INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Fernanda Bravo, Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Andrés Abeliuk, Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 1
10 de Agosto, 2009

Problema 1

El nuevo programa de postgrado MPA de una prestigiosa universidad ha recibido n postulaciones excelentes para su primera generación y por capacidad no puede aceptar todas. Tiene el problema de seleccionar las hasta m postulaciones más adecuadas para el programa ($m<n$).

Como es de carácter público no puede solamente seleccionar para maximizar el beneficio económico del programa. Cada generación tiene que cumplir además con los siguientes criterios.

Por lo menos 40% de los aceptados tienen que pertenecer a cada sexo. El parámetro S_i indica el sexo del postulante i (i=1, …, n). $S_i = 1$ significa femenino y $S_i = 0$ significa masculino.

El programa busca tener impacto en regiones por lo que por lo menos 50% de los aceptados de cada generación deben venir de regiones. El parámetro R_i indica la proveniencia del postulante i (i=1, …, n). $R_i = 1$ significa regiones y $R_i = 0$ significa RM.

Es importante lograr alta exigencia académica por lo que el programa quiere aceptar alumnos que en promedio tengan un puntaje de por lo menos Pmin. P_i es el puntaje del postulante i (i=1, …, n).

El ingreso generado por cada generación debe superar en por lo menos 20% los costos asociados C (UM).

En un principio cada alumno aceptado tiene que pagar un arancel de A UM.

El programa ofrece hasta B becas para alumnos excelentes ($B < n$). Los criterios para otorgar estas becas son los siguientes.

Un postulante i con un puntaje P_i mayor que 750 paga sólo 50% del arancel si viene de la RM y paga sólo 25% del arancel si viene de regiones.

El objetivo es maximizar el ingreso generado por cada generación aceptada.

1. Plantee un modelo de Programación Lineal para resolver este problema.
2. ¿Son todas las restricciones mencionadas necesarias? Comente.
3. ¿Se está favoreciendo a alguien con la formulación actual?

Problema 2

La peligrosa maleante Carmen SanDego, está suelta en la ciudad ScolandYierd. La agencia Máxima S.A. ha mandado a su famosa detective Pulschuper para que la capture.
Se sabe que Carmen está escondida en la estación E de las P estaciones de la ciudad. Pero para tener suficientes motivos para capturarla, Pulschuper debe encontrar exactamente D pistas. Hay una pista por estación y no hay pistas ni en la estación E ni en la estación 1, donde se encuentra la agencia Máxima S.A..

En cada estación i, Pulschuper tiene la opción de buscar o no la pista: si la decide buscar demora h_i en encontrarla.
Pulschuper se demora un tiempo b_{ij} entre la estación i y la estación j si se va en bus, aunque puede optar tomar un taxi con el que se demora t_{ij} ($t_{ij} < b_{ij}$) o un metro, el que demora m_{ij} ($m_{ij} < t_{ij}$). Sin embargo, sólo cuenta con un determinado número de pasajes en taxi T y en metro M (M+T << P). Además, sólo se pueden tomar metros entre estaciones congruentes (una estación se dice NO-congruente con otra si ambas son impares) .

Considere que las estaciones están numeradas, pero no es necesario recorrerlas en orden, ni visitar todas las estaciones. Considere que no se puede volver a una estación que ya fue visitada y que no se puede ingresar a E con menos de D pistas.

Sabiendo que Pulschuper tiene que volver directamente a la agencia cuando encuentre la maleante (es decir debe viajar desde E a 1), plantee un PPLE (Problema de Programación Lineal Entera) que le permita a Pulschuper encontrar a Carmen SanDego en el menor tiempo posible.

Solución:

Problema 1:

1. Variables de decisión:

$$Xi = \begin{cases} 1 & \text{Si se acepta al alumno i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Yi = \begin{cases} 1 & \text{Si alumno i recibe beca} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Nota: si el alumno pone una variable 1 si tienen mas de 750 pts y cero sino, sólo tendrá el puntaje en la restricción de asignar las becas (h) si relaciona dicha variable con el puntaje mediante una restricción y dicha restricción está bien planteada.

Restricciones:

a. Relación entre variables:

$$Yi \leq Xi$$

b. Se aceptan a lo más m postulantes:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi \leq m$$

c. Al menos 40% de los aceptados deben ser de cada sexo:

$$0{,}4 * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Si \leq 0{,}6 * \sum_{i=1}^{n} Xi$$

d. 50% de los aceptados deben venir de regiones:

$$0{,}5 * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Ri$$

e. Puntaje promedio de los alumnos debe ser al menos Pmin:

$$P_{\min} * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Pi$$

f. Ingreso generado debe superar en al menos 20% los costos:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A \geq 1{,}2 * C$$

g. Máximo B becas:

$$\sum_{i=1}^{n} Yi \leq B$$

h. Criterio para otorgar becas:

$$(Xi - Yi) * Pi \leq 750$$

Explicación: Si el puntaje de un postulante i es Pi mayor que 750 (por ejemplo 800), esto obliga a que (Xi – Yi)=0 para que se cumpla la restricción, con lo cual Xi=Yi=0 ó Xi=Yi=1 (El caso Xi=0 e Yi=1 también es factible, ya que -800<750 cumple la restricción, pero éste se descarta por la restricción "a"), con lo que obligatoriamente debemos darle beca al postulante i si lo aceptamos.

En caso de que un Pi sea menor que 750 (por ejemplo 700), el término (Xi – Yi) puede valer tanto 0 como 1 para que se cumpla la restricción, con lo que se podría llegar a pensar que le estamos dando beca a los alumnos con puntaje inferior a 750 (caso Xi=Yi=1). Sin embargo hay que notar que al resolver el PPL, al estar maximizando el ingreso, el programa que lo resuelve tratará de asignar la menor cantidad de becas posibles, pues éstas reducen el ingreso. Si el programa tiene la opción de decidir entre darle beca a un individuo con puntaje inferior a 750 o no, decidirá no hacerlo pues esto le genera mayor ingreso. Por esta razón, no hay problema en que la restricción permita darle beca con un puntaje menor a 750 ya que, gracias a la función objetivo, esto no ocurrirá.

i. Naturaleza de las variables:

$$Xi, Yi \in \{0,1\}$$

Función objetivo: (1 pto)

$$\max\{ \sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A$$

2. Se puede eliminar la restricción i: ingreso > 1,2 * costos, pues al maximizar el ingreso podemos ver si se da o no esta restricción.
También se puede eliminar la restricción a: relación entre variables, pues dar becas disminuye la función objetivo, lo que hace que no tenga sentido asignar becas a postulantes que no hayan sido aceptados.

3. Nota: Lo que sigue tiene puntaje binario, es decir, todo o nada. El alumno puede tener máximo 1 punto, aún si contesta ambas alternativas planteadas.

Alternativa 1 (1 pto): Al maximizar el ingreso se favorece a los postulantes de menor puntaje, ya que se intentará dar la menor cantidad de becas posibles.
Fijense que el solver quiere dar la menor cantidad de becas posibles, ya que las becas disminuyen la utilidad en la función objetivo. Entonces, al resolver el problema asignará primero a las personas más cercanas al puntaje Pmin (de forma que en promedio el puntaje sea casi igual o igual a Pmin). Así, asignará una persona con puntaje sobre Pmin y luego suficientes personas con puntaje bajo Pmin para que se mantenga el promedio en Pmin. Luego se repite el proceso varias veces (asignar una persona con puntaje mayor a Pmin y suficientes personas con puntaje menor a Pmin para mantenerse cercano al puntaje Pmin, respetando la restricción "e"). Bajo este esquema podría incluso llegar a ocupar todos los cupos sin asignar ninguna beca, respetando todas las restricciones.

Alternativa 2 (0,5 pts): La restricción “h” obliga a que un alumno con más de 750 y que ha sido aceptado tenga beca. Por lo tanto, si se nos acaban las B becas, los alumnos restantes con más de 750 puntos no serán aceptados en la universidad. No se les da la posibilidad de pagar el arancel completo, simplemente se rechazan.

Problema 2:

Variables: **(0,75)**

$$X_{ij}\begin{cases}1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,2)**

$$Y_{ij}\begin{cases}1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en bus.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,1)**

$$Z_{ij}\begin{cases}1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en taxi.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,1)**

$$R_{ij}\begin{cases}1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en metro.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,1)**

$$d_i\begin{cases}1 & \text{Si busca la pista en la estación i.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,25)**

O bien

$$X_{ijk}\begin{cases}1 & \text{Si va desde la estación i a la estación j en el medio k.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,5)**

$$d_i\begin{cases}1 & \text{Si busca la pista en la estación i.}\\ 0 & \text{Si no}\end{cases}$$ **(0,25)**

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{P} X_{ij} \le 1 \qquad \forall i = 2,\ldots,P \quad \text{o} \quad \sum_{j=1}^{P}\sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \le 1 \qquad \forall i = 2,\ldots,P$$

\# Se sale a lo más una vez de cada estación

$$\sum_{i=1}^{P} X_{ij} \le 1 \qquad \forall j = 2,\ldots,P \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \le 1 \qquad \forall i = 2,\ldots,P$$

\# Se entra a lo más una vez de cada estación

 # En las dos restricciones anteriores es de extrema importancias el ≤, ya que no es necesario recorrer todas las estaciones. Si lo ponen con igualdad está MALO.

$X_{E1} = 1$ o $\sum_{k=1}^{3} X_{E1k} = 1$

De la estación E se va directamente a la 1

$X_{ij} = 0 \quad \forall i = j$ o $\sum_{k=1}^{3} X_{ijk} = 0 \quad \forall i = j$

Esta restricción puede reemplazarse especificando en las demás restricciones que las sumatorias son para i≠j

$Y_{ij} + Z_{ij} + R_{ij} = X_{ij} \quad \forall i, j$ o $\sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \leq 1 \quad \forall i, j$

Solamente se utiliza uno de los tres medios de viaje, si es que se viaja

Notar que si usaron la variable Xijk, la restricción de usar uno de los 3 medios realmente NO es necesaria (pues las restricciones 1 y 2 se hacen cargo de esto al sumar sobre k). Sí es necesaria si se usaron las variables Yij, Zij y Rij.

$\sum_{i,j}^{P} Z_{ij} \leq T$ o $\sum_{i,j}^{P} X_{ij2} \leq T$

No pueden usarse más de T taxis

$\sum_{i,j}^{P} R_{ij} \leq M$ o $\sum_{i,j}^{P} X_{ij3} \leq M$

No pueden usarse más de M metros

$\sum_{i}^{P} d_i = D$ $\sum_{i}^{P} d_i = D$

Deben tenerse D pistas. Esta restricción podría se mayor o igual a D, ya que el óptimo entregará la igualdad

$\sum_{i}^{P} X_{ij} = \sum_{i}^{P} X_{ji} \quad \forall j$ o $\sum_{i}^{P} X_{ijk} = \sum_{i}^{P} X_{jik} \quad \forall j, k$

Conservación de flujo: Si se va a una estación j, se debe salir de dicha estación (para "cerrar" el ciclo). Esta restricción es necesaria debido a las modificaciones del problema del vendedor viajero. En la versión de la derecha se puede sumar

también sobre k, es lo mismo (no es necesario ya que las restricciones 1 y 2 se hacen cargo de esto).

$$d_1 = d_E = 0 \qquad\qquad d_1 = d_E = 0$$

No se buscan pistas ni en 1 ni en E, ya que no hay **(0,2)**.

$$d_i \leq \sum_{j}^{P} X_{ij} \qquad \forall i \qquad \text{o} \qquad d_i \leq \sum_{j}^{P} \sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \qquad \forall i$$

No se pueden buscar pistas en estaciones que no se visitaron **(0,3)**.

$$\sum_{\substack{i \in S, j \in S \\ \{E\} \notin S}} X_{ij} \leq card(S) - 1 \qquad \text{o} \qquad \sum_{\substack{i \in S, j \in S \\ \{E\} \notin S}} \sum_{k=1}^{3} X_{ijk} \leq card(S) - 1$$

con S todos los subconjuntos de la P estaciones. $2 \leq |S| \leq P-2$

No se pueden formar subciclos entre las estaciones. **Ojo que si se forman subciclos con la estación E (de hecho el óptimo es un subciclo) por lo que es de suma importancia que lo excluyan, sino lo hacen poner la mitad del puntaje (0,5)**.

$$R_{2i-1,2j-1} = 0 \qquad \forall i,j = 1,\ldots,P/2 \quad \text{o}$$

$$X_{2i-1,2j-1,3} = 0 \qquad \forall i,j = 1,\ldots,P/2$$

No se pueden tomar metros entre estaciones NO-congruentes. **(0,5)**.

 # Los $\forall$ son muy importantes, descontar 0,1 en cada restricción que no se especifiquen.

Función Objetivo: **(0,75)**

$$\min z = \sum_{i,j}^{P} Y_{ij} \cdot b_{ij} + \sum_{i,j}^{P} Z_{ij} \cdot t_{ij} + \sum_{i,j}^{P} R_{ij} \cdot m_{ij} + \sum_{i}^{P} d_i \cdot h_i \qquad \text{o}$$

$$\min z = \sum_{i,j}^{P} X_{ij1} \cdot b_{ij} + \sum_{i,j}^{P} X_{ij2} \cdot t_{ij} + \sum_{i,j}^{P} X_{ij3} \cdot m_{ij} + \sum_{i}^{P} d_i \cdot h_i$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl