INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar Nº2

IN3401: Estadística para la economía y gestión
Profesor: Felipe Avilés
Profesor Auxiliar: José Miguel Carrasco

Problema 1:

Sea 1 el vector columna de unos de n dimensiones , y sea $M_1 = I_n - 1(1'1)^{-1}1'$, esto es M_1 es el annihilator asociado a 1.

Demuestre que:

(a) M_1 es simétrica e idempotente.

(b) $M_1 1 = 0$.

(c) $M_1 = \mathbf{y} - \bar{y} \cdot \mathbf{1}$ donde: $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

$M_1 y$ es el vector de desviaciones a la media.

(d) $\mathbf{M}_1\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{1}\bar{\mathbf{x}}'$, donde $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{X}'\mathbf{1}/n$ el K-esimo elemento del vector $\bar{\mathbf{x}}$ es $\bar{\mathbf{x}}$ is $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ik}$

Problema 2:

Considere un modelo de regresión con una constante. Sea X particionado como:

$$\underset{(n\times K)}{\mathbf{X}} = \left[\underset{n\times 1}{\mathbf{1}} \ \vdots \ \underset{n\times(K-1)}{\mathbf{X}_2}\right]$$

Así el primer regresor es una constate. Concordantemente la partición β y b son:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{scalar} \\ \leftarrow (K-1)\times 1 \end{array}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}.$$

También sean $\tilde{\mathbf{X}}_2 \equiv \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$ e $\tilde{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{M}_1\mathbf{y}$. Ellos son las desviaciones a la media de los regresores no constantes y la variable dependiente. Demuestre que:

(a) Las K ecuaciones normales son:

$$\bar{y} - b_1 - \bar{\mathbf{x}}_2'\mathbf{b}_2 = 0$$

Donde $\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{X}_2'\mathbf{1}/n$

$$\mathbf{X}_2'\mathbf{y} - n \cdot b_1 \cdot \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 = \underset{((K-1)\times 1)}{\mathbf{0}}$$

(b) $\mathbf{b}_2 = (\tilde{\mathbf{X}}_2'\tilde{\mathbf{X}}_2)^{-1}\tilde{\mathbf{X}}_2'\tilde{\mathbf{y}}$ Hint: Substituya la primera ecuación normal en las otras K-1 para elminar b_1 y resuelva para b_2

Problema 3:

Sea X particionado como:

$$\underset{(n\times K)}{\mathbf{X}} = \left[\underset{(n\times K_1)}{\mathbf{X}_1} \;\vdots\; \underset{(n\times K_2)}{\mathbf{X}_2} \right]$$

La partición de β sería:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow K_1 \times 1 \\ \leftarrow K_2 \times 1 \end{matrix}$$

Y con esto el modelo de regresión queda expresado como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Sean $\mathbf{P}_1 \equiv \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'$, $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$, $\widetilde{\mathbf{X}}_2 \equiv \mathbf{M}_1\mathbf{X}_2$, $\tilde{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{M}_1\mathbf{y}$. Donde $\tilde{\mathbf{y}}$ es el vector residual de la regresión de **y** en $\mathbf{X}_1$ y la k-ésima columna de X_2 es el vector residual De la regresión correspondiente a la k-ésima columna de X_2 en X_1 . Demuestre que:

(a) Las ecuaciones normales son:

$$\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{X}_1'\mathbf{y}, \qquad (*)$$
$$\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{X}_2'\mathbf{y}. \qquad (**)$$

(b) $\mathbf{b}_2 = (\widetilde{\mathbf{X}}_2'\widetilde{\mathbf{X}}_2)^{-1}\widetilde{\mathbf{X}}_2'\tilde{\mathbf{y}}$ Esto significa que b_2 puede ser obtenido por la regresión de los residuos $\tilde{\mathbf{y}}$ en la matriz de residuos $\widetilde{\mathbf{X}}_2$

(c) Los residuos de la regresión de $\tilde{\mathbf{y}}$ en $\widetilde{\mathbf{X}}_2$ corresponden a e,el vector de residuos de y en X

(d) $\mathbf{b}_2 = (\widetilde{\mathbf{X}}_2'\widetilde{\mathbf{X}}_2)^{-1}\widetilde{\mathbf{X}}_2'\mathbf{y}$

(e) Demuestre que: $\tilde{\mathbf{y}}'\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{e}'\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{y}}'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{M}_1\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\tilde{\mathbf{y}}$

(f) Considere las siguientes regresiones

(1) $\tilde{\mathbf{y}}$ en $\mathbf{X}_1$.

(2) $\tilde{\mathbf{y}}$ en $\widetilde{\mathbf{X}}_2$.

(3) $\tilde{\mathbf{y}}$ en $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$.

(4) $\tilde{\mathbf{y}}$ en $\mathbf{X}_2$.

Y SSR_j es la suma de los cuadrados de los residuos de la regresión j. Demuestre que :

(I) $SSR_1 = \tilde{\mathbf{y}}'\tilde{\mathbf{y}}$.

(II) $SSR_2 = \mathbf{e}'\mathbf{e}$.

(III) $SSR_3 = \mathbf{e}'\mathbf{e}$.

(IV) Verifique con un ejemplo que SSR_4 no es necesariamente igual a e’e.