Formulando con modelos lineales enteros

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN3701, Optimización

28 de julio de 2009

Contenidos

Problema de optimización lineal entero (MILP)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & cx + hy && \text{(1a)} \\ s.t. \quad & Ax + Gy \leq b && \text{(1b)} \\ & x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{R}^p && \text{(1c)} \end{aligned}$$

- x, y son las variables de decisión del problema.
- (1) se dice mixto por que tiene variables enteras y continuas.
- (1a) es la función objetivo (lineal en las variables).
- (1b) son las restricciones del dominio (lineales en las variables).
- (1c) el dominio general de las variables ($\mathbb{R}^n$ y/o $\mathbb{Z}^n$).
- Los $S := \{x, y\}$ que satisfacen (1b) y (1c) es el conjunto factible.
- Si este conjunto es vacío, el problema se dice infactible.
- Una instancia de (1) se especifica por los datos (c, h, A, G, b).
- Un $(x_o, y_o) \in S$ es un punto factible.
- $(x_o, y_o) \in S$ es óptimo si $cx_o + hy_o \geq cx + hy \quad \forall (x, y) \in S$.
- (1) es equivalente a un problema de minimización, ¿por que?

Algunas observaciones:

- Restricciones de igualdad, menor o igual, y mayor o igual, calzan la forma general de (1). ¿Como?
- Una instancia factible de (1) puede no tener solución óptima, ¿por que?
- En este caso la instancia se dice no acotada.
- Resolver una instancia de (1) es determinar si ésta es:
  - Infactible.
  - No acotada.
  - Óptima.
- En algunos casos (1c) se escribe como $x \in \{0,1\}^n, y \in \mathbb{R}^p$, en estos casos (1) se dice binario (binary-MILP).

Modelos lineales continuos:

- Modelaremos las siguientes situaciones usando tres variables positivas y continuas x, y, z.
  - "Por cada unidad de x deben haber al menos 5 unidades de y".
    - $x \leq \frac{1}{5}y$.
  - "Por cada 7 unidades de x deben haber 9 unidades de y".
    - $\frac{1}{7}x = \frac{1}{9}y$.
  - Un puerto puede cargar 11 unidades de x, o 45 de y o 30 de z por semana. ¿Qué combinaciones de x, y, z puede cargar en 10 semanas?
    - $\frac{1}{11}x + \frac{1}{45}y + \frac{1}{30}z \leq 10$.
  - "Componente x debe ser al menos un 33 % de los componentes x, y, z"
    - $x \geq 0{,}33(x + y + z) \quad \Longleftrightarrow 0{,}67x \geq 0{,}33(y + z)$
  - "Proceso I transforma una unidad de x en 24.5 unidades de y y 73.1 unidades de z"
    - $y = 24{,}5x, \quad z = 73{,}1x$.
  - "Si x, y, z tienen 30,90,5 % de L, ¿que mezclas de x, y, z tienen al menos 20 % de L?"
    - $0{,}3x + 0{,}9y + 0{,}05z \geq 0{,}2(x + y + z)$.

Variables binarias para alternativas

- Situaciones donde uno u otro evento deben ocurrir.
- Para este tipo de dicotomías se usa:

$$x = \begin{cases} 1 & \text{evento ocurre} \\ 0 & \text{evento no ocurre} \end{cases}$$

Problema de la Mochila (Knapsack)

Tenemos n posibles proyectos, cada uno requiere una inversión a_j y un retorno c_j, y tenemos una restricción presupuestaria de b. Los proyectos deben realizarse completamente para obtener el beneficio. ¿Qué proyectos deben llevarse a cabo?

- $$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i : \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \leq b, x \in \{0,1\}^n \right\}$$
- ¿Qué tan distinta es la solución si x es continua?

Variables binarias para alternativas

Problema de asignación (Matching bi-partito)

Tenemos m trabajos y n personas a las cuales asignarlos ($m \leq n$). Cada trabajo debe ser asignado a una persona, y cada persona puede trabajar a lo más en un trabajo. El costo de asignar trabajo j al trabajador i es c_{ij}. Queremos buscar la asignación de todos los trabajos a costo mínimo.

- Defina $x_{ij} \in \{0, 1\}$ representando asociar trabajo j al trabajador i.
- ¿Que restricciones son necesarias?
- ¿Cuál es la cardinalidad de los puntos factibles?

Matching perfecto

Tenemos $2n$ trabajadores, y debemos formar n parejas de trabajo maximizando el beneficio global (de la empresa).

Variables binarias para alternativas

Set Covering, Set Packing, Set Partitioning

Consideremos un conjunto base $\mathcal{M} = \{1, \ldots, m\}$, y poseemos una serie de sub-conjuntos $\{\mathcal{M}_j\}_{j=1}^{n}, \quad \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M}$.

- Decimos que $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ covering $\mathcal{M}$ si $\bigcup_{i \in J} \mathcal{M}_i = \mathcal{M}$.
- Decimos que $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ es un packing en $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset \quad \forall i, j \in J$.
- Decimos que $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ es una partición en $\mathcal{M}$ si es un covering y un packing a la vez.

¿Cómo describimos todos los J que son un *covering*, *packing*, *partition* en $\mathcal{M}$?

Ejemplo:

Consideremos el problema de colocar estaciones de bomberos en una ciudad, y queremos asegurar un tiempo de respuesta de no más de 10 minutos? y si queremos K cobertura?

Modelando otras relaciones

- Ya modelamos como a lo más un evento puede ocurrir:
  - $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$.
- Si dos eventos deben ocurrir en forma simultanea o no ocurrir:
  - $x_i - x_j = 0$.
- Si un evento es necesario para que otro ocurra:
  - $x_i \leq x_j$.
- x ocurre si y sólo si y y z ocurren:
  - $x \leq y, \quad x \leq z, \quad x + 1 \geq y + z$.
- x ocurre si y sólo si y o z ocurren:
  - $x \geq y$, $x \geq z$, $x \leq y + z$.
- Consideremos una actividad que puede desarrollarse dentro de niveles $0 \leq y \leq u$, pero sólo si el evento x ocurre:
  - $0 \leq y$, $y \leq ux$.

Modelando otras relaciones

Problema de ubicación de instalaciones

Consideremos $I = \{1, \ldots, m\}$ un conjunto de clientes, y un conjunto de posibles locación de instalaciones $N = \{1, \ldots, n\}$. Abrir instalación $j \in N$ cuesta c_j. Atender al cliente $i \in I$ desde $j \in N$ cuesta h_{ij}.

- ¿Cómo modelamos el problema?
- ¿Que pasa si hay capacidades por instalación $\{b_j : j \in N\}$ y demanda $\{d_i : i \in I\}$?
- ¿Y si además hay costo variable $\{v_{ij} : i \in I, j \in N\}$ dependiendo de la demanda?

Modelando otras relaciones

Flujo en redes con costo fijo

Consideremos una red o grafo $G = (V, E)$, donde $V = \{1, \ldots, n\}$ se llaman nodos y $E \subseteq V \times V$ se llaman arcos o aristas.
Si $e = (u, v) \in E$ entonces existe una ruta directa para ir de u a v (pero no necesariamente de v a u).
Asociado a cada nodo $v \in V$ existe una demanda d_v. Un nodo v es una fuente, punto de tránsito o punto de demanda dependiendo si d_v es negativo, cero o positivo respectivamente. Asumimos que la demanda neta es cero ($\sum\limits_{v \in V} d_v = 0$).
Cada arco $e \in E$ tiene una capacidad $u_e \geq 0$ y un costo de transporte unitario h_e.

- ¿Cómo definiría un flujo factible para la red?
- ¿Cómo modelaría la existencia de costos fijos c por uso de rutas (arcos) y/o nodos?

Modelando otras relaciones

Problema del Vendedor Viajero

Consideramos un grafo $G = (V, E)$. Los nodos representan ciudades y los arcos $e = (u, v) \in E$ la posibilidad de viaje directo entre las ciudades u y v. Cada arco $e \in E$ tiene asociado un costo c_e.
El objetivo es encontrar un tour que, partiendo de la ciudad 1, visita todas las ciudades exactamente una vez volviendo a la ciudad de partida, a costo mínimo.

- Usando variables por arco, formule el problema.
- ¿Cuántas restricciones necesitamos?
- ¿Cuál es el número mínimo necesario?
- ¿Hay formulaciones más compactas?

Funciones no-lineales y restricciones disyuntivas

- ¿Qué pasa si la función objetivo no es lineal?
  - Consideraremos funciones objetivos del tipo $f(y_1, ..., y_N) = \sum_{i \in N} f_i(y_i)$ no lineal.
  - f se dice separable.
  - Cada f_i es no lineal.
  - Basta considerar f_i lineal por trazo?
  - ¿por que?
  - ¿Qué pasa si f no es separable?
- ¿Qué sucede si en vez de requerir que todas las restricciones se cumplan, nos basta que se cumplan k de ellas?
  - ¿Por qué podría ser esto interesante?
  - Este tipo de relaciones se llaman disyuntivas.

Funciones lineales por trazo

- Asumamos que f es lineal por trazo y continua:
  - f puede ser descrita por los puntos $\{a_i, f(a_i)\}_{i=1}^{n}$ donde $a_i \leq a_{i+1}$.
  - Note que todo $a_1 \leq y \leq a_r$ puede escribirse como
    $$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \lambda \geq 0.$$
  - Dado y, la representación en términos de λ no es única.
  - Si embargo, si $a_i \leq y \leq a_{i+1}$, podemos escoger λ tal que $\lambda_j = 0 \quad \forall j \neq \{i, i+1\}$. Así, $y = \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1}$ y $f(y) = \lambda_i f(a_i) + \lambda_{i+1} f(a_{i+1})$
  - Bajo este supuesto, se tendrá $f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$.
  - Ahora, definiendo el evento "y esta en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$", modele las condiciones anteriores utilizando variables binarias.
  - Si minimizamos f lineal por trozo convexa, las variables binarias anteriores no son necesarias.
  - ¿Qué sucede si f es discontinua?
  - ¿Hay otras formulaciones? ¿Son mejores? ¿En qué sentido?
  - ¿Podemos, en general, usar menos que $n-1$ variables binarias?

Restricciones Disyuntivas

- Consideremos la siguiente situación: queremos definir $y = \min\{u_1, u_2\}$.
  - Podemos modelar esto como $y \leq u_1$, $y \leq u_2$ y la restricción disyuntiva $y \geq u_1$ o $y \geq u_2$.
- En general queremos describir un punto satisfaciendo al menos k de m restricciones, en el ejemplo $m = 2, k = 1$.
  - Supongamos $P^i := \{y \in \mathbb{R}^p_+ : A^i y \leq b^i, y \leq d\}$ para $i = 1, \ldots, m$.
  - Note que $P^i \subseteq \{y \in \mathbb{R}^p : 0 \leq y \leq d\} = Y$.
  - Implica que existe w^i tal que $A^i y \leq b^i + w^i \quad \forall y \in Y$.
  - Usando el evento "$y \in P^i$", modele la restricción disyuntiva general.
- Para el caso $k = 1$ existe una formulación alternativa:
  - Consideramos $\sum_{i=1}^{m} y^i = y, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.
  - ¿Cuál formulación es mejor?
- ¿Qué pasa si queremos modelar que a lo más k de m conjuntos de restricciones se satisfacen?

Restricciones Disyuntivas

Problema de Secuenciamiento

Considere que tenemos n trabajos y m máquinas. Cada trabajo debe pasar por cada máquina. Para cada trabajo, el orden en que pasa por cada máquina es pre-establecido, es decir, el trabajo j debe partir por la máquina $j(1)$ y terminar en la máquina $j(m)$. Cada trabajo j demora un tiempo p_{jk} en la máquina k. Cada máquina puede procesar un solo trabajo, y una vez comenzado un trabajo, debe finalizarlo. El objetivo es minimizar la suma de los tiempos de finalización de los trabajos.

- Sea t_{jk} el tiempo de término del trabajo j en la máquina k.
  - $t_{j,j(r+1)} \geq t_{j,j(r)} + p_{j,j(r+1)} \quad \forall j, r = 1, \ldots, m-1.$
  - Dada una máquina k y dos trabajos i, j, siempre es cierto que "i se procesa antes que j" o "j se procesa antes que i".
  - Definimos $x_{ijk} = 1$ si lo primero es cierto, y cero si no.
  - Necesitamos $m\binom{n}{2}$ variables binarias $\mathcal{O}(m\binom{n}{2})$ restricciones.
  - Modelo alternativo para el TSP. ¿Cómo?
  - Difícil de resolver para problemas de interés práctico.

Dificultad de los Problemas

- La dificultad de un problema está relacionada con la estructura del problema y con el tamaño de la instancia.
- Se suele estudiar el número de operaciones aritméticas elementales (comparaciones, sumas, multiplicaciones) en función del tamaño de la instancia que un algoritmo realiza para resolver un problema.

Algoritmo Polinomial

El número de operaciones está acotado por un polinomio en el tamaño del problema. Estos algoritmos se consideran eficientes.

Algoritmo Exponencial

El número de operaciones no está acotado por un polinomio. Estos algoritmos se consideran ineficientes.

Dificultad de los Problemas

P

Problemas en los cuales existe un algoritmo polinomial que los resuelve (problemas fáciles).

NP (non-deterministic polinomial)

Problemas en los cuales existe un algoritmo no determinístico que lo resuelve en tiempo polinomial. Entre los problemas NP existe una subclase, los problemas NP-completos, que son los difíciles aún no resueltos eficientemente.