FÓRMULAS DE GEOFÍSICA APLICADA
4º Curso de Licenciado en Geología, Universidad de Salamanca

Las siguientes fórmulas y ecuaciones sirven para resolver los problemas de la asignatura **Geofísica aplicada**. El significado y valor de las diferentes constantes y parámetros no se da para todas las fórmulas, sino sólo la primera vez que aparecen.

PROSPECCIÓN GRAVIMÉTRICA

Anomalías gravimétricas de formas geométricas sencillas

Esfera uniforme enterrada: $\Delta g_z = \dfrac{4\cdot\pi\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot R^3\cdot z}{3\cdot\left(z^2+x^2\right)^{3/2}}$, donde Δg_z es la anomalía vertical causada por la esfera a una distancia x de su eje vertical, R es el radio de la esfera, z la profundidad de su centro, x la distancia a la proyección en superficie del centro de la esfera, $\Delta\rho$ el contraste de densidad entre la esfera y su encajante, y $G = 6{,}6725985\cdot 10^{-11}$ Kg^{-1} m^3 s^{-2}. La anomalía tiene forma de campana, y si llamamos w a la anchura de la anomalía a la mitad de la altura, se cumple que $z = 0{,}652\cdot w$. Esta fórmula puede escribirse también:

$$\Delta g_z = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot G\cdot\left(\frac{\Delta\rho\cdot R^3}{z^2}\right)\cdot\left[\frac{1}{1+\left(x/z\right)^2}\right]^{3/2}$$

Varilla o elemento linear horizontal: $\Delta g_z = \dfrac{2\cdot G\cdot m\cdot z}{\left(z^2+x^2\right)}$, donde z es la profundidad de la varilla, x la distancia a la proyección de la varilla sobre el plano horizontal y m la masa de la varilla por unidad de longitud.

Cilindro horizontal: $\Delta g_z = \dfrac{2\cdot\pi\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot R^2\cdot z}{\left(z^2+x^2\right)}$, donde R es el radio del cilindro, z la profundidad de su centro, $\Delta\rho$ el contraste de densidad entre el cilindro y su encajante, y $G = 6{,}6725985\cdot 10^{-11}$ Kg^{-1} m^3 s^{-2}. La anomalía tiene forma de campana, y si llamamos w a la anchura de la anomalía a la mitad de la altura, se cumple que $z = 0{,}5\cdot w$. Esta fórmula puede escribirse también: $\Delta g_z = 2\cdot\pi\cdot G\cdot\left(\dfrac{\Delta\rho\cdot R^2}{z}\right)\cdot\left[\dfrac{1}{1+\left(x/z\right)^2}\right]$

Cilindro vertical: La anomalía gravimétrica de esta sencilla forma geométrica es complicada de calcular, y normalmente se trabaja con fórmulas que contemplan casos concretos:

<u>Anomalía sobre el eje de un cilindro vertical enterrado</u>: $\Delta g_z = 2\cdot\pi\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot\left(L - r_1 + r_2\right)$, donde L es la longitud del cilindro, y r_1 y r_2 las distancias entre el punto donde el eje del cilindro intersecta a la superficie, y el borde inferior y superior del cilindro respectivamente. Sólo da la anomalía en el eje del cilindro, no en los alrededores.

<u>Anomalía para los alrededores de un cilindro vertical aflorante</u>:

$$\Delta g_z = 2\cdot\pi\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot\left(\sqrt{L^2+(x-R)^2} - \sqrt{L^2+(x+R)^2} + 2\cdot R\right)\cdot\frac{R}{4\cdot x}$$

, donde x es la distancia del punto donde queremos calcular la anomalía al eje del cilindro. Pero siempre $x \geq R$, es decir, sólo puede calcularse la anomalía fuera del cilindro aflorante y no dentro del afloramiento del mismo. Además, la fórmula es sólo una aproximación.

<u>Anomalía de un cilindro vertical enterrado de longitud indefinida</u>: llamamos R al radio del cilindro, z a la profundidad de su cara superior, y r al segmento que une el punto en el que queremos medir la anomalía con el centro de la cara superior del cilindro. El ángulo θ es entonces el formado por r con el eje vertical, de forma que $\cos\theta = z/r$. Entonces, existen dos ecuaciones que dan la anomalía gravimétrica de forma aproximada, y que corresponden a dos casos distintos:

Para $r > R$:

$$\Delta g_z = 2\cdot\pi\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot R\cdot\left[\frac{R}{2\cdot r} - \left(\frac{R}{2\cdot r}\right)^3\cdot\left(\frac{3\cdot\cos^2\theta - 1}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{R}{2\cdot r}\right)^5\cdot\left(\frac{35\cdot\cos^4\theta - 30\cdot\cos^2\theta + 3}{8}\right)\right]$$

Para $r < R$:

$$\Delta g_z = 2\cdot\pi\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot R\cdot\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\cdot\cos\,\theta + 2\cdot\left(\frac{r}{2\cdot R}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cdot\cos^2\theta - 1}{2}\right) - 2\cdot\left(\frac{r}{2\cdot R}\right)^4\cdot\left(\frac{35\cdot\cos^4\theta - 30\cdot\cos^2\theta + 3}{8}\right)\right]$$

Estas fórmulas funcionan bien para cilindros verticales largos, en los que $L >> z$, es decir, más largos que profundos. Pueden aproximarse con más términos, pero con los que aparecen en esta versión, la aproximación es ya bastante buena.

Lámina horizontal delgada finita: $\Delta g_z = 2\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot t\cdot\left(arc\;\;\text{tg}\;\left(\frac{x_2}{z}\right) - arc\;\;\text{tg}\;\left(\frac{x_1}{z}\right)\right)$, donde x_1 y x_2 son las distancias desde el punto en que queremos calcular la anomalía a la proyección sobre la superficie de los dos extremos de la lámina, y t es su espesor. La profundidad de la lámina es z, y se toma desde la superficie hasta la mitad de la misma. También puede escribirse: $\Delta g_z = 2\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot t\cdot(\Phi_2 - \Phi_1)$, donde Φ_1 y Φ_2 son los ángulos formados por las líneas que unen el punto en que queremos calcular la anomalía, con los extremos de la lámina. Notar que *arc* tg significa "el arco cuya tangente es...", y que Φ_1 y Φ_2 se dan en radianes.

Lámina horizontal delgada semi-infinita: $\Delta g_z = 2\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot t\cdot\left(\frac{\pi}{2} + arc\;\;\text{tg}\;\left(\frac{x}{z}\right)\right)$, donde x es la distancia desde el punto en que queremos calcular la anomalía a la proyección sobre la superficie del extremo de la lámina, y t es su espesor. La profundidad de la lámina es z, y se toma desde la superficie hasta la mitad de la misma. Sólo vale para $z > 2\cdot t$ y, por tanto, no vale para láminas aflorantes ni muy superficiales.

Lámina vertical enterrada: $\Delta g_z = 2\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot t\cdot\ln\left(\frac{(h+l)^2 + x^2}{(x^2 + h^2)}\right)$, donde x es la distancia desde el punto en que queremos calcular la anomalía a la proyección sobre la superficie del centro de la lámina, t es su espesor, h la profundidad del techo de la lámina y l su longitud. La profundidad de la lámina es z, y se toma desde la superficie hasta la mitad de la misma. Puede aplicarse a una lámina vertical aflorante poniendo $h = 0$

Lámina inclinada enterrada finita: $\Delta g_z = 2\cdot G\cdot\Delta\rho\cdot t\cdot\left(sen\beta\cdot\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + (\theta_1 + \theta_2)\cdot\cos\beta\right)$, donde r_1 y r_2 son las distancias desde el punto en que queremos calcular la anomalía a los extremos superior e inferior de la lámina, respectivamente, y t es su espesor. β es el buzamiento de la lámina, y θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman r_1 y r_2 con la perpendicular a la lámina. Funciona bien, salvo cuando el espesor de la lámina supera claramente la profundidad del punto más alto de misma. Por tanto, para aplicarla a una lámina inclinada aflorante, el espesor de ésta debe ser pequeño y, aun así, la anomalía obtenida será sólo aproximada.

Determinación de densidades

Medida directa sobre muestras: $\rho = \dfrac{W_a}{W_a - W_w}$, donde W_a es el peso de la muestra en el aire y W_w es su peso en el agua.

A partir de la velocidad de las ondas sísmicas: $\rho = 309{,}54 \cdot V_P^{\,0{,}25}$, donde V_P está en m s^{-1} y ρ en Kg m^{-3}. Es una relación empírica entre V_p y ρ, conocida como ecuación de Gardner.

A partir de medidas de gravedad en un sondeo: $\rho = \dfrac{g}{2 \cdot \pi \cdot G \cdot r} - \dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \dfrac{\Delta g}{\Delta h}$, donde g es la gravedad local, r el radio terrestre local, Δg la diferencia de gravedad medida a dos profundidades distintas e Δh la diferencia de profundidades. Empleando los valores standard $g = 981.000$ mGal y $r = R = 6.371.000$ m, la fórmula queda reducida a:

$\rho = \left(3{,}675 - 11{,}93 \cdot \dfrac{\Delta g}{\Delta h} \right) .10^3$ Kg m^{-3}, donde Δg va en mGal e Δh en metros.

Método de Nettleton: Se elige un relieve formado por rocas homogéneas, se toman medidas de gravedad a lo largo de él y se les aplica la corrección de elevación con varias densidades:

$$\Delta g_{EL} = \Delta g_{FA} - \Delta g_{BP} = 2 \cdot g \cdot \Delta h / r - 2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \Delta h = 0{,}308 \cdot \Delta h - 4{,}19 \cdot 10^{-5} \cdot \rho \cdot \Delta h$$

La densidad con la cual los valores de gravedad corregidos son más parecidos entre sí, es la densidad de las rocas de ese relieve. Es decir, una vez corregidos los valores, obtenemos la anomalía relativa, con respecto al punto más bajo del relieve. Se trata de una anomalía de Bouguer y cuando se acerca a cero, implica que la corrección es buena y que la densidad elegida es correcta.

PROSPECCIÓN MAGNÉTICA

Relación de Königsberger

$Q_n = \dfrac{M_r}{M_i}$, donde M_i es la magnetización inducida y M_r la magnetización remanente.

Correcciones o reducciones en magnetometría

Corrección de la variación diurna: Se debe a la rotación terrestre con respecto a la ionosfera. Se corrige registrando el campo magnético a intervalos regulares un magnetómetro fijo. Su valor es muy pequeño, entre 10 y 30 nT normalmente. Sólo cuando hay tormentas magnéticas, la corrección sería grande, pero entonces es mejor suspender la exploración.

Corrección de la variación secular: Se aplica en campañas largas, de meses o años, para compensar las variaciones del campo magnético terrestre de origen interno.

Corrección de altitud: $\Delta B_A = \dfrac{\partial B}{\partial r} = \dfrac{3 \cdot B}{r}$, donde B es el campo magnético total y r es el radio local. Expresando B en nT y r en metros, la corrección se da en nT m^{-1}, y su valor es aproximadamente 0,015 nT m^{-1} en el ecuador magnético, y 0,030 nT m^{-1} en los polos magnéticos. Es una corrección pequeña, pero se aplica cuando el relieve es muy fuerte, y también en exploraciones aéreas. Se suma a las medidas efectuadas sobre el nivel del mar.

Corrección de latitud: $\Delta B_\lambda = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial B}{\partial \theta} = \dfrac{3 \cdot B}{r} \cdot \dfrac{\text{sen } \theta \cdot \cos \theta}{(1 + 3 \cdot \cos^2 \theta)}$, donde B es el campo magnético total, r el radio local, y θ la colatitud magnética. Expresando B en nT y r en metros, la corrección se da en nT m^{-1}, y su valor es siempre cero en los polos y el ecuador magnéticos, con un valor máximo de 0,005 nT m^{-1} (5 nT km^{-1}) para latitudes intermedias. Es insignificante para exploraciones a pequeña escala. <u>Se resta hacia el polo magnético más cercano y se suma hacia el ecuador magnético</u>.

Anomalías magnéticas

Anomalía absoluta (con respecto al IGRF):

$\Delta B_{ABS} = B_L + \Delta vd + (\Delta vs) - B_{IGRF} ...[+(\Delta B_A + \Delta B_\lambda)]$ según el IGRF medido.

Anomalía relativa (con respecto a una estación base):

$\Delta B_R = B_L + \Delta vd + (\Delta vs) + \Delta B_A + \Delta B_\lambda - B_{Base}$, donde Δvd y Δvs son las correcciones de la variación diurna y secular, B_L es la lectura del magnetómetro, es decir, el campo magnético absoluto medido, ΔB_A es la corrección de altitud, ΔB_λ es la corrección de latitud, ΔB_{IGRF} es el valor del campo magnético en ese punto según el International Geomagnetic Reference Field, y ΔB_{Base} es la lectura en la base que se toma como referencia. Cada corrección se suma con su signo.

Anomalías magnéticas de formas geométricas sencillas

Las siguientes fórmulas dan la componente total de la anomalía producida por los cuerpos. Son válidas para el Sistema Internacional (SI), de forma que la susceptibilidad magnética debe darse en este sistema.

Esfera uniforme enterrada:

$$\Delta B = \left(\frac{k \cdot B \cdot R^3}{4 \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{x^2 + z^2}\right)^5 \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 \theta}} \right) \cdot \left[\left(3 \cdot \cos^2 I - 1\right) \cdot x^2 - 6 \cdot x \cdot z \cdot \operatorname{sen} I \cdot \cos I + (3 \cdot \operatorname{sen}^2 I - 1) \cdot z^2 \right]$$

donde k es la susceptibilidad magnética del material de la esfera, B es el campo magnético terrestre total de la localidad, I la inclinación magnética, R es el radio de la esfera, z la profundidad al centro de la esfera, x la distancia a la proyección en superficie del centro de la esfera, y θ el ángulo entre el eje del dipolo que se crea en la esfera y la recta que une su centro con el punto donde queremos calcular la anomalía: $\theta = (90° - I) + arctg\ x/z$.

Expresando B en nT, la anomalía se obtiene también en nT.

Lámina inclinada enterrada:

$$\Delta B = \frac{k \cdot B \cdot \operatorname{sen}\ \beta}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left[\operatorname{sen}\ (2 \cdot I) \cdot \operatorname{sen}\ \alpha \cdot \operatorname{sen}\ \beta - \cos\ \beta \cdot (\cos^2 I \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 I) \right] \cdot \ln \left(\frac{r_2 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_4} \right) + \right.$$
$$\left. + \left[\operatorname{sen}\ (2 \cdot I) \cdot \operatorname{sen}\ \alpha \cdot \cos\ \beta + \operatorname{sen}\ \beta \cdot (\cos^2 I \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 I) \right] \cdot (\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + \phi_4) \right\},$$

donde α es la dirección de la lámina, β su buzamiento, k es la susceptibilidad magnética del material de la lámina, B es el campo magnético terrestre total de la localidad, e I la inclinación magnética. El resto de las variables son las longitudes (r) y ángulos con la horizontal (ϕ), de las rectas que unen el punto de la superficie en el que queremos calcular la anomalía magnética, con las cuatro esquinas de la lámina inclinada vista en sección. Las esquinas se numeran así: 1-superior izquierda, 2-inferior izquierda, 3-superior derecha y 4-inferior derecha. Los ángulos (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4) se introducen en radianes. La ecuación vale para capas y diques inclinados ($\beta \neq 90°$) o verticales ($\beta = 90°$), enterrados ($\phi_1 \neq 0°$ y $\phi_3 \neq 0°$) o aflorantes ($\phi_1 = 0°$ y $\phi_3 = 0°$). Puede emplearse también para bloques horizontales, pero si se trata de capas es mejor utilizar la fórmula siguiente.

Lámina horizontal delgada finita:

$$\Delta B = \frac{k \cdot B \cdot t}{2 \cdot \pi} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 \cdot \left[d \cdot \operatorname{sen}\ (2 \cdot I) \cdot \operatorname{sen}\ \alpha - x \cdot (\cos^2 I \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 I)\right] - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 \cdot \left[d \cdot \operatorname{sen}\ (2 \cdot I) \cdot \operatorname{sen}\ \alpha - (x - l) \cdot (\cos^2 I \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 I)\right] \right\}$$

, donde t es el espesor de la lámina, d la profundidad a su techo, l su longitud en sección, y α su dirección. En este caso, r_1 y r_2 son las longitudes de las rectas que unen el punto de la superficie en el que queremos calcular la anomalía magnética, con las dos esquinas superiores de la lámina horizontal vista en sección. Situando el origen de x encima de una esquina de la lámina,

$r_1^2 = x^2 + d^2$, y $r_2^2 = (l - x)^2 + d^2$

PROSPECCIÓN ELÉCTRICA Y ELECTROMAGNÉTICA

Potencial espontáneo

Las anomalías obtenidas por métodos de potencial espontáneo ("self potential" ó SP) son difíciles de interpretar cuantitativamente, por lo que normalmente se hace sólo una interpretación cualitativa.

Las anomalías son siempre negativas, debido a que la zona más oxidada está en la parte superior del cuerpo que produce la anomalía, y se comporta como una carga negativa. A menudo, las anomalías tienen forma de campana invertida más o menos simétrica. En estos casos, si llamamos *w* a la anchura de la anomalía a la mitad de la altura, se asume que $z \approx 0{,}5 \cdot w$, siendo *z* la profundidad del punto más alto del cuerpo que produce la anomalía. Se trata sólo de una aproximación y, de hecho, *z* puede variar en ±100 % de ese valor.

Las anomalías asimétricas pueden indicar que el cuerpo que las produce está inclinado. En esos casos, el cuerpo buza hacia el lado donde el gradiente es más fuerte, es decir, hacia donde las isolíneas o contornos de igual potencial están más juntos.

Potenciales y corrientes inducidos

Potencial de un sólo electrodo: Si por un electrodo insertado en el terreno circula una corriente *I*, la densidad de corriente *J* a una distancia *r* es: $J = \dfrac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$, el campo eléctrico *E* a esa distancia es $E = \rho \cdot J = \rho \cdot \dfrac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$, y el potencial a esa distancia es $U = \rho \cdot \dfrac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$.

Si el electrodo es positivo, se llama electrodo fuente ("source"), y el potencial disminuye en proporción inversa a la distancia. Si el electrodo es negativo, se llama electrodo pila ("sink"), y el potencial aumenta (se hace menos negativo) en proporción inversa a la distancia. Las líneas del campo eléctrico divergen radialmente de un electrodo fuente y convergen radialmente hacia un electrodo pila. Las superficies equipotenciales son idealmente semiesferas centradas en el electrodo.

Configuración general con 4 electrodos: De los cuatro electrodos que se emplean, dos de ellos, A y B, se llaman <u>electrodos de corriente</u>, y están conectados a una batería, siendo A el polo positivo o fuente y B el negativo o pila. En el circuito de corriente se intercala un amperímetro para medir la intensidad *I*. Los otros dos, C y D, se llaman <u>electrodos de potencial o de detección</u>, y en el circuito de detección se intercala un voltímetro para medir la diferencia de potencial *V*. Si llamamos r_{AB}, r_{CB}, etc... a las distancias entre los correspondientes electrodos, la diferencia de potencial entre los electrodos de potencial, C y D, viene dada por la fórmula:

$$V = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\left(\frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{CB}} \right) - \left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{DB}} \right) \right] ,$$

y la resistividad

$$\rho = 2 \cdot \pi \cdot \frac{V}{I} \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{r_{AC}} - \frac{1}{r_{CB}} \right) - \left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{DB}} \right)} \right] .$$

Esas fórmulas se deducen sumando la contribución del potencial de cada uno de los electrodos de corriente A y B a cada electrodo de potencial y sumando luego el potencial de éstos con sus signos.

Configuraciones especiales: Son geometrías de 4 electrodos diseñadas con fines específicos de exploración, y que simplifican la fórmula general de la resistividad.

Configuración Wenner: Si la distancia entre electrodos de potencial es $r_{CD} = a$,, la distancia entre electrodos de corriente es $r_{AB} = 3 \cdot r_{CD} = 3 \cdot a$, y el punto medio de ambas coincide. Es por tanto una configuración centrada y simétrica en la que $r_{AC} = r_{CD} = r_{DB} = a$. Se emplea para medir la resistividad a una profundidad determinada, y para obtener mapas de la variación de resistividad a esa profundidad, haciendo lo que se llama perfiles laterales. La resistividad en este caso viene dada por: $\rho = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{V}{I}$

Configuración Schlumberger: Es también simétrica y centrada, pero las distancias r_{AB} y r_{CD} no guardan una relación fija y, de hecho, $r_{AB} >> r_{CD}$. Si $r_{AB} = L$ y $r_{CD} = a$, $\rho = \frac{\pi \cdot V}{4 \cdot I} \cdot \left(\frac{L^2 - a^2}{a} \right)$. Se emplea para medir variaciones de la resistividad en la vertical, manteniendo fijo el punto medio y aumentando L, y es la configuración que suele emplearse en los llamados sondeos eléctricos verticales (SEV).

Ecuaciones de Maxwell describen la propagación de los vectores de los campos eléctrico (E) y magnético (B) a lo largo del espacio y del tiempo para las ondas electromagnéticas.

Para una onda plana, las ecuaciones en la dirección de propagación (x) son:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \cdot \sigma \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \text{ , y } \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \cdot \sigma \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

En la primera ecuación, el término $\mu_0 \cdot \sigma \cdot \partial E / \partial t$ describe la conducción de electricidad en un conductor, y el término $\mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \partial^2 E / \partial t^2$ es muy similar al que describe la propagación de una onda en un medio elástico.

En efecto, la ecuación general de una onda que se propaga en una dirección es $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, donde V es la velocidad de propagación de la onda. Comparando con $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, se deduce que $\mu_0 \cdot \varepsilon = \frac{1}{V^2}$. ε es la permitividad del medio y, en el vacío, su valor es la constante de permitividad $\varepsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2. La constante de permeabilidad magnética en el vacío es $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}. Despejando, $V = 299.792.458$ m s^{-1}, que es la velocidad de la luz (c).

Por otra parte, la magnitud de los campos E y B en cada instante está relacionada por $E = c \cdot B$, donde $c = 299.792.458$ m s^{-1} es de nuevo la velocidad de la luz.

Relación de magnitud Si el campo eléctrico viene expresado por una onda sinusoidal, su amplitud en un momento dado viene dada por la ecuación de una onda de ese tipo: $E = A \cdot sen(\varpi \cdot t) = A \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$, donde A es la amplitud máxima, f la frecuencia, ω la frecuencia angular y t el tiempo. Entonces,

$\partial E / \partial t = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot E$, y

$\partial^2 E / \partial t^2 = -(2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot A \cdot sen(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = -(2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot E$.

La relación de magnitud (*RM*) sirve para comparar la importancia relativa de los términos que expresan la propagación ondulatoria y la conducción:

$$RM = \frac{\left|\mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \left(\partial^2 E \big/ \partial t^2\right)\right|}{\left|\mu_0 \cdot \sigma \cdot \left(\partial E \big/ \partial t\right)\right|} = \frac{\varepsilon \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2 \cdot E}{\sigma \cdot (2 \cdot \pi \cdot f) \cdot E} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma} .$$

La conductividad (σ) en rocas y suelos oscila entre 10^{-1} y 10^{-5} Ω^{-1} m^{-1}. En los cuerpos metálicos vale alrededor de 10^3 a 10^5 Ω^{-1} m^{-1}. Con frecuencias menores de 10^4 Hz, *RM* es mucho menor que 1, tanto para buenos como para malos conductores. Eso implica que el término de conducción eléctrica es más importante, que la onda electromagnética se propaga bien, en gran medida por conducción, y que las frecuencias bajas penetran bien en el terreno, más cuanto menores sean. En cambio, si se emplean frecuencias altas, p. ej., 10^8 Hz, *RM* es pequeña para los cuerpos mineralizados, pero puede ser mucho mayor que 1 en rocas y suelos. Entonces, las ondas electromagnéticas se propagan como lo haría una onda sísmica, y puede refractarse, reflejarse y difractarse, pero penetran poco.

Penetración de las ondas electromagnéticas y métodos de exploración Las ondas electromagnéticas se propagan mal por sólidos y líquidos, y bien por el vacío o el aire, como es el caso de la luz. Por tanto, cuanto mayor sea *RM*, menor será su capacidad de penetración. Se define un parámetro (*d*) llamado "skin depth", que es la profundidad a la que una onda se atenúa hasta un valor igual a e^{-1}, equivalente aproximadamente al 37 % de su amplitud inicial: $d = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \mu_0 \cdot \sigma \cdot f}}$.

Vemos que *d* depende inversamente de la conductividad y la frecuencia (*f*). Por ejemplo, para $\sigma = 10^{-3}$ Ω^{-1} m^{-1}, típica del suelo, para $f = 10^3$ Hz, $d \approx 500$ m, pero en un yacimiento metálico, con $\sigma = 10^4$ Ω^{-1} m^{-1}, la "skin depth" es $d \approx 0{,}16$ m para la misma frecuencia. La "skin depth" no es la máxima capacidad de penetración, pero da idea de la rapidez con que se atenúa el campo. Este decae a sólo el 1 % de su valor inicial para $z = 5 \cdot d$, y al 0,1 % para $z = 7 \cdot d$. Por eso, se usan diferentes frecuencias según los métodos y lo que se desea investigar:

Georadar: Llamado en inglés "ground penetrating radar", ó GPR, es un método que obtiene perfiles similares a los sísmicos, empleando frecuencias altas, de 10^8 a 10^9 Hz, y un pulso muy corto, de duración aproximadamente igual a un periodo (10^{-8} a 10^{-9}s). Aunque la resolución es muy buena, sólo penetra unos pocos metros en el subsuelo, 100 m como máximo.

Inducción electromagnética: También conocida por las siglas EM, utiliza frecuencias bajas, de 10^3 a $5 \cdot 10^4$ Hz. La corriente primaria de esa frecuencia es emitida por una espira o bobina en forma de aro, y genera un campo magnético primario que induce corrientes secundarias en el suelo. Estas, a su vez, producen campos magnéticos secundarios, que se registran en un segundo aro. Si V_P y V_S son los potenciales de las corrientes primaria y secundaria, y H_P y H_S los respectivos campos magnéticos, se proyectan las relaciones V_S/V_P ó H_S/H_P frente a la distancia. La relación es directamente proporcional a la conductividad aparente del subsuelo: $\sigma_a = \frac{2}{\pi \cdot \mu_0 \cdot l^2 \cdot f} \cdot \frac{H_S}{H_P}$, siendo *l* la separación entre los dos aros orientados horizontalmente. La relación H_S/H_P es siempre menor que 1 en valor absoluto, y su signo depende del sentido del campo magnético inducido en relación al del inductor.

Se llama respuesta de un conductor de anchura *s* a $\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \mu_0 \cdot \sigma \cdot f \cdot s \cdot l$.

PROSPECCIÓN SÍSMICA

Ecuaciones de sísmica de refracción

Las siguientes ecuaciones sólo son válidas si las velocidades aumentan hacia abajo.

Caso de dos capas horizontales (una interfase horizontal): $t = \frac{x}{V_2} + \frac{2 \cdot e \cdot \cos\, i_c}{V_1}$, donde t es el tiempo, x la distancia, e el espesor de la capa superior, V_1 y V_2 la velocidad de las ondas P en las capas superior e inferior respectivamente, e i_c el ángulo crítico. Esa ecuación relaciona distancias con tiempos de llegada en función del ángulo crítico. Las velocidades son el inverso de las pendientes de las dromocronas. Se usa más en la forma siguiente, que está sólo en función de las velocidades:

$t = \frac{x}{V_2} + \frac{2 \cdot e \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$. Para $x = 0$, el tiempo de intersección es: $t_i = \frac{2 \cdot e \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$

Se usan además las siguientes fórmulas para calcular el espesor (e) del lecho superior:

$e = \frac{t_i}{2} \cdot \frac{V_1 \cdot V_2}{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}$, en función del tiempo de intersección (t_i), y $e = \frac{x_{cr}}{2} \cdot \frac{\sqrt{V_2 - V_1}}{\sqrt{V_2 + V_1}}$, en función de la distancia de cruce (x_{cr}).

Caso de tres capas horizontales: $t = \frac{x}{V_3} + \frac{2 \cdot e_1 \cdot \sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_3} + \frac{2 \cdot e_2 \cdot \sqrt{V_3^2 - V_2^2}}{V_2 \cdot V_3}$, donde t es el tiempo, x la distancia, e_1 y e_2 los espesores de la capa superior e intermedia, y V_1, V_2 y V_3 la velocidad de las ondas P en las capas superior, media e inferior respectivamente. Las velocidades son el inverso de las pendientes de las dromocronas.

Para $x = 0$, el tiempo de intersección de la primera interfase es t_{i1}, y se calcula por la fórmula para el caso de dos capas. Para la segunda interfase, el tiempo de intersección es:

$$t_{i2} = \frac{2 \cdot e_1 \cdot \sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_3} + \frac{2 \cdot e_2 \cdot \sqrt{V_3^2 - V_2^2}}{V_2 \cdot V_3}$$

El espesor e_1 se calcula por la fórmula para dos capas. El espesor e_2 es:

$$e_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(t_{i2} - \frac{2 \cdot e_1 \cdot \sqrt{V_3^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_3} \right) \cdot \left(\frac{V_2 \cdot V_3}{\sqrt{V_3^2 - V_2^2}} \right)$$

Caso de cuatro capas horizontales:

$$t = \frac{x}{V_4} + \frac{2 \cdot e_1 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_4} + \frac{2 \cdot e_2 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_2^2}}{V_2 \cdot V_4} + \frac{2 \cdot e_3 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_3^2}}{V_3 \cdot V_4}$$

Las velocidades se obtienen de la forma habitual, invirtiendo las pendientes. Los espesores e_1 y e_2 se obtienen por las fórmulas de los casos anteriores. El tiempo de intersección para la tercera interfase es:

$$t_{i3} = \frac{2 \cdot e_1 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_4} + \frac{2 \cdot e_2 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_2^2}}{V_2 \cdot V_4} + \frac{2 \cdot e_3 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_3^2}}{V_3 \cdot V_4},$$

y el espesor e_3 se calcula despejando de esa fórmula:

$$e_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(t_{i3} - \frac{2 \cdot e_1 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_4} - \frac{2 \cdot e_2 \cdot \sqrt{V_4^2 - V_2^2}}{V_2 \cdot V_4} \right) \cdot \left(\frac{V_3 \cdot V_4}{\sqrt{V_4^2 - V_3^2}} \right)$$

Pueden darse ecuaciones para más capas, pero no tiene sentido porque 4 ya suelen ser muy difíciles de diferenciar en un perfil sísmico de refracción de una exploración local.

Caso de dos capas inclinadas: en este caso, se trabaja con dos disparos, uno en cada extremo del dispositivo. Se definen dos pendientes (m_d y m_u) y dos tiempos de intersección (t_{id} y t_{iu}) para las dromocronas correspondientes a la interfase. Se usan los subíndices *d* y *u* para cuando las ondas de Mintrop recorren la interfase hacia abajo (m_d, t_d) y hacia arriba (m_u, t_u).

Los tiempos hacia abajo y hacia arriba, en función de la distancia, son:

$$t_d = \frac{x}{V_1} \cdot \text{sen}\ (i_c + \beta) + \frac{2 \cdot e_A \cdot \cos\ i_c}{V_1} \quad \text{y} \quad t_u = \frac{x}{V_1} \cdot \text{sen}\ (i_c - \beta) + \frac{2 \cdot e_D \cdot \cos\ i_c}{V_1} \quad ,$$

donde x es la distancia, e_A y e_D los espesores de la capa superior pendiente arriba y pendiente abajo respectivamente, V_1 la velocidad de las ondas P en la capa superior, i_c el ángulo crítico y β el buzamiento de las capas.

Las pendientes para la onda Mintrop son: $m_d = \dfrac{\text{sen}\ (i_c + \beta)}{V_1}$ y $m_u = \dfrac{\text{sen}\ (i_c - \beta)}{V_1}$

Y los tiempos de intersección son: $t_{i \cdot d} = \dfrac{2 \cdot e_A \cdot \cos\ i_c}{V_1}$ y $t_{iu} = \dfrac{2 \cdot e_D \cdot \cos\ i_c}{V_1}$

Esas ecuaciones se combinan para obtener las más empleadas:

$$i_c = \frac{1}{2} \cdot \left(arc\ \text{sen}\ (m_d \cdot V_1) + arc\ \text{sen}\ (m_u \cdot V_1) \right)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(arc\ \text{sen}\ (m_d \cdot V_1) - arc\ \text{sen}\ (m_u \cdot V_1) \right)$$

La velocidad V_2 es: $V_2 = \dfrac{2 \cdot \cos\ \beta}{(m_d + m_u)}$ y, si el buzamiento es pequeño, $V_2 \cong \dfrac{2}{(m_d + m_u)}$

Salto de una falla (*s*): se parte de dos capas horizontales desplazadas por una falla vertical. Se definen dos tiempos de intersección, para las dromocronas del labio levantado y hundido respectivamente (t_{i1} y t_{i2}). El salto viene dado por: $s = (t_{i2} - t_{i1}) \cdot \dfrac{V_1 \cdot V_2}{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}$

Medio con gradiente continuo de velocidad: la velocidad aumenta con la profundidad según $V_P = V_0 + k \cdot z$, donde k es una constante y V_0 la velocidad para $z = 0$; k vale entre 0,5 y 1 s^{-1} en capas sedimentarias y sus unidades son km/s cada kilómetro, es decir, km s^{-1}/km = s^{-1}.

<u>Relación entre la distancia que recorre un rayo y la profundidad a la que penetra</u>, en un medio con gradiente continuo de velocidad:

$$\frac{1}{k^2 \cdot p^2} = \left(z + \frac{V_0}{k} \right)^2 + \left[x - \frac{\sqrt{1 - p^2 \cdot V_0^2}}{k \cdot p} \right]^2$$

, donde V_0 es la velocidad de las ondas P en la superficie, k la constante que regula el incremento de velocidad con la profundidad, x la proyección sobre la horizontal de la distancia recorrida por el rayo, z la profundidad para esa distancia y p el parámetro del rayo.

Es la ecuación de una circunferencia cuyo radio es $\dfrac{1}{k \cdot p}$, y cuyo centro está sobre una línea horizontal a una distancia $\dfrac{V_0}{k}$ por encima de la superficie. La distancia entre la fuente y la proyección sobre la horizontal del centro de la circunferencia viene dada por $\dfrac{\sqrt{1 - p^2 \cdot V_0^2}}{k \cdot p}$

Correcciones en sísmica de refracción

Tiempo de retardo (Δt_R): es la diferencia entre el tiempo empleado por la onda refractada en llegar a un punto separado una distancia x de la fuente, y el tiempo que hubiera empleado viajando horizontalmente esa misma distancia por el lecho de velocidad mayor (V_2): $\Delta t_R = t - \frac{x}{V_2}$

El tiempo de retardo tiene dos componentes, una relacionada con el extremo del disparo (Δt_{R1})y otra con el del receptor (Δt_{R2}): $\Delta t_R = \Delta t_{R1} + \Delta t_{R2}$

En el caso de una interfase horizontal, las dos componentes son iguales: $\Delta t_{R1} = \Delta t_{R2}$, y por tanto:

$$\Delta t_R = \Delta t_{R1} + \Delta t_{R2} = 2 \cdot \Delta t_{R1} = \frac{2 \cdot e \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$$

En el caso general, los espesores son distintos bajo el disparo (e_1) y bajo el receptor (e_2). Entonces:

$$\Delta t_{R1} = \frac{e_1 \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}, \text{ y } \Delta t_{R2} = \frac{e_2 \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$$

Normalmente se realiza una aproximación, válida cuando los buzamientos no son muy grandes, y se supone que $\Delta t_{R1} \cong \Delta t_{R2} = \frac{e \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$, donde e es el espesor medio.

Corrección topográfica *(Δt_T)*: se trata de "re-posicionar" tanto la fuente como el receptor en un plano horizontal de referencia ("datum"). Es decir, la corrección topográfica es el tiempo que hay que sumar o restar al tiempo total para obtener el tiempo que habría tardado la onda refractada si la fuente y el receptor estuvieran a la misma cota:

$$\Delta t_T = \frac{(h_1 - p + h_2 - 2 \cdot d) \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$$

, donde h_1 es la cota de la embocadura del sondeo desde el que se hace el disparo, p su profundidad, h_2 la cota del receptor, y d la cota del "datum". La corrección topográfica se resta al tiempo observado si el "datum" está por debajo del disparo y del receptor. Eso es lo normal, es decir, el "datum" se escoge por debajo. La resta equivale a bajar toda la dromocrona un tiempo igual a Δt_T.

Corrección de alteración *(Δt_a)*: se trata también de "re-posicionar" tanto la fuente como el receptor en un plano horizontal de referencia ("datum"), pero ahora hay que tener en cuenta la existencia de un lecho alterado de baja velocidad (V_0) y espesor a.

Si no hay diferencias de cota entre el disparo y el receptor, la corrección de alteración es:

$\Delta t_a = \frac{a \cdot \sqrt{V_2^2 - V_0^2}}{V_0 \cdot V_2}$, donde a es el espesor del lecho alterado por debajo del receptor.

Pero lo normal es que haya diferencias de cota y, además, el disparo se realiza en un sondeo, que atraviesa el lecho alterado, de forma que la explosión se hace en la roca no alterada. Entonces, la corrección de alteración es:

$$\Delta t_a = (h_1 - p + h_2 - 2 \cdot d - a) \cdot \frac{\sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2} + \frac{a \cdot \sqrt{V_2^2 - V_0^2}}{V_0 \cdot V_2}$$

, donde h_1 es la cota de la embocadura del sondeo desde el que se hace el disparo, p su profundidad, h_2 la cota del receptor, d la cota del "datum" y a el espesor del lecho alterado por debajo del receptor. Como normalmente el sondeo atraviesa todo el lecho alterado en el lado del disparo, su espesor ahí no se tiene en cuenta. La corrección de alteración se resta al tiempo observado si el "datum" está por debajo del disparo y del receptor, que es lo normal. La resta equivale a bajar toda la dromocrona un tiempo igual a Δt_a.

Exploración cortical y sísmica de gran ángulo

Tiempo reducido (t_r): los perfiles de sísmica de gran ángulo, o DSS ("deep seismic sounding") se suelen proyectar en un gráfico distancia-tiempo reducido (o normalizado): $t_r = t - \frac{x}{V_r}$, donde V_r es la velocidad de reducción. En corteza continental se emplea $V_r = 6$ km s^{-1} y para investigar el manto, $V_r = 8$ km s^{-1}. Eso para las ondas P. Cuando se usan ondas S, se aplica a esas velocidades una reducción de un factor $1/\sqrt{3}$. Una onda refractada que viaje a velocidad igual a V_r, dará llegadas que se alinearán según una recta horizontal en el gráfico distancia-tiempo reducido. Si su velocidad es menor que V_r, la recta tendrá su pendiente inclinada hacia el disparo, y si es mayor, la pendiente se inclinará en sentido opuesto. Las llegadas que se alinean según curvas son reflexiones de alto ángulo, o refracciones en un lecho con un gradiente de velocidades.

Para calcular el tiempo real a partir del reducido, no hay más que despejar: $t = t_r + \frac{x}{V_r}$

Ecuaciones de las diferentes llegadas en una agrupación de disparo en sísmica de reflexión

Onda directa: $t = \frac{x}{V_1}$, donde t es el tiempo, x la distancia y V_1 la velocidad del primer lecho.

Refracciones en interfases horizontales: $t = \frac{x}{V_2} + \frac{2 \cdot e \cdot \sqrt{V_2^2 - V_1^2}}{V_1 \cdot V_2}$, donde e es el espesor del primer lecho y V_1 y V_2 las velocidades encima y debajo de la interfase.

Reflexiones en interfases horizontales: $t = \frac{2}{V_1} \cdot \sqrt{z^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$, donde z es la profundidad y V_1 la velocidad por encima de la interfase.

Resolución en sísmica de reflexión

Resolución vertical: para que las capas sean detectables en sísmica de reflexión, su espesor (e) debe guardar cierta relación con la longitud de onda (λ) dominante. El límite de detectabilidad está alrededor de $e = \lambda/30$.

Cuando $e = \lambda/4$, se le llama espesor de sintonización, y entonces, techo y muro de la capa vienen señalados por un surco y un pico consecutivos (en pulsos cero-fase).
Resolución se define como el espesor para el cual pueden diferenciarse techo y muro de una capa, y es cualquier espesor igual o superior al espesor de sintonización.

Resolución horizontal: viene determinada por la anchura de la zona de Fresnel, que es el área de un reflector que produce una interferencia constructiva de las ondas reflejadas.
Este área es un círculo en un reflector horizontal, y su radio (rf) es el del círculo intersectado por el frente de onda en la superficie horizontal, cuando la onda que va 1/4 de λ por detrás de llega a esa superficie.

Su valor es $rf = \frac{V}{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{f}}$, donde V es la velocidad media, t el tiempo de ida y vuelta, o TWTT ("two-way travel time"), y f la frecuencia dominante.