

Cátedra X: Tensores y sus aplicaciones

10.1 Clasificación del grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz consiste en el conjunto de todas las transformadas de Lorentz. Recuerden que éstas vienen definidas como aquellas transformadas lineales de las coordenadas x^μ que dejan invariante al intervalo espacio-temporal

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (10.1)$$

Recordemos que si $\Lambda^\mu_{\nu'}$ es una de tales transformaciones, y $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ su inversa, entonces podemos escribir:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \eta^{\mu\rho} \eta_{\nu'\sigma'} \Lambda^{\sigma'}_{\rho}. \quad (10.2)$$

Notemos que la expresión anterior puede ser reescrita de la forma:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \eta^{\mu\rho} \Lambda_\rho^{\sigma'} \eta_{\sigma'\nu'}, \quad (10.3)$$

donde $\Lambda_\rho^{\sigma'}$ es la transpuesta de $\Lambda^{\sigma'}_{\rho}$. Luego, si $\Lambda^\mu_{\nu'}$ corresponden a los elementos de una matriz Λ , la expresión anterior puede ser escrita en la forma matricial:

$$\Lambda = \eta^{-1} (\Lambda^{-1})^t \eta. \quad (10.4)$$

donde el símbolo t es utilizado para distinguir la operación transpuesta. Calculando el determinante de la relación anterior obtenemos:

$$(\det \Lambda)^2 = 1. \quad (10.5)$$

Para llegar a esta expresión necesitamos recordar que el determinante es un mapa multiplicativo que satisface las propiedades $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ y $\det(A^t) = \det A$. (Noten además que $\det \eta = -1$ y $\det \eta^{-1} = -1$). Vemos entonces que una transformación de Lorentz Λ satisface

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (10.6)$$

En general una transformada de Lorentz cae dentro de una de las cuatro siguientes categorías:

10.1.1 Grupo ortocrono propio

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det \Lambda = +1$ y $\Lambda^0_{0'} > 0$. Ejemplos de tales transformadas son todas las que hemos estudiado hasta el momento, es decir boosts y rotaciones.

10.1.2 Inversiones espaciales

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det \Lambda = -1$ y $\Lambda^0_{0'} > 0$. Dichas transformadas siempre involucran una inversión espacial. Ejemplos sencillos son:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Observen que en el primer ejemplo hemos invertido la dirección de una de las coordenadas, la del eje x^1 , mientras que en el segundo hemos invertido las direcciones de todas. Noten por otro lado, que la transformación

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

aunque parece estar invirtiendo el sentido espacial de las coordenadas, pertenece al grupo ortocrono propio, y de hecho corresponde a una rotación! (Una rotación en 180° en torno al eje x^3).

10.1.3 Inversiones temporales

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det \Lambda = -1$ y $\Lambda^0_{0'} < 0$. Dichas transformadas siempre involucran una inversión temporal. Un ejemplo sencillo es:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

10.1.4 Inversiones temporales

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det \Lambda = +1$ y $\Lambda^0_{0'} < 0$. Dichas transformadas siempre involucran una inversión temporal y una inversión

espacial. Un ejemplo sencillo es:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

Observen que estas transformaciones pueden ser obtenidas a partir de la aplicación sucesiva de una inversión temporal y una transformación espacial.

10.2 El tensor de Levi-Civita

Olvidemos por un rato el álgebra de tensores que hemos desarrollado, y definamos un símbolo con n -índices $\tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}$ (con cada uno de sus índices tomando valores entre 1 y n (es decir $i_k = 1, \dots, n$ con $k = 1, \dots, n$) de la siguiente forma:

$$\tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } i_1 \dots i_n \text{ es una permutación par de } 1, 2, 3, \dots, n \\ -1 & \text{si } i_1 \dots i_n \text{ es una permutación impar de } 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (10.11)$$

El que $i_1 \dots i_n$ sea una permutación par (impar) de $1, 2, 3, \dots, n$ significa que el orden $i_1 \dots i_n$ ha sido obtenido mediante un número par (impar) de intercambios de índices sucesivos. Por ejemplo, para el caso $n = 3$, el orden de índices $i_1 i_2 i_3 = 123$ es una permutación par de 123, ya que hay *cero* intercambios de índices de por medio. El orden de índices $i_1 i_2 i_3 = 213$ es una permutación impar de 123, ya que para llegar a $i_1 i_2 i_3 = 213$ a partir de 123 se requiere *una* permutación $12 \rightarrow 21$ de los dos primeros índices. El orden de índices $i_1 i_2 i_3 = 312$ es una permutación par de 123, ya que para llegar a $i_1 i_2 i_3 = 312$ a partir de 123 se requieren *dos* permutaciones sucesivas: primero la permutación $23 \rightarrow 32$ y luego la permutación $13 \rightarrow 31$.

El objeto definido en la ecuación (10.11) es el llamado *simbolo* de Levi-Civita definido sobre un espacio n -dimensional. Nos ofrece la posibilidad de definir al determinante $\det A$ de una matriz $n \times n$ arbitraria A , con componentes A^i_j , en forma elegante:

$$(\det A) \tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n} \equiv A^{j_1}_{i_1} \cdots A^{j_n}_{i_n} \tilde{\epsilon}_{j_1 \dots j_n}, \quad (10.12)$$

donde estamos usando la convención de Einstein para la suma de índices. Para convencernos de que tal definición es correcta, evaluemos el caso $i_1 \dots i_n = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$\det A = A^{j_1}_1 \cdots A^{j_n}_n \tilde{\epsilon}_{j_1 \dots j_n}. \quad (10.13)$$

Observen que $\tilde{\epsilon}_{j_1 \dots j_n}$ evita que se repitan elementos de A^i_j en la multiplicación de cada término, y además, dada la anti-simetría de $\tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}$ cada término en la suma va cambiando de signo.

Nada nos impide definir el símbolo de Levi-Civita para el caso particular del espacio-tiempo 4-dimensional. Dado un sistema de coordenadas x^μ , definimos el símbolo de Levi-Civita como aquel objeto con índices griegos que tiene por elementos

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutación par de } 0123 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutación impar de } 0123 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (10.14)$$

Utilizando la definición de determinante de la ecuación (10.12), encontramos que dado un tensor $A^\mu{}_\nu$ del tipo $(1,1)$ (donde μ denota filas y ν columnas), tenemos:

$$(\det A)\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv A^\alpha{}_\mu A^\beta{}_\nu A^\gamma{}_\rho A^\delta{}_\sigma \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (10.15)$$

En particular, si bien sabemos que Λ no es un tensor, podemos utilizar la propiedad algebraica de la ecuación (10.15) para escribir:

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \Lambda^\rho{}_{\rho'} \Lambda^\sigma{}_{\sigma'} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \tilde{\epsilon}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}. \quad (10.16)$$

Supongamos ahora que definimos un tensor ϵ tipo $(0,4)$ cuyas componentes $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ coincidan con los del símbolo de Levi-Civita, en cierto sistema de coordenadas x^μ . Es decir

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (10.17)$$

Dicho tensor es conocido como el tensor de Levi-Civita. Preguntemonos ahora como se ve este tensor en otros sistemas de referencia. Para ello debemos calcular las componentes $\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ del tensor de Levi-Civita en otra base $\hat{e}_{\mu'}$. Dado que conocemos sus componentes en un sistema de referencia determinado, podemos calcular sus componentes en cualquier otro sistema mediante la relación:

$$\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \Lambda^\rho{}_{\rho'} \Lambda^\sigma{}_{\sigma'} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (10.18)$$

Con la ayuda de (10.15) podemos calcular el lado derecho de la ecuación anterior para obtener el resultado:

$$\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = (\det \Lambda) \tilde{\epsilon}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}. \quad (10.19)$$

De esta forma vemos que si Λ es un boost o una rotación (grupo ortocrono propio), entonces $\det \Lambda = +1$, y el tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ se escribe de forma idéntica en todo sistema de referencia.

10.3 Rotaciones de un tensor antisimétrico

Consideremos un tensor antisimétrico $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$. Observen que las únicas componentes que tienen una chance de ser distintas de cero son $A_{0i} = -A_{i0}$, y $A_{ij} = -A_{ji}$ con $i \neq j$.

En general, resulta útil escribir dicho tensor en la forma siguiente:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -V_1 & -V_2 & -V_3 \\ V_1 & 0 & U^3 & -U^2 \\ V_2 & -U^3 & 0 & U^1 \\ V_3 & U^2 & -U^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.20)$$

Luego, en términos de V_i y U^i tenemos:

$$A_{0i} = -V_i, \quad A_{i0} = V_i, \quad A_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ijk} U^k, \quad (10.21)$$

donde $\tilde{\epsilon}_{ijk}$ es el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional. Para justificar esta notación, veamos como transforma $A_{\mu\nu}$ bajo rotaciones. Una rotación arbitraria aplicada sobre $A_{\mu\nu}$ define nuevos componentes $A_{\mu'\nu'}$ dados por:

$$A_{\mu'\nu'} = \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} A_{\mu\nu}, \quad \text{donde} \quad \Lambda^\mu_{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^i_{j'} \end{pmatrix}. \quad (10.22)$$

Evidentemente, las componentes de A satisfacen las mismas propiedades de anti-simetría: $A_{\mu'\nu'} = -A_{\nu'\mu'}$. Desarrollando la expresión anterior, vemos que los elementos $A_{0'i'}$ de A en el nuevo sistema de referencia vienen dados por:

$$A_{0'i'} = \Lambda^\mu_{0'} \Lambda^\nu_{i'} A_{\mu\nu} = \Lambda^0_{0'} \Lambda^i_{i'} A_{0i} = R^i_{i'} A_{0i}. \quad (10.23)$$

Por lo tanto, bajo rotaciones V_i transforma como un 3-vector:

$$V_{i'} = R^j_{i'} V_j. \quad (10.24)$$

Analicemos ahora lo que pasa con las componentes $A_{i'j'}$ de A en el nuevo sistema de coordenadas. Estas vienen dadas por:

$$A_{i'j'} = \Lambda^\mu_{i'} \Lambda^\nu_{j'} A_{\mu\nu} = \Lambda^i_{i'} \Lambda^j_{j'} A_{ij} = R^i_{i'} R^j_{j'} A_{ij}. \quad (10.25)$$

Este resultado nos permite escribir

$$\tilde{\epsilon}_{i'j'k'} U^{k'} = R^i_{i'} R^j_{j'} \tilde{\epsilon}_{ijk} U^k. \quad (10.26)$$

Recordemos sin embargo que una rotación satisface $R^j_{k'} R^{k'}_i = \delta^j_i$. Por lo que la expresión anterior puede ser reescrita de la manera:

$$\tilde{\epsilon}_{i'j'k'} U^{k'} = (R^i_{i'} R^j_{j'} R^k_{k'} \tilde{\epsilon}_{ijk}) R^{k'}_l U^l = \det R \tilde{\epsilon}_{i'j'k'} R^{k'}_l U^l, \quad (10.27)$$

en donde usamos el resultado general para expresar un determinante con la ayuda del símbolo de Levi-Civita. Dado que una rotación satisface $\det R = 1$, vemos que

$$\tilde{\epsilon}_{i'j'k'} U^{k'} = \tilde{\epsilon}_{i'j'k'} R^{k'}_l U^l. \quad (10.28)$$

De aquí, deducimos que $U^{i'} = R^{i'}_j U^j$. Para concluir, recuerden que $R^{i'}_j = \delta^{i'k'} \delta_{jl} R^l_{k'}$. Por lo tanto, finalmente podemos escribir

$$U_{i'} = R^j_{i'} U_j, \quad (10.29)$$

donde hemos bajado los índices de U^i con la 3-métrica δ_{ij} . Vemos por lo tanto que U_i , al igual que V^i , transforma como un 3-vector. Esto quiere decir que un tensor antisimétrico del tipo $(0, 2)$ acomoda en forma natural dos 3-vectores. No olviden que podemos usar la métrica para subir y bajar índices, por lo que A^μ_ν y $A^{\mu\nu}$ también acomodan pares de 3-vectores.

Ejercicio: Es importante tener en mente que esta propiedad es útil solo si consideramos rotaciones. Si consideramos boosts, las componentes de V_i y U^i necesariamente se mezclarán las unas con las otras. Estudie como transforma $A_{\mu\nu}$ bajo la aplicación de un boost.

10.4 Ecuaciones de Maxwell

Una de las aplicaciones más importantes y poderosas del formalismo tensorial consiste en expresar las ecuaciones de Maxwell en forma covariante (escrita unicamente en términos de tensores). Recordemos que, en el vacío, éstas están dadas por ($c = 1$)

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{j}, \quad (10.30)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (10.31)$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0, \quad (10.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (10.33)$$

donde $\nabla \times$ es el rotor y $\nabla \cdot$ es la divergencia. Recordemos que $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ es el campo magnético, $\vec{j}$ es la corriente eléctrica, y ρ es la densidad de carga eléctrica. Para elucidar como expresar estas ecuaciones en forma covariante, escribámoslas primero usando notación 3-tensorial. Para ello, observen primero que el rotor aplicado sobre un vector $\vec{V}$ tiene por componentes

$$(\nabla \times \vec{V})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j V_k. \quad (10.34)$$

Así mismo, la divergencia de un vector $\nabla \cdot \vec{V}$ puede ser escrita como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \partial_i V^i. \quad (10.35)$$

Luego, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell de la forma:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = j^i, \quad (10.36)$$

$$\partial_i E^i = \rho, \quad (10.37)$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0, \quad (10.38)$$

$$\partial_i B^i = 0. \quad (10.39)$$

Sabemos por experiencia que E^i y B^i transforman como 3-vectores bajo rotaciones. Debemos preguntarnos entonces de qué objetos 4-dimensionales pueden E^i y B^i ser 3-componentes. Sin duda, la primera alternativa que debemos explorar es la posibilidad de que éstos pertenezcan a 4-vectores con componentes E^μ y B^μ . Esto significa que debemos buscar entre las ecuaciones de Maxwell cantidades físicas que sean candidatas a ser identificadas con E^0 y B^0 . Lamentablemente, a parte de ρ y j^i (que son cuatro cantidades), no hay más objetos a partir de los cuales podemos elegir candidatos para E^0 y B^0 . Por otro lado, sabemos que las ecuaciones de Maxwell son válidas aún en la ausencia de densidades de cargas ρ y corrientes j^i , por lo simplemente no podemos acomodar E^i y B^i en pares de 4-vectores.

Estamos por lo tanto obligados a considerar un tensor de otro tipo. El siguiente caso que podemos considerar es el caso de un tensor con dos índices. Por ejemplo un tensor tipo $(0, 2)$. Como hemos visto en la sección anterior, un tensor antisimétrico permite acomodar dos 3-vectores en forma natural. Resulta atractivo entonces definir un tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$ de la forma:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.40)$$

Resulta que en efecto es posible utilizar este tensor para reescribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante. No es difícil mostrar que (haga este ejercicio!):

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu, \quad (10.41)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (10.42)$$

Donde $j^\nu = (\rho, j^i)$. Noten que también fue necesario ordenar ρ y j^i en un 4-vector! A esta cantidad se le denomina 4-corriente. Estas son las celebres ecuaciones de Maxwell en forma covariante. El hecho de que éstas pueden efectivamente ser escritas en forma covariante es de fundamental importancia: Recuerden que uno de los cimientos que usamos para justificar los principios de la relatividad especial fue el hecho de que la luz, cuya dinámica está descrita por las ecuaciones de Maxwell, se propaga a una velocidad universal, y que

todas las leyes de la física deben ser escritas en forma idéntica en sistemas de referencia inerciales.

Para concluir, recordemos que es posible definir un potencial vectorial $\vec{A}$ y un potencial electrostático ϕ de modo que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (10.43)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}. \quad (10.44)$$

No es difícil comprobar que ϕ y $\vec{A}$ pueden ser acomodados en un sólo 4-vector $A^\mu = (\phi, A^i)$, de modo que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (10.45)$$

Al 4-vector A^μ se le llama campo de *gauge*, y es uno de los objetos más importantes en la física contemporánea. Una de las propiedades más importantes es que $F_{\mu\nu}$ es invariante bajo la siguiente transformación abstracta

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (10.46)$$

donde $\lambda = \lambda(x)$ es una función escalar arbitraria. En efecto, es fácil ver que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$. Observen que tal transformación no es una transformación de las coordenadas espacio-temporales x^μ , sino que una simple redefinición del campo A .