Física Moderna FI-3102
Algunas soluciones de las tareas 2 y 3

T2 P1

i.- Analizar gráfico, queda para el lector.

ii.- De la parte anterior se tiene $\lambda_i = \Delta t(c+V)$ y $\lambda_r = \Delta t(c-V)$. Al dividir ambas cantidades obtenemos:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{c+V}{c-V}. \tag{0.1}$$

Recordemos que para una onda la frecuencia viene dada por $f = c/\lambda$. Luego, se tiene que:

$$\frac{f_r}{f_i} = \frac{c+V}{c-V}. \tag{0.2}$$

iii.- Se tiene que

$$\frac{\Delta f}{f} \equiv \frac{f_r - f_i}{f_i} = \frac{c+V}{c-V} - 1 = \frac{c+V-c+V}{c-V} = \frac{2V}{c-V} = \frac{2V}{c} + \mathcal{O}(V/c)^2. \tag{0.3}$$

Luego, si $V \ll c$, tendremos:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq \frac{2V}{c}. \tag{0.4}$$

Para $V = 120\text{Km/h}$ y $c = 3\times 10^5\text{Km/s}$, se tiene:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq 2.2222 \times 10^{-7}. \tag{0.5}$$

iv.- Se tiene que $f_i = 10.525 \times 10^9\text{s}^{-1}$. Luego, para $V = 120\text{Km/h}$ y $c = 3\times 10^5\text{Km/s}$, se tiene:

$$\Delta f \simeq 2.2222 \times 10^{-7} \times 10.525 \times 10^9\text{s}^{-1} = 2.3887 \times 10^3\text{s}^{-1}. \tag{0.6}$$

v.- Queremos distinguir entre la frecuencia f_r para dos velocidades $V_1 \ll c$ y $V_2 \ll c$ distintas. Dado que f_i está fija, tenemos:

$$\frac{\Delta f_1}{f} \simeq \frac{2V_1}{c}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta f_2}{f} \simeq \frac{2V_2}{c}. \tag{0.7}$$

Restando ambas relaciones tenemos:

$$\frac{f_{r2} - f_{r2}}{f_i} = \frac{\Delta f_2}{f} - \frac{\Delta f_1}{f} = \frac{2(V_2 - V_1)}{c}. \tag{0.8}$$

Luego, la resolución mínima viene dada por la diferencia entre las cantidades que se desean medir:

$$f_{r2} - f_{r2} = \frac{2(V_2 - V_1)}{c} f_i. \tag{0.9}$$

Luego, para $V_2 = 121$Km/h y $V_1 = 120$Km/h se tiene aproximadamente

$$f_{r2} - f_{r2} \simeq 20\text{Hz}. \tag{0.10}$$

T2 P2

Considere la existencia de partículas (inestables) que tienen una vida media finita y cuyo número en función del tiempo está dado por:

$$N(t) = N_0 \exp\left(\frac{-t \ln 2}{\tau_0}\right). \tag{0.11}$$

Siendo N_o el número de partículas que existen en $t = 0$ y τ_0 es la llamada vida media de las partículas, ya que en el tiempo $t = \tau_0$ el número inicial se ha reducido a la mitad:

$$N(0) = N_0, \qquad N(\tau) = \frac{N_0}{2}. \tag{0.12}$$

Los mesones π^+ , por ejemplo, se producen en colisiones de alta energía entre una partícula (rayo cósmico primario) y la atmósfera terrestre. Su vida media *propia* es $\tau_0 = 2,6 \times 10^{-8}$s. Suponiendo que N_0 mesones π^+ se han formado a una altura h de la tierra y que descienden hacia ella con rapidez $0.9999c$, llegando solamente el 1 %:

a.- Determine la altura h a la cual se han formado los mesones.

b.- Para esa altura, comente sobre el porcentaje que llegaría a la superficie terrestre si NO se hicieran correcciones relativistas.

Solución

Dado que la expresión (0.11) entrega la vida media de una partícula, t corresponde al tiempo propio de dicha partícula. Para no confundirnos, reescribamos la ecuación (0.11) de la siguiente forma

$$N(\tau) = N_0 \exp\left(\frac{-\tau \ln 2}{\tau_0}\right). \tag{0.13}$$

a.- Inicialmente tenemos N_0 mesones π^+. Manteniéndonos en el sistema de referencia en donde el flujo de mesones está en reposo, sabemos que después de cierto tiempo propio τ, el número de mesones se ha reducid a $N(\tau) = 0.01N_0$. Esto nos permite calcular τ sin conocer N_0 explícitamente. El resultado es:

$$\tau = \frac{\ln 100}{\ln 2}\tau_0 \simeq 6.6438\tau_0 = 1.7274 \times 10^{-7}\text{s}. \tag{0.14}$$

Adicionalmente, sabemos que vistos desde la Tierra, estos mesones se propagan con rapidez $v = 0.9999c$. Por lo tanto, la relación entre el tiempo propio τ y el tiempo Δt de un reloj en reposo en la Tierra es $\Delta t/\gamma = \tau$. Luego:

$$\Delta t = \tau\gamma = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1.7274 \times 10^{-7}}{\sqrt{1 - (0.9999)^2}}\text{s}^{-1} = 1.2215 \times 10^{-5}\text{s}. \tag{0.15}$$

Luego, durante dicho lapso de tiempo, a la velocidad $v = 0.9999c$ los mesones alcanzan a viajar:

$$h = v\Delta t \simeq 3.6641\text{Km}. \tag{0.16}$$

b.- Sin correcciones relativistas no distinguiríamos entre tiempo propio de los mesones y el tiempo medido por un reloj en reposo en la tierra. Por lo tanto, para esa altura y esa velocidad, habríamos usado $\Delta t = 1.2215 \times 10^{-5}$s en lugar de $\tau = 1.7274 \times 10^{-7}$s en la formula (0.13). Esto nos habría arrojado un porcentaje dramáticamente menor que el del caso correcto:

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(\frac{-\Delta t\, \ln 2}{\tau_0}\right) \simeq \exp(-325) \ll 0.01. \tag{0.17}$$

T3 P1

a.- La transformación de Lorentz que lleva de un sistema K a otro K', ambos inerciales, puede ser representado mediante el cambio de coordenadas

$$\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'}\Delta x^{\nu'} \tag{0.18}$$

donde $\Lambda^\mu{}_{\nu'}$ puede ser pensada como una matriz de 4×4 en donde los indices μ y ν' corresponden a filas y columnas respectivamente. Usted ya sabe que en el caso particular de que el sistema K' que se mueve con velocidad v en la dirección x del sistema K, entonces $\Lambda^\mu{}_{\nu'}$ corresponde a un boost y puede ser expresado de la forma

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.19}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v$ (con $c = 1$). A partir de este resultado escriba la representación matricial de $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \equiv \eta^{\mu'\nu'}\eta_{\nu\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$, donde ahora los indices μ' y ν corresponden a filas y columnas respectivamente. Indique si la matriz es simétrica, antisimétrica o simplemente esta propiedad no está definida. ¿Cuál es la representación matricial de la equación $\Lambda^{\mu'}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$?

b.- Considere ahora el caso en que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ corresponde a una rotación en torno al eje x^3. En este caso usted ya sabe que ésta transformación puede ser representada en forma matricial como

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (0.20)$$

Repita lo solicitado en la parte anterior (parte a) de este problema.

c.- Demuestre que a partir del invariante $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ se cumple que $\Lambda^{\mu}{}_{\rho'}\Lambda^{\rho'}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Muestre que este resultado implica que $\det(\Lambda) = \pm 1$. ¿Cual es el signo de las matrices consideradas en las partes anteriores?

d.- El tensor totalmente anti-simétrico (Levi-Civita) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se evalúa como sigue. Si dos de sus índices son iguales, su valor es 0. Si sus índices están ordenados como $\{0\,1\,2\,3\}$ o cualquier otra permutación par de ellos, toma un valor igual a $+1$. Si es una permutación impar del orden correlativo, su valor es -1. Calcule explícitamente el valor de este tensor en el sistema K', que se mueve con respecto a K con una velocidad v en la dirección de $+x$.

Solución

Este problema está integramente desarrollado en los apuntes de la clase.

T3 P2

a.- Dadas las componentes $T_{\mu\nu}$ de un tensor arbitrario, se define la parte simétrica de tal tensor como $T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$ y la parte anti-simétrica como $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}[T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}]$. Observe que $T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$. Considere un tensor-$(2,0)$ X y un vector V con componentes:

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad V^{\mu} = (-1, 2, 0, -2). \qquad (0.21)$$

Calcule las siguientes cantidades:

$$X^{\mu}{}_{\nu}, \qquad X_{\mu}{}^{\nu}, \qquad X^{(\mu\nu)}, \qquad X^{[\mu\nu]}, \qquad X^{\lambda}{}_{\lambda}, \qquad V^{\mu}V_{\mu}, \qquad V_{\mu}X^{\mu}{}_{\nu}. \tag{0.22}$$

b.-Considere el siguiente tensor que en un sistema K tiene por componentes:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & V_1 & V_2 & V_3 \\ -V_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ -V_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ -V_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.23}$$

Observe que es un tensor anti-simétrico. Escriba este tensor en un sistema de referencia K rotado en un ángulo θ con respecto a K' alrededor del eje x^3 (le será útil recordar la expresión (0.20) del problema anterior). Discuta la forma en que transforman V_i y U_i.

Solución

a.- Primero recordemos que tanto la métrica $\eta_{\mu\nu}$ como su inversa $\eta^{\mu\nu}$ pueden ser representadas matricialmente como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.24}$$

donde, en ambos casos hemos identificado μ con filas y ν con columnas. La métrica y su inversa son usadas para subir y bajar índices. Es decir, se tiene $X^{\mu}{}_{\nu} = X^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}$. Luego, teniendo cuidado en identificar $(\mu\rho)$ =(filas, columnas) y (ρ,ν) =(filas, columnas), podemos escribir:

$$X^{\mu}{}_{\nu} = X^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{0.25}$$

donde μ representa filas y ν columnas. Análogamente:

$$X_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\rho}X^{\rho\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{0.26}$$

donde μ representa filas y ν columnas. En las expresiones anteriores hemos ordenado las posiciones de $\eta_{\mu\nu}$ y $X^{\mu\nu}$ para que estén de acuerdo a la notación matricial usual, sin embargo recuerden que se puede escribir $X^{\mu}{}_{\nu} = X^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu} = \eta_{\rho\nu}X^{\mu\rho}$. Adicionalmente, dado que la métrica es simétrica $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, también podemos escribir $X^{\mu}{}_{\nu} = X^{\mu\rho}\eta_{\nu\rho} = \eta_{\nu\rho}X^{\mu\rho}$.

Si no se desea usar matrices para calcular $X^{\mu}{}_{\nu}$ o $X_{\mu}{}^{\nu}$ podemos ir componente por componente. Por ejemplo, para $X^{\mu}{}_{\nu}$ podemos escribir:

$$X^{0}{}_{0} = X^{0\rho}\eta_{\rho 0} = X^{00}\eta_{00} = -X^{00}, \tag{0.27}$$
$$X^{0}{}_{i} = X^{0\rho}\eta_{\rho i} = X^{0j}\delta_{ji} = X^{0i}, \tag{0.28}$$
$$X^{i}{}_{0} = X^{i\rho}\eta_{\rho 0} = X^{i0}\eta_{00} = -X^{i0}, \tag{0.29}$$
$$X^{i}{}_{j} = X^{i\rho}\eta_{\rho j} = X^{ik}\delta_{kj} = X^{ij}. \tag{0.30}$$

Se puede apreciar que hemos explotado convenientemente la notación de suma de índices de Einstein para desarrollar estas expresiones. En forma análoga, para $X_{\mu}{}^{\nu}$ tenemos:

$$X_{0}{}^{0} = X^{\rho 0}\eta_{0\rho} = X^{00}\eta_{00} = -X^{00}, \tag{0.31}$$
$$X_{i}{}^{0} = X^{\rho 0}\eta_{\rho i} = X^{j0}\delta_{ji} = X^{0i}, \tag{0.32}$$
$$X_{0}{}^{i} = X^{\rho i}\eta_{\rho 0} = X^{0i}\eta_{00} = -X^{0i}, \tag{0.33}$$
$$X_{i}{}^{j} = X^{\rho j}\eta_{\rho i} = X^{kj}\delta_{ki} = X^{ij}. \tag{0.34}$$

Noten que en el desarrollo de estas últimas expresiones ni siquiera nos hemos preocupado de ordenar $\eta_{\mu\nu}$ y $T^{\mu\nu}$ para que los índices sumados estén unos juntos a los otros (esto sólo es importante para la notación matricial). Ahora podemos ordenar todos estos objetos en una sola matriz.

Continuemos con el problema. Por definición tenemos: $T^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu})$ y $T^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\mu\nu})$. No es difícil encontrar que:

$$X^{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad X^{[\mu\nu]} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.35}$$

Se pueden apreciar las simetrías de ambas matrices. Veamos ahora la expresión $X^{\lambda}{}_{\lambda}$. Esta corresponde a la traza de $X^{\mu}{}_{\nu}$. Notemos que hay varias formas análogas de expresar dicha cantidad:

$$X^{\lambda}{}_{\lambda} = \sum_{\lambda} X^{\lambda}{}_{\lambda} = X^{0}{}_{0} + \sum_{i} X^{i}{}_{i} = X^{0}{}_{0} + X^{1}{}_{1} + X^{2}{}_{2} + X^{3}{}_{3}. \tag{0.36}$$

Si lo deseamos, también podemos escribir:

$$X^{\lambda}{}_{\lambda} = \eta_{\nu\lambda}X^{\lambda\nu} = \eta_{\nu\mu}X^{\mu\nu} = \eta_{\lambda\mu}X^{\mu\lambda} = X_{\lambda}{}^{\lambda}, \tag{0.37}$$

en donde hemos explotado la regla de suma de índices. Sea como sea, uno obtiene:

$$X^{\lambda}{}_{\lambda} = -4. \tag{0.38}$$

Procedamos ahora con $V^{\mu}V_{\mu}$. Recordemos que $V^{\mu} = (-1, 2, 0, -2)$. Por otro lado, por definición se tiene $V_{\mu} = \eta_{\mu\nu}V^{\nu}$. Luego:

$$V_0 = \eta_{0\mu}V^{\mu} = \eta_{00}V^0 = -V^0, \qquad V_i = \eta_{i\mu}V^{\mu} = \eta_{ij}V^j = V^i. \tag{0.39}$$

Lo anterior nos permite escribir $V^{\mu} = (1, 2, 0, -2)$. Ahora,

$$V^{\mu}V_{\mu} = \sum_{\mu} V^{\mu}V_{\mu} = V^0V_0 + V^1V_1 + V^2V_2 + V^3V_3 = -1 + 4 + 4 = 7. \tag{0.40}$$

Análogamente:

$$V^{\mu}V_{\mu} = V^{\mu}V^{\nu}\eta_{\mu\nu} = V^0V^0\eta_{00} + V^iV^j\delta_{ij} = -(V^0)^2 + \sum_i (V^i)^2 = -1 + 4 + 4 = 7. \tag{0.41}$$

Para concluir, veamos $V_{\mu}X^{\mu}{}_{\nu}$. Al igual que con los objetos anteriores, hay muchas formas de deducir el valor de esta contracción. Optemos por una notación puramente tensorial (sin usar matrices), componente por componente: Por ejemplo, la componente 0 de $V_{\mu}X^{\mu}{}_{\nu}$

$$V_{\mu}X^{\mu}{}_0 = V_0X^0{}_0 + V_iX^i{}_0 = V_0X^0{}_0 + V_1X^1{}_0 + V_2X^2{}_0 + V_3X^3{}_0 \tag{0.42}$$
$$= 1 \times (-2) + 2 \times 1 + 0 \times 1 - 2 \times (2) = -4. \tag{0.43}$$

Repitiendo esto para las otras componentes:

$$V_{\mu}X^{\mu}{}_1 = -2 \tag{0.44}$$
$$V_{\mu}X^{\mu}{}_2 = 5 \tag{0.45}$$
$$V_{\mu}X^{\mu}{}_3 = 7. \tag{0.46}$$

Obviamente se puede llegar al mismo resultado usando notación matricial, en donde estaríamos tentados en juntar todo en un solo vector:

$$V_{\mu}X^{\mu}{}_{\nu} = (-4, -2, 5, 7). \tag{0.47}$$

b.- Esta parte del problema está integramente desarrollada en los apuntes de la clase.

T3 P3

Suponga que Ud. está solitario en una nave en el espacio infinito. Sólo existe una estrella que puede usar de referencia. Tiene en su poder un set de tres giróscopos que le permiten comparar direcciones. La nave se impulsa mediante unos motores iónicos con los que Ud. puede impulsar a la nave en diferentes direcciones.

Usando la estrella como referencia, por ejemplo, si Ud. se da una velocidad ($-V_0$) en el eje x, (un "boost" en la dirección $-x$ con velocidad V_0), la estrella parecerá moverse en la dirección $+x$, con una velocidad V_0.

a.- Inicialmente la nave está en reposo con respecto a la estrella. Usando las transformaciones de Lorentz dadas, aplique un impulso inicial (un boost) en la dirección $+x$ y posteriormente un impulso igual en la dirección $+y$, ambas con la misma velocidad V_0. La 4-velocidad inicial a la cual se aplica la primera transformación de Lorentz es: $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Demuestre que la velocidad final *NO* apunta en la dirección esperada: 45^0 con respecto a la dirección inicial. (Puesto de otra forma, la estrella NO se mueve en la dirección esperada).

b.- Encuentre un valor para la velocidad del impulso ("boost") en la dirección y, V_1 ($\neq V_0$) tal que la estrella se mueva en la dirección (45^o).

c.- Considere ahora la siguiente situación: Inicialmente la nave está en reposo con respecto a la estrella. En dicho sistema la 4-velocidad de la nave está dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Aplique los siguientes boost sucesivos: V_0 en el eje x, V_0 en el eje y, V_0 apuntando en la dirección del eje $-x$, y V_0 en el eje $-y$. Cual es el valor del 4-vector final?

d.- Considere ahora la siguiente situación: Inicialmente la nave está en reposo con respecto a la estrella. En dicho sistema la 4-velocidad de la nave está dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Aplique los siguientes boost sucesivos: V_0 en el eje x, V_1 en el eje y, V_1 apuntando en la dirección del eje $-x$, y V_0 en el eje $-y$. Si V_1 es el valor obtenido en la parte b de este problema: ¿Cual es el valor del 4-vector final?

e.- El punto anterior puede ser pensado como la aplicación de una sola transformación ${\Lambda^{\nu'}}_\mu$ sobre el 4-vector original u^μ. Calcule explícitamente la representación matricial de esta transformación. ¿A qué tipo de transformación corresponde?

Solución

Usaremos $c = 1$. Partamos notando la frase del enunciado: "Usando la estrella como referencia, por ejemplo, si Ud. se da una velocidad ($-V_0$) en el eje x, (un "boost" en la dirección $-x$ con velocidad V_0), la estrella parecerá moverse en la dirección $+x$, con una velocidad V_0."

Esto quiere decir que, en el sistema inercial de la nave, si la estrella tiene por 4-velocidad al vector u^μ, entonces un impulso de velocidad V_0 en la dirección $+x$ lleva al 4-vector u^μ a otro $u^{\mu'}$ dado por

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -V_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -V_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-V_0^2}}. \tag{0.48}$$

En otras palabras, la nueva 4-velocidad de la estrella será, desde la perspectiva de la nave será:

$$u^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma_0 u^0 - V_0\gamma_0 u^1 \\ -V_0\gamma_0 u^0 + \gamma_0 u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}. \tag{0.49}$$

De igual forma, en el sistema inercial de la nave, si la estrella tiene por 4-velocidad al vector u^μ, entonces un impulso de velocidad V_0 en la dirección $+y$ lleva al 4-vector u^μ a otro $u^{\mu'}$ dado por

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & -V_0\gamma_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -V_0\gamma_0 & 0 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-V_0^2}}. \tag{0.50}$$

Por lo tanto, la nueva 4-velocidad de la estrella será, desde la perspectiva de la nave ahora será:

$$u^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma_0 u^0 - V_0\gamma_0 u^2 \\ u^1 \\ -V_0\gamma_0 u^0 + \gamma_0 u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}. \tag{0.51}$$

Desarrollemos el problema:

a.- La estrella esta inicialmente en reposo con respecto a la nave. Esto quiere decir que en el sistema de la nave (nosotros) la 4-velocidad de la estrella es $u^\mu = (1,0,0,0)$. Se nos pide aplicar un impulso inicial (un boost) en la dirección $+x$ y posteriormente un impulso igual en la dirección $+y$, ambas con la misma velocidad V_0. Usando la ecuación (0.49), el primer impulso da como resultado:

$$u^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ -V_0\gamma_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.52}$$

Y usando (0.51), el segundo impulso da como resultado:

$$u^{\mu''} = \begin{pmatrix} \gamma_0 u^{0'} - V_0\gamma_0 u^{2'} \\ u^{1'} \\ -V_0\gamma_0 u^{0'} + \gamma_0 u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0\gamma_0 \\ -V_0\gamma_0 \\ -V_0\gamma_0\gamma_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.53}$$

Para apreciar que la estrella no se mueve en 45° con respecto al eje x utilizado por nosotros en la nave, basta notar que $u^{1''} \neq u^{2''}$ dado que $-V_0\gamma_0 \neq -V_0\gamma_0\gamma_0$ a menos que $V_0 = 0$.

b.- Ahora, en vez de aplicar V_0 en el segundo impulso, aplicaremos $V_1 \neq V_0$. Repitiendo los pasos anteriores, en esta oportunidad tenemos:

$$u^{\mu''} = \begin{pmatrix} \gamma_1 u^{0'} - V_1\gamma_1 u^{2'} \\ u^{1'} \\ -V_1\gamma_1 u^{0'} + \gamma_1 u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_0 \\ -V_0\gamma_0 \\ -V_1\gamma_1\gamma_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}}. \tag{0.54}$$

Luego, para que la estrella sea percibida moviéndose en 45° con respecto al eje x utilizado por nosotros en la nave, debemos imponer la condición $u^{1''} = u^{2''}$, o equivalentemente:

$$-V_0\gamma_0 = -V_1\gamma_1\gamma_0. \tag{0.55}$$

Es decir, necesitamos imponer: $V_0 = V_1\gamma_1$. Un poco de álgebra nos permite deducir que

$$V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{1+V_0^2}}. \tag{0.56}$$

c.- Inicialmente la estrella está en reposo con respecto a la nave, por lo tanto, la velocidad de la estrella en el sistema de la nave es $u^\mu = (1,0,0,0)$. (Por su puesto, esto es equivalente a decir que la 4-velocidad de la nave está dada por $u^\mu = (1,0,0,0)$ en el sistema de la estrella. Sin embargo, para resolver este problema continuaremos con nuestra convención de usar la estrella como un punto referencia que se mueve con respecto a nosotros). De la parte a, ya sabemos que un impulso V_0 en el eje x seguido de un impulso V_0 en el eje y dan como resultados:

$$u^{\mu''} = \begin{pmatrix} \gamma_0 u^{0'} - V_0\gamma_0 u^{2'} \\ u^{1'} \\ -V_0\gamma_0 u^{0'} + \gamma_0 u^{2'} \\ u^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0\gamma_0 \\ -V_0\gamma_0 \\ -V_0\gamma_0\gamma_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.57}$$

Apliquemos ahora un impulso V_0 apuntando en la dirección del eje $-x$. Esto quiere decir que debemos aplicar (0.49) pero con $-V_0$ en lugar de V_0. En consecuencia, obtenemos:

$$u^{\mu'''} = \begin{pmatrix} \gamma_0 u^{0''} + V_0\gamma_0 u^{1''} \\ V_0\gamma_0 u^{0''} + \gamma_0 u^{1''} \\ u^{2''} \\ u^{3''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma_0)^3 - (V_0\gamma_0)^2 \\ V_0(\gamma_0)^3 - V_0(\gamma_0)^2 \\ -V_0(\gamma_0)^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.58}$$

Finalmente, aplicando sobre este vector un impulso V_0 en el eje $-y$, obtenemos:

$$u^{\mu''''} = \begin{pmatrix} \gamma_0 u^{0'''} + V_0\gamma_0 u^{2'''} \\ u^{1'''} \\ V_0\gamma_0 u^{0'''} + \gamma_0 u^{2'''} \\ u^{3'''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma_0)^4 - 2(V_0)^2(\gamma_0)^3 \\ V_0(\gamma_0)^3 - V_0(\gamma_0)^2 \\ V_0(\gamma_0)^4 - (V_0\gamma_0)^3 - V_0(\gamma_0)^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.59}$$

Esta expresión nos revela que aún cuando hemos aplicado impulsos a la nave de igual magnitud, en forma circular, no hemos vuelto al sistema en reposo de la estrella!

d.- Repitiendo todos los pasos anteriores, pero ahora con $V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{1+V_0^2}}$ obtenido en la parte b, encontramos:

$$u^{\mu''''} = (1, 0, 0, 0). \tag{0.60}$$

Es decir, hemos vuelto al sistema en reposo de la estrella.

e.- La transformación total de la parte d, aplicada sobre el 4-vector inicial $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ corresponde a la siguiente sucesión de transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu''''}{}_{\mu} &= \Lambda^{\mu''''}{}_{\mu'''}\Lambda^{\mu'''}{}_{\mu''}\Lambda^{\mu''}{}_{\mu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & V_0\gamma_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_0\gamma_0 & 0 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & V_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ V_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & -V_1\gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -V_1\gamma_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 & -V_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -V_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{0.61}$$

Usando $V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{1+V_0^2}}$, la multiplicación de todas estas matrices dan como resultado:

$$\Lambda^{\mu''''}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-V_0^4} & -V_0^2 & 0 \\ 0 & V_0^2 & \sqrt{1-V_0^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.62}$$

Esta transformación corresponde a una rotación en un ángulo $\sin\theta = V_0^2$ con respecto al eje z. Este resultado confirma nuestro resultado en la parte d, ya que:

$$u^{\mu''''} = \Lambda^{\mu''''}{}_{\mu} u^{\mu} = (1, 0, 0, 0), \tag{0.63}$$

para $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$.