,X_2)$; $X_B=(X_3,X_4,X_5)$ // B={3,4,5}
2. $X_N=(X_1,X_3)$; $X_B=(X_2,X_4,X_5)$ // B={2,4,5}
3. $X_N=(X_2,X_3)$; $X_B=(X_1,X_4,X_5)$ // B={1,4,5}

Estas 3 bases son factibles. No tendría sentido que no lo fueran, ya que se ve gráficamente que están en la región factible.

Verifiquémoslo (en el mismo orden):

1. $A_B^{-1}*b= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$ => Es factible
2. $A_B^{-1}*b= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$ => Es factible
3. $A_B^{-1}*b= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$ => Es factible

Nota: ¿Por qué $\bar{b} = A_B^{-1} * b \geq 0$ implica que la solución básica es factible? Simplemente porque si ALGUNO de sus términos fuera negativo, implicaría que una variable básica es NEGATIVA, lo que se contradice con la definición de las variables en la forma estándar (todas positivas). Recuerden que $X_B = \bar{b}$ siempre en simplex! (miren el desarrollo de simples que hicimos en la auxiliar y verán que esto último es cierto, considerando $X_N=0$).

No es necesario usar fase 1, ya que el origen es un punto factible, como ya se ha demostrado.

d. *Si agregaron $X_2 \geq 0$*

En el óptimo, las variables básicas son $X_b=(X_1,X_2,X_3)$ y las no básicas $X_N=(X_4,X_5)$.

Calculamos:

$$A_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 3/19 & 4/19 \\ 4/19 & -1/19 \\ 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = \begin{pmatrix} 7/19 & 3/19 \end{pmatrix} \geq 0$$

- *Ojo que en la clase me equivoqué en esta parte, por lo que si anotaron los números verán que son distintos.*
- Recuerden que C_N y C_B son los coeficientes que acompañan a las variables en la función objetivo EN LA FORMA ESTÁNDAR.

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es *$X_1=4$, $X_2=3$, $X_3=7$, $X_4=X_5=0$* y con esto *$Z=7$.*

- Esto sale de recordar que $X_B = \bar{b}$ en cada iteración de simples, entonces:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Si no agregaron la restricción, tienen la forma estándar de la parte a:

En el óptimo, las variables básicas son: $x_b=(x_1, x_2', x_3)$ y las no básicas son $X_r=(x_2'', x_4, x_5)$.

Calculamos:

$$A_B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ 0 & 4/19 & -1/19 \\ -1 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 3/19 & 4/19 \\ -1 & 4/19 & -1/19 \\ 0 & 14/19 & -13/19 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (1 \quad 0 \quad 0) - (-1 \quad -1 \quad 0) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (0, 7/19 \quad 3/19) \geq 0$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es $X_1=4$, $X'_2=3$, $X_3=7$, $x'_2=X_4=X_5=0$ y con esto $Z=7$.

La interpretación gráfica va por el lado de señalar que, como estábamos comenzando desde el óptimo, es claro que simplex encontrará la solución en una sola iteración.

Problema 2:

Lo primero que se debe hacer es escribir el problema en forma estándar. Notemos que, para efectos de este problema, no es necesario agregar variables de holgura, pues las restricciones están con igualdad.

$$\begin{aligned}
&\min x_1 + x_2 + 10x_3 \\
&\text{s.a.} \quad x_2 + 4x_3 = 2 \\
&\qquad\; -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\
&\qquad\; x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Se puede ver que el origen no es una solución básica factible (basta reemplazar (0,0,0) en las restricciones), por lo que **debemos hacer fase 1 para encontrar una base factible inicial** (¡esto se hace siempre que el origen NO sea solución básica factible!), que es justamente los que nos piden en el enunciado.

Escribimos entonces el problema en fase 1[1], agregando variables artificiales:

$$\begin{aligned}
&\min y_4 + y_5 \\
&\text{s.a.} \quad x_2 + 4x_3 + y_4 = 2 \\
&\qquad\; -2x_1 + x_2 - 6x_3 + y_5 = 2 \\
&\qquad\; x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

El problema de fase 1 lo único que hace es agregar variables artificiales a las restricciones (manteniendo las variables de holgura si las hubiera, en este caso no hay). La gracia está en que, si agregamos una variable a cada restricción, podemos usar la identidad como base factible inicial. Fíjense que, además, cambia la función objetivo. Tenemos que minimizar la suma de todas las variables que agregamos. La idea es que, usando simplex, resolvamos este problema y si TODAS las variables artificiales en el óptimo dan cero, obtenemos una base inicial factible para el problema original (es necesario que TODAS las variables artificiales sean cero, pues

[1] Ver diapo 13 de las clases de cátedra, apunte de simplex.

así es como “no haber agregado nada”). Por eso, exigiremos que la función objetivo del problema de fase 1 sea cero, sino alguna de las variables no es cero y el problema original está mal construido/es infactible.

Notar que se puede hacer fase 1 de forma un poco más inteligente. Podríamos haber agregado sólo una variable artificial a la segunda restricción (Y_5), y podríamos tener de todas formas la identidad si usamos las columnas asociadas a X_2 e Y_5. Eso también es válido (y de hecho más fácil) para calcular fase 1.

Partiendo del origen del nuevo problema, calculamos:

B={4,5}
N={1,2,3}

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Hay un costo reducido negativo, por lo que entra a la base su variable asociada (X_2).

Usamos el criterio de salida para ver que variable sale de la base:

$$\min_{a_{is}>0} \left\{ \frac{\overline{b}}{a_{is}} \right\} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{1} \right\}$$

Nota: ¿Por qué es este el criterio de salida? (esta explicación no es tan rigurosa y NO reemplaza lo visto en cátedra, pero les ayudará a visualizar el concepto).

Recordemos el problema que optimiza simplex según lo que les mostré en la auxiliar:

$$\begin{aligned} &\min\{C_B \overline{b} + (C_N - C_B \overline{A_N}) X_N\} \\ &s.a. \ X_B = \overline{b} - \overline{A_N} X_N \\ &\qquad X_B, X_N \geq 0 \end{aligned}$$

Anteriormente decidimos que una variable no básica va a entrar a la base. Esto implica que todas las variables en X_N valdrán cero (por definición), excepto aquella que va a entrar a la base. En tal caso, los términos que sobreviven en las restricciones son aquellos asociados a la columna de $\overline{A_N}$ asociada a la variable que entra. Para ver esto basta con hacer la multiplicación $\overline{A_N} X_N$ considerando todas las X_N cero, excepto aquella que va a entrar a la base. Así, nos queda (siendo S la variable que entra):

$$X_B = \overline{b} - \overline{A_N} X_N$$
$$X_B = \overline{b} - \overline{A_S} X_S$$

y separándolo en m restricciones:

$$X_{1B} = \overline{b_1} - \overline{a_{1S}} X_S$$
$$\ldots$$
$$X_{mB} = \overline{b_m} - \overline{a_{mS}} X_S$$

La pregunta del millón: ¿qué variable X_{iB} es la que PRIMERO se hace cero cuando X_S crece? (recuerden que nos estamos moviendo a un vértice adyacente). Fíjense que X_{iB} vale cero cuando $X_S = \overline{b}_i / \overline{a_{is}}$. Por lo tanto, la primera variable que se hace cero es la que corresponde al mínimo de los $\overline{b}_i / \overline{a_{is}}$, que corresponde al criterio de salida mostrado anteriormente (es decir, X_S va creciendo y cuando llega a cierto valor, algún X_{iB} se hace cero, eso es lo que buscamos... el primero que se hace cero, pues así garantizamos que es un vértice adyacente).

Como ambos valores son iguales, podemos elegir qué variable entra. Elegimos arbitrariamente la variable Y_4

Iteramos con la nueva base

Calculamos:

B={2,5}
N={1,4,3}

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (0 \quad 1 \quad 0) - (0 \quad 1) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (2 \quad 2 \quad 10) \geq 0$$

Como todos los costos reducidos son positivos, encontramos el óptimo.
Las variables básicas son $X_2=2, Y_5=0$ y las no básicas $X_1=X_3=Y_4=0$.
Fase 1 debe cumplir que su función objetivo al encontrar una base sea cero. En este caso se cumple, por lo que el problema original está bien definido. Notar que hay una variable artificial en la base encontrada, por lo que será necesario agregar esta variable al problema original, usar la base y resolver fase 2.

En otras palabras, el problema de fase 2 queda:

$$\begin{aligned}
&\min x_1 + x_2 + 10x_3 + My_5 \\
&\text{s.a.} \quad x_2 + 4x_3 = 2 \\
&\qquad -2x_1 + x_2 - 6x_3 + y_5 = 2 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, y_5 \geq 0
\end{aligned}$$

y se resuelve usando fase 2 de simplex, es decir, hacemos simplex partiendo de la base encontrada en fase 1, B={2,5}. Notar que si NO hubiera quedado una variable artificial en la base no hubiera sido necesario agregarla en el problema de fase 2. Además, esta variable se agrega con el coeficiente M="infinito" en la función objetivo, para que tenga un costo muy alto y sólo salga de la base, nunca entre. En realidad no es infinito, sólo imaginen que es un valor muy grande.

Sólo plantearemos la primera iteración de fase 2, queda propuesto resolverlo:

Calculamos:
B={2,5}
N={1,3} // Ya no existe la variable Y_4

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_N} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = (1 \quad 10) - (1 \quad M) * \overline{A_N}$$

$$\overline{Cr} = (1 - 4M, 10 + 2 + 10M) \geq 0$$

Recordar que M es muy grande (positivo). El único costo reducido negativo es entonces el asociado a la variable X_1. La variable X_1 entra de la base.

Para ver que variable sale, calculamos:

$$\min_{a_{is}>0}\left\{\frac{\bar{b}}{a_{is}}\right\}=\left\{\frac{0}{4}\right\}$$

Sale la variable Y_5. Ojo que no pusimos el término asociado a la variable X_2 pues este era 2/0 y está explícito que $a_{is}>0$, lo que para esa variable no se cumple.

Iteramos, la nueva base es:

B={2,1}
N={5,3}

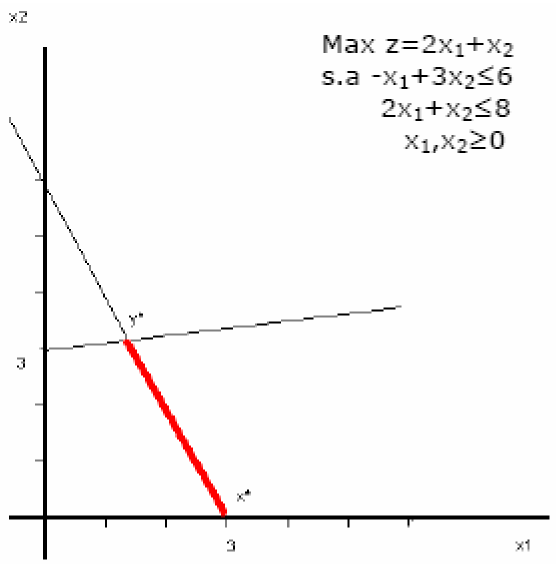
y volvemos a hacer un paso de simplex, esto hasta que todos los costos reducidos sean positivos (¡háganlo! :).

FIN Problema 2.

Bonus track Auxiliar 5:

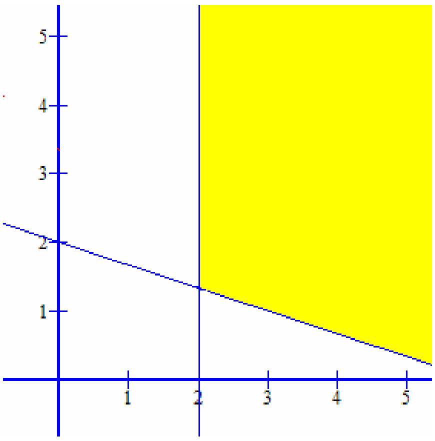
A continuación se muestran algunos casos particulares con los que se puede encontrar simplex y cómo el algoritmo los detecta:

Ejemplo 1: Infinitos óptimos: Esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (Son paralelas).



En este caso todos los puntos en el tramo rojo son soluciones óptimas que entregan el mismo valor para la función objetivo. Usando simplex pueden darse cuenta de esto si, al encontrar el óptimo, uno de los costos reducidos es IGUAL a cero (cualquiera). La intuición nos dice que si en el óptimo un costo reducido es cero, es como si pudieramos meter la variable asociada a la base sin perjudicar ni beneficiar a la función objetivo, por lo tanto podemos saltar a otro vértice y mantener la fn objetivo en el mismo valor. Si puedo saltar a otro vértice, entonces todo el tramo recorrido (linea roja) son soluciones óptimas, dadas las características del poliedro (convexo) y función objetivo (convexa).

Ejemplo 2: Espacio no acotado, solución infinita:



Max x_1+x_2
s.a $x_1 >= 2$
$x_1+3x_2 >= 6$

Como estamos maximizando, podríamos llegar hasta el infinito. Simplex se da cuenta de esto cuando salta de un vértice al siguiente y éste último está en el "infinito" (i.e. no encuentra el siguiente vertice). Lo que ocurrirá será que no habrá problemas para decidir que variable entra a la base, pero no encontraremos ninguna variable que salga de la base cumpliendo las condiciones requeridas, i.e. todos los $\overline{a_{is}}$ serán menores que cero. Si encontramos esta situación con simplex podemos concluir que el problema es no acotado.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl