

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 3
27 de Agosto de 2009

Problema 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y sea c alguna constante. Pruebe que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ es convexo.

Problema 2

Considere el poliedro generado por el siguiente conjunto de restricciones del tipo $\{a^i x_i \leq b_i : i \in I\}$:

$$x_1 + x_2 \leq 3; \quad x_1 \leq 2; \quad x_1 - x_2 \leq 1; \quad x_2 \leq 2; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

- Grafique el poliedro
- Encuentre todas las soluciones básicas. ¿Cuáles de ellas son soluciones básicas factibles?
- Encuentre las restricciones activas en los puntos (1,2) y (2,1). ¿Son los vectores $\{a^i : i \in I^*\}$ linealmente independientes?
- Escriba el poliedro en forma estándar
- Considere el punto (0,2). Encuentre el valor de las variables de holgura en ese punto y determine la base asociada, es decir, los vectores $\{A_i : i \in B\}$ con $\|B\| = m$ que son l.i.

Problema 3

Considere el poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax = b\}$. Suponga que la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es de rango completo. Para cada una de las siguientes afirmaciones, establezca si es verdadera o falsa. Si es verdadera, demuestre, si es falsa, dé un contra-ejemplo.

- Si $n = m + 1$, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.
- El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.
- Toda solución óptima posee a lo más m componentes no-cero.
- Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.
- Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.

Problema 4

Suponga que $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : g_i^T x \geq h_i, i = 1, \dots, k\}$, son dos representaciones del mismo poliedro no vacío P . Demuestre que si $\langle \{a_i\}_{i=1}^m \rangle = \mathbb{R}^n$, entonces $\langle \{g_i\}_{i=1}^k \rangle = \mathbb{R}^n$.

Problema 5

El exitoso director técnico nacional, Miguel Tenderini, ha sido contratado por el prestigioso equipo de hándbol Real Mandril, el cual cuenta con un conjunto N de jugadores, todos estelares. Se le ha encomendado la misión de escoger las contrataciones para la próxima temporada de entre un conjunto M de posibles jugadores, cada uno de los cuales tiene un precio p_i con $i \in \{N+1, \dots, M\}$, y para ello se le ha otorgado un presupuesto de PPTO euros.

La temporada se compone de J partidos, en cada uno de los cuales, Tenderini debe decidir el conjunto jugadores que participará de él, tanto como titular o como suplente, suponga que debe haber T titulares y B suplentes por partido. Se sabe que g_{ij}^k es la cantidad de goles que anotará el jugador i en el partido j si entra como k (con $k \in \{\text{Titular}, \text{Suplente}\}$). Suponga que todos los suplentes entran al partido en algún momento.

Tenderini recibirá un bono al final de la temporada según la cantidad total de goles anotados, consistente en s_1 [euros/gol] si este total queda en el intervalo $[0, G]$ y s_2 [euros/gol] por cada gol adicional a G , menos un porcentaje α del monto gastado en nuevos jugadores, es decir, su bono será

$$\text{Bono} = \begin{cases} s_1 g - \alpha \sum_{i \in M} p_i x_i & \text{si } g \leq G \\ s_1 G + s_2 (g - G) - \alpha \sum_{i \in M} p_i x_i & \text{si } g > G \end{cases} \quad \text{con } s_1 > s_2.$$

Suponga que ya se contrató al famosísimo jugador Kakú $\in M$, y que se le prometió que sería titular en al menos el 75% de los partidos. Además, se sabe que si a mitad de temporada, (partido $J/2$) se han hecho menos de $\bar{G}$ goles, Tenderini será despedido. Por último, cada jugador tiene una resistencia física que le permite jugar a lo más t_i partidos como titular y b_i partidos como suplente.

Plantee un modelo de programación lineal que le permita a Miguel Tenderini maximizar el monto del bono que recibirá al final de la temporada.

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Pauta Auxiliar 3
27 de Agosto de 2009

Problema 1

Sean x, y en $S = \{x \in R^n : f(x) \leq c\}$ y $\lambda \in [0,1]$.

Debemos probar que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$

$$f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \text{ ya que } f \text{ es una funci3n convexa}$$

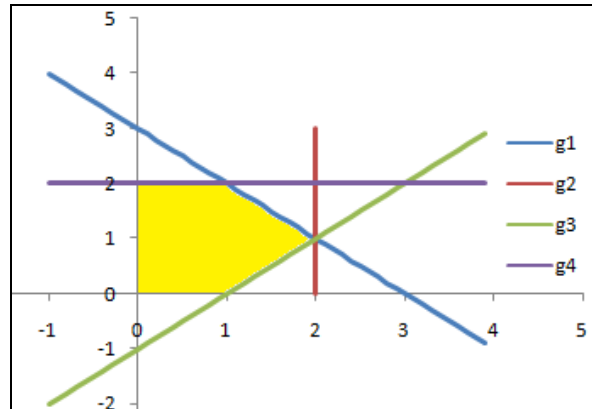
$$\leq \lambda c + (1-\lambda)c, \text{ ya que } x, y \text{ pertenecen a } S$$

$$= c$$

Por lo tanto $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$, luego S es un conjunto convexo.

Problema 2

a)



b) Soluciones b3sicas: $(0,0), (0,-1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,2)$.

Soluciones b3sicas factibles: $(0,0), (0,2), (1,0), (1,2), (2,1)$

c) Punto $(1,2)$: $g1, g4$

$$g1: (1,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 3, \quad g4: (0,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

Los vectores $(1,1)$ y $(0,1)$ son l.i.

Punto $(2,1)$: $g1, g2, g3$

$$g1: (1,1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 3, \quad g2: (1,0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2, \quad g3: (1,-1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 1$$

Los vectores $(1,1), (1,0)$ y $(1,-1)$ no son l.i.

d) Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_6 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{o bien:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) Punto (0,2)

Variables:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escojamos como base las variables no nulas en ese punto:

$$B = \{2, 3, 4, 5\}, \|B\| = 4 \text{ (4 es el número de restricciones)}$$

Los vectores de la matriz A asociados son l.i.:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3

1. Si $n = m + 1$, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.

Verdadero: Como P está en forma estándar, tiene al menos un punto extremo v_0 . Si no existen más puntos extremos, el resultado se tiene y no hay nada más que demostrar. Sea v_i otro punto extremo. Definamos $d_i = v_0 - v_i$, d_i satisface $Ad_i = 0$, pero la dimensión de $\{d : Ad = 0\} = n - m = 1$, por lo que existe $d_0 \neq 0$ tal que $d_i = \alpha_i d_0$ para cualquier d_i .

Sea $\alpha_\infty = \max\{\alpha_i : v_i \text{ es punto extremo}\}$, y sea v_∞ donde se alcanza el máximo. Entonces si $\alpha_i < \alpha_\infty$, tenemos que v_i no es punto extremo por ser combinación convexa de v_0 y v_∞ . Esto implica que $\alpha_i = \alpha_\infty \forall i$, por lo que $|\{v_i : v_i \text{ es punto extremo}\}| = 2$.

2. El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.

Falso: Basta considerar $P := \{x \in R_+^n\}$ y minimizar $z = -e_i$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico. En este caso el conjunto óptimo son los $\{x \in R_+^n : x_i = 0\}$, que es no-acotado.

3. Toda solución óptima posee a lo más m componentes no-cero.

Falso: Basta considerar:

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es óptimo y posee más de una componente no cero.

4. Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.

Verdadero: Si hay más de una solución óptima, entonces hay dos: x_1, x_2 y por convexidad todas las combinaciones convexas de ellas, es decir $\{x : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in [0, 1]\}$, entonces $|\{x : x \text{ es } \textit{optimo}\}| \geq |\{\lambda : \lambda \in [0, 1]\}|$.

5. Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.

Falso: considere $P := \{x \in R_+^n\}$ y minimizar $z = -e_i$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico. P posee sólo un punto extremo, y el conjunto de soluciones óptimas tiene más de dos puntos.

Problema 4

Como $P = \{x \in R^n : a_i x \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ es no vacío y $\langle \{a_i\}_{i=1}^m \rangle = R^n$, entonces P tiene un vértice.

Como $P = \{x \in R^n : g_i x \geq h_i, i = 1, \dots, k\}$, y P tiene un vértice, necesariamente el conjunto de restricciones que lo define contiene un conjunto l.i. de tamaño n, por lo que $\langle \{g_i\}_{i=1}^k \rangle = R^n$.

Problema 5

Propuesto

Dudas y/o Comentarios a:
edevia7@hotmail.com