

Cátedra IX: Tensores II

Ahora que estamos equipados con el concepto de tensor, podemos empezar a estudiar aplicaciones más avanzadas en relatividad especial.

9.1 Tensores y transformadas de Lorentz

Hemos visto que un tensor es un objeto cuyas componentes transforman bajo cambios de coordenadas de acuerdo a cierta regla. Esto se debe a que un cambio de coordenadas implica un cambio de bases para los espacios vectoriales tangente y cotangente sobre los cuales dichos tensores vienen definidos. Recuerden que en el caso particular de una transformación de Lorentz se tienen las relaciones

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} dx^{\nu}, \quad dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} dx^{\nu'}. \quad (9.1)$$

donde $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ y $\Lambda^{\mu}_{\nu'}$ son constantes que satisfacen $\Lambda^{\mu}_{\rho'} \Lambda^{\rho'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ y $\Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$ y que mantienen invariante el intervalo espacio temporal:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (9.2)$$

Esto significa que, por lo general un tensor dado será registrado con distintas componentes por distintos observadores inerciales. Esto queda muy claro en el caso de un 4-vector u describiendo la 4-velocidad de una partícula. Dos observadores inerciales O y O' a cierta velocidad relativa el uno con respecto al otro, observarán componentes distintas para u . Es decir, si $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ fuese la transformada de Lorentz relacionando los sistemas de coordenadas utilizados por O y O' , entonces podemos escribir

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} u^{\nu}, \quad u^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu'} u^{\nu'}, \quad (9.3)$$

donde u^{μ} y $u^{\mu'}$ son las componentes de u registrados por O y O' respectivamente. En el caso más general de un tensor T tipo (k, l) , debemos escribir:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \Lambda^{\nu_l}_{\nu'_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}, \quad (9.4)$$

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \Lambda^{\mu_1}_{\mu'_1} \dots \Lambda^{\mu_k}_{\mu'_k} \Lambda^{\nu'_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\nu'_l}_{\nu_l} T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l}, \quad (9.5)$$

donde $T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l}$ y $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ son las componentes de T registrados por O y O' respectivamente. Noten que la única forma que tenemos para distinguir si las componentes de un tensor están siendo expresadas en cierta base, es mediante la notación que tenemos para sus índices. En el ejemplo anterior, usamos índices μ y μ' para referirnos a las componentes registradas por O y O' respectivamente. Esto lo hacemos para enfatizar el hecho

de que el tensor T , como objeto abstracto, es independiente del sistema de coordenadas utilizado para expresar sus componentes.

Es importante entender que $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$, si bien es un objeto con índices, no es un tensor! Por el contrario, es el objeto que permite relacionar las componentes de un mismo tensor en dos sistemas de coordenadas distintas. La propiedad fundamental que define a una transformación de Lorentz es el hecho que deja invariante a ds^2 . Esto significa que

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu'\nu'}dx^{\mu'} dx^{\nu'}, \quad (9.6)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y $\eta_{\mu'\nu'} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Usando (9.1) encontramos que

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad \eta_{\mu'\nu'}dx^{\mu'} dx^{\nu'} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\mu'}\Lambda^{\nu}_{\nu'}dx^{\mu'} dx^{\nu'}. \quad (9.7)$$

Dado que estas relaciones son validas para toda diferencia de coordenadas dx^μ obtenemos:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}_{\mu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}, \quad \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\mu'}\Lambda^{\nu}_{\nu'}, \quad (9.8)$$

que son relaciones que ya conocemos bien. Sin embargo, ahora que sabemos que $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor, las relaciones anteriores cobran aún más sentido. Lo que no debemos olvidar, es que estas relaciones precisamente definen lo que es una transformada de Lorentz Λ . Es decir, una transformada de Lorentz consiste en todo cambio de bases que deja invariante a la métrica $\eta_{\mu\nu}$ (aquí, por invariante nos referimos a que $\eta_{\mu\nu}$ se escribe de forma idéntica en todo sistema de referencia).

Ahora que contamos con la inversa de la métrica $\eta^{\mu\nu}$, podemos deducir una relación bastante útil. Multiplicando la primera relación en (9.8) por $\Lambda^{\mu}_{\mu'}$, obtenemos:

$$\Lambda^{\mu}_{\mu'}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho'\sigma'}\Lambda^{\rho'}_{\mu}\Lambda^{\sigma'}_{\nu}\Lambda^{\mu}_{\mu'} = \eta_{\rho'\sigma'}\delta^{\rho'}_{\mu'}\Lambda^{\sigma'}_{\nu} = \eta_{\mu'\sigma'}\Lambda^{\sigma'}_{\nu}. \quad (9.9)$$

Luego, multiplicando esta relación por la inversa $\eta^{\mu\nu}$, encontramos:

$$\Lambda^{\mu}_{\mu'} = \eta_{\mu'\sigma'}\eta^{\mu\rho}\Lambda^{\sigma'}_{\rho}. \quad (9.10)$$

En forma análoga, si hubiésemos multiplicado por $\eta^{\mu'\nu'}$, habríamos encontrado:

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\mu'\rho'}\Lambda^{\sigma}_{\rho'}. \quad (9.11)$$

En otras palabras, vemos que dada una transformada de Lorentz $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$, podemos calcular su inversa simplemente utilizando la métrica en la forma descrita. Este resultado nos permite ahorrarnos mucho trabajo al momento de deducir la inversa de una transformada de Lorentz dada. Veamos un ejemplo de esto: Supongamos un boost relacionando a dos observadores O y O' con O' moviéndose a una velocidad v con respecto a O en la

dirección x^1 . Luego, sabemos que la transformación de Lorentz $\Lambda^\mu_{\nu'}$, relacionando a ambos observadores puede ser expresada de la forma:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.12)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v$ (con $c = 1$). En la expresión anterior hemos identificado μ con filas y ν' con columnas. A partir de esta expresión, vemos que

$$\Lambda^{0'}_0 = \eta^{0'\mu'} \eta_{0\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{0'0'} \eta_{00} \Lambda^0_{0'} = (-1)(-1)\gamma = \gamma, \quad (9.13)$$

$$\Lambda^{0'}_1 = \eta^{0'\mu'} \eta_{1\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{0'0'} \eta_{11} \Lambda^1_{0'} = (-1)(+1)\beta\gamma = -\beta\gamma, \quad (9.14)$$

$$\Lambda^{1'}_0 = \eta^{1'\mu'} \eta_{0\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{1'1'} \eta_{00} \Lambda^1_{0'} = (+1)(-1)\beta\gamma = -\beta\gamma, \quad (9.15)$$

$$\Lambda^{1'}_1 = \eta^{1'\mu'} \eta_{1\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{1'1'} \eta_{11} \Lambda^1_{1'} = (+1)(+1)\gamma = \gamma. \quad (9.16)$$

De esta forma, encontramos que:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.17)$$

donde ahora identificamos μ' con filas y ν con columnas. Observen que la representación matricial de $\Lambda^\mu_{\rho'} \Lambda^{\rho'}_{\nu} = \delta^\mu_{\nu}$ corresponde a (noten el orden de los índices)

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

mientras que la representación matricial de $\Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\rho}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

Veamos otro ejemplo. Consideremos esta vez el caso en que $\Lambda^\mu_{\nu'}$ corresponde a una rotación en torno al eje x^3 . Sabemos que en tal caso podemos escribir:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

donde θ es el ángulo de la rotación. Al igual que antes, en la expresión anterior hemos identificado μ con filas y ν' con columnas. Luego, realizando el mismo tipo de operaciones, encontramos que:

$$\Lambda^1_{1'} = \eta^{1'\mu'} \eta_{1\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{1'1'} \eta_{11} \Lambda^1_{1'} = (+1)(+1) \cos \theta = \cos \theta, \quad (9.21)$$

$$\Lambda^1_{2'} = \eta^{1'\mu'} \eta_{2\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{1'1'} \eta_{22} \Lambda^2_{1'} = (+1)(+1) \sin \theta = \sin \theta, \quad (9.22)$$

$$\Lambda^2_{1'} = \eta^{2'\mu'} \eta_{1\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{2'2'} \eta_{11} \Lambda^1_{2'} = (+1)(+1)(-\sin \theta) = -\sin \theta, \quad (9.23)$$

$$\Lambda^2_{2'} = \eta^{2'\mu'} \eta_{2\nu} \Lambda^\nu_{\mu'} = \eta^{2'2'} \eta_{22} \Lambda^2_{2'} = (+1)(+1) \cos \theta = \cos \theta. \quad (9.24)$$

Luego, la representación matricial para $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ está dada por:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

9.2 Manipulación de índices

Hay una serie de operaciones que podemos realizar con tensores que se reducen únicamente a manipular índices en la forma correcta. Una operación básica consiste en la contracción de índices, que lleva a un tensor del tipo (k, l) a otro de tipo $(k-1, l-1)$. Consideremos por ejemplo un tensor T del tipo $(3, 2)$, con componentes $T^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta}$, entonces podemos definir un nuevo tensor S tipo $(k-1, l-1)$ a través de la suma de un superíndice con un subíndice de la forma:

$$S^{\mu\rho}_{\sigma} = T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\nu}, \quad (9.26)$$

donde estamos sumando el índice ν (recuerden la regla de suma de índices de Einstein). Es posible confirmar que, en efecto, S definido de esta forma es un tensor genuino (es decir, sus componentes transforman de la forma adecuada). También podemos definir otros tensores tipo $(k-1, l-1)$ mediante contracciones de otros índices, sin embargo, algo que no debemos olvidar es que el orden de los índices importa. Esto significa que tensores con contracciones definidas sobre índices distinguos por lo general son distintos:

$$T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}_{\sigma\nu}. \quad (9.27)$$

Otra operación básica que no debemos olvidar es que la métrica puede ser utilizada para subir y bajar índices en tensores. Por ejemplo, dado un tensor $T^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta}$, podemos usar la métrica para definir nuevos tensores que elegimos denominar con la misma letra T :

$$T^{\mu\nu\rho\alpha}_{\beta} = \eta^{\alpha\sigma} T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\beta}, \quad (9.28)$$

$$T^{\nu\rho}_{\mu\alpha\beta} = \eta_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu\rho}_{\alpha\beta}, \quad (9.29)$$

$$T^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\delta} \eta_{\rho\epsilon} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\tau} T^{\sigma\delta\epsilon}_{\gamma\tau}, \quad (9.30)$$

etc... Observen que el acto de subir y bajar un índice no cambia su posición relativa a otros índices. También, noten que un índice libre (uno que no está siendo sumado) debe ser el mismo en ambos lados de la ecuación, mientras que un índice que está siendo sumado, aparece sólo una vez en un lado de la ecuación (es decir, nunca escribiremos expresiones del estilo $S_\alpha{}^\nu = T_{\mu\alpha\mu} V^\mu \eta^{\mu\nu}$). Casos particulares de las expresiones anteriores son los casos ya familiares:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu, \quad \omega^\mu = \eta^{\mu\nu} \omega_\nu. \quad (9.31)$$

Notemos que dado un vector con componentes $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$, entonces la 1-forma V_μ vendrá dada por:

$$V_\mu = (-V^0, V^1, V^2, V^3). \quad (9.32)$$

De igual forma, dada una 1-forma $\omega_\mu = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, entonces el vector ω^μ vendrá dado por:

$$\omega^\mu = (-\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3). \quad (9.33)$$

A veces un tensor puede respetar ciertas reglas de simetrías. Por ejemplo, la métrica es (por definición) un tensor simétrico, en el sentido que $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$. Esta propiedad puede darse en forma más general. Por ejemplo, si

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho}, \quad (9.34)$$

entonces diremos que S es simétrico en sus dos primeros índices. En forma análoga, si se da que

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\rho\nu\mu}, \quad (9.35)$$

diremos que S es simétrico en el primer y tercer índice, etc... También puede darse que un tensor sea simétrico en todos sus índices. Por ejemplo, si

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho} = S_{\rho\nu\mu} = S_{\nu\rho\mu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\mu\rho\nu}, \quad (9.36)$$

entonces diremos que S es totalmente simétrico. También es posible que un tensor sea antisimétrico en un par de índices. Por ejemplo, si

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}, \quad (9.37)$$

entonces decimos que A es antisimétrico en sus dos primeros índices. En general no tiene sentido hablar de simetría o antisimetría entre pares de índices involucrando un índice superior y un índice inferior.

Dado un tensor, siempre es posible simetrizar o anti-simetrizar pares de índices. Por ejemplo, dado un tensor $T_{\mu\nu}$, podemos definir su simetrización $T_{(\mu\nu)}$ mediante:

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}). \quad (9.38)$$

Observen que en efecto, se tiene que $T_{(\mu\nu)} = T_{(\nu\mu)}$. De la misma forma, podemos definir su antisimetrización $T_{[\mu\nu]}$ mediante:

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (9.39)$$

Observen que $T_{[\mu\nu]} = -T_{[\nu\mu]}$. Noten que un tensor arbitrio $T_{\mu\nu}$ siempre puede ser descompuesto en su parte simetrizada y su parte antisimetrizada:

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}. \quad (9.40)$$

Notemos por último que, dado que una derivada parcial ∂_μ transforma de la manera

$$\partial_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} \partial_\nu, \quad (9.41)$$

entonces su acción sobre un tensor arbitrario del tipo (k, l) , define un nuevo tensor del tipo $(k, l + 1)$. Por ejemplo, dado un tensor $T_{\mu\nu}$, podemos definir un nuevo tensor

$$S_{\rho\mu\nu} = \partial_\rho T_{\mu\nu}. \quad (9.42)$$

9.3 Tensores 3-dimensionales

Recuerden que a veces es conveniente escribir un vector distinguiendo entre su parte temporal y su parte espacial:

$$V^\mu = (V^0, V^i), \quad (9.43)$$

donde $i = 1, 2, 3$. Observen que la acción de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ no afecta a la parte espacial de dicho vector. Es decir:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu = (V_0, V_i) = (-V^0, V^i). \quad (9.44)$$

En otras palabras $V^i = V_i$. Usualmente nos referiremos a V^i como las componentes de un 3-vector. Observen que una rotación aplicada sobre un 4-vector V^μ tiene la forma

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^\nu, \quad \text{donde} \quad \Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{i'}_j \end{pmatrix}, \quad (9.45)$$

donde R es una rotación dada. Vemos entonces que al aplicar $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ sobre un 4-vector, sólo afectará su parte espacial. En términos de 3-vectores, la ecuación anterior adquiere la forma:

$$V^{i'} = R^{i'}_j V^j. \quad (9.46)$$

Cuando sólo consideramos rotaciones, δ_{ij} (la delta de Kronecker pero con sus dos índices abajo) pasa a ser la métrica del espacio 3-dimensional. De igual forma, la inversa de dicha

métrica es δ^{ij} . En efecto, las rotaciones son aquellas transformaciones lineales que dejan invariante al intervalo puramente espacial

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (9.47)$$

Por dicho motivo, ciertamente tiene sentido escribir expresiones tales como $V_i = \delta_{ij} V^j = V^i$. Por último, noten que toda la maquinaria matemática que desarrollamos para definir tensores en espacios de Minkowski, puede ser repetida para el caso del espacio Euclidiano 3-dimensional. De ahí vemos que las componentes puramente espaciales $T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}$ de un tensor $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ tipo (k, l) , transforman bajo rotaciones de acuerdo a la regla:

$$T^{i'_1 \dots i'_k}_{j'_1 \dots j'_l} = R^{i'_1}_{i_1} \dots R^{i'_k}_{i_k} R^{j_1}_{j'_1} \dots R^{j_l}_{j'_l} T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}. \quad (9.48)$$

9.4 El boost más general

Una aplicación de las herramientas que hemos acumulado es la deducción del boost más general posible. Para ello, recuerden que un boost es una transformación de Lorentz que relaciona las coordenadas de dos observadores inerciales a cierta velocidad uniforme el uno con respecto al otro. Supongamos que O' se mueve a una 3-velocidad v^i con respecto a O . Esto quiere decir que O ve a O' moverse a una velocidad:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad (9.49)$$

donde $t = x^0$ y x^i son las coordenadas usadas por O . La 4-velocidad asociada a tal 3-velocidad está dada por:

$$u^\mu = (\gamma, \gamma \beta^i), \quad (9.50)$$

donde $\beta^i = v^i$ (recuerden que $c = 1$), y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Para simplificar la notación, estamos usando $\beta^2 = \beta^i \beta_i$. Por otro lado, el observador O' se ve a sí mismo en reposo. Por dicho motivo, las componentes $u^{\mu'}$ de u en el sistema de referencia usado por O' , deben escribirse de la forma:

$$u^{\mu'} = (1, 0). \quad (9.51)$$

En otras palabras $v^{i'} = 0$. La transformación de Lorentz $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ relacionando ambos sistemas de referencia debe por lo tanto satisfacer:

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} u^\nu, \quad \text{donde} \quad u^\mu = (\gamma, \gamma \beta^i), \quad \text{y} \quad u^{\mu'} = (1, 0). \quad (9.52)$$

Explotando la presencia de los índices denotando componentes espaciales (índices latinos), esta relación puede ser reescrita de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0'}_0 & \Lambda^{0'}_j \\ \Lambda^{i'}_0 & \Lambda^{i'}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \beta^j \end{pmatrix}. \quad (9.53)$$

La ecuación anterior consiste en 4 ecuaciones independientes, pero la notación tensorial nos permite mantenerla en dos. Noten que continuamos usando la convención de suma de índices de Einstein para los índices latinos. Intentemos deducir la forma de las componentes $\Lambda^{0'}_0$, $\Lambda^{0'}_j$, $\Lambda^{i'}_0$ y $\Lambda^{i'}_j$. Una de las ecuaciones presentes en (9.53) que debemos resolver está dada por:

$$1 = \Lambda^{0'}_0 \gamma + \Lambda^{0'}_j \gamma \beta^j. \quad (9.54)$$

Para deducir los valores de $\Lambda^{0'}_0$ y $\Lambda^{0'}_j$ debemos tener en cuenta que estas cantidades sólo pueden depender de β^i , ya que ésta es la única información con la que contamos para relacionar ambos sistemas de coordenadas. Por otro lado, noten que $\Lambda^{0'}_j$ tiene un índice j . Esto sugiere que $\Lambda^{0'}_j$ debe ser proporcional a β_j . Escribiendo $\Lambda^{0'}_j = \alpha_1 \beta_j$ (donde α_1 es una cantidad todavía por determinar) la ecuación anterior queda como

$$1 = \gamma(\Lambda^{0'}_0 + \alpha_1 \beta^2). \quad (9.55)$$

Dado que $\Lambda^{0'}_0$ y α_1 no tienen índices, estas cantidades sólo pueden depender de β^i a través de la combinación $\beta^2 = \beta^i \beta_i$. Esto significa que $\Lambda^{0'}_0$ y α_1 no dependen de la dirección en que O' se mueve con respecto a O , y para deducir sus valores sólo necesitamos conocer un caso particular. Afortunadamente ya conocemos bien el caso en que O' se mueve en la dirección positiva de x^1 con respecto a O , en cuyo caso uno tiene que $\Lambda^{\mu'}_\nu$ viene dada por la expresión en (9.17). Vemos entonces que necesariamente $\alpha_1 = -\gamma$ y por lo tanto:

$$\Lambda^{0'}_0 = \gamma, \quad \Lambda^{0'}_j = -\gamma \beta_j. \quad (9.56)$$

La siguiente ecuación que debemos resolver consiste en:

$$0 = \Lambda^{i'}_0 \gamma + \Lambda^{i'}_j \gamma \beta^j. \quad (9.57)$$

Al igual que antes, las cantidades $\Lambda^{i'}_0$ y $\Lambda^{i'}_j$ sólo pueden depender de β^i . Esto quiere decir que $\Lambda^{i'}_0$ debe ser proporcional a β^i , y por lo tanto podemos escribir $\Lambda^{i'}_0 = \alpha_2 \beta^{i'}$ donde hemos introducido la notación $\beta^{i'} \equiv \delta^{i'}_j \beta^j$, con $\delta^{i'}_j = 1$ si $i = j$ y $\delta^{i'}_j = 0$ si $i \neq j$.¹ Esto lo hemos hecho para dejar en claro que $\beta^{i'}$ no es la velocidad $v^{i'}$ medida por O' (de hecho recuerden que $v^{i'} = 0$). Al igual que con α_1 , la cantidad α_2 sólo puede depender de β^2 , y por lo tanto su valor no depende de la dirección en la que O' se mueve con respecto a O . Podemos entonces comparar la presente situación con el caso particular ofrecido por la expresión (9.17) y deducir que

$$\Lambda^{i'}_0 = -\gamma \beta^{i'}. \quad (9.58)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (9.57) nos queda por resolver la siguiente ecuación:

$$\Lambda^{i'}_j \beta^j = \gamma \beta^{i'}. \quad (9.59)$$

¹Noten que $R^{i'}_j = \delta^{i'}_j$ corresponde a la rotación unidad. De hecho, en esta discusión podríamos usar $R^{i'}_j$ en lugar de $\delta^{i'}_j$ para obtener un resultado aún más general que además de un boost incluya rotaciones.

Repitiendo la misma lógica anterior, $\Lambda^{i'}_j$ solo puede depender de β^i . Esto sugiere que escribamos $\Lambda^{i'}_j$ proporcional a $\beta^{i'}\beta_j$. Sin embargo, ésta no es la única opción que tenemos. Otra posibilidad es que $\Lambda^{i'}_j$ contenga entre sus términos una cantidad proporcional a $\delta^{i'}_j$. Esto significa que debemos usar como *ansatz* la siguiente expresión para $\Lambda^{i'}_j$

$$\Lambda^{i'}_j = \alpha_3 \delta^{i'}_j + \alpha_4 \beta^{i'} \beta_j. \quad (9.60)$$

Apoyados una vez más por el caso particular (9.17), no es difícil encontrar que $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = (\gamma - 1)/\beta^2$. Esto quiere decir que

$$\Lambda^{i'}_j = \delta^{i'}_j (P^k_j + \gamma \beta^k \beta_j / \beta^2), \quad \text{donde} \quad P^k_j = \delta^k_j - \frac{\beta^k \beta_j}{\beta^2}. \quad (9.61)$$

Observen que $P^i_j = \delta^i_j - \beta^i \beta_j / \beta^2$ corresponde al 3-tensor proyector al espacio perpendicular a β^i . Es decir, se tiene que $P^i_j \beta^j = 0$ y $P^i_j \beta_i = 0$, además de la propiedad $P^i_j P^j_k = P^i_k$. Juntando todos los resultados anteriores, llegamos a la siguiente expresión final:

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_j \\ -\gamma \delta^{i'}_k \beta^k & \delta^{i'}_k (P^k_j + \gamma \beta^k \beta_j / \beta^2) \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad P^i_j \equiv \delta^i_j - \frac{\beta^i \beta_j}{\beta^2}. \quad (9.62)$$

Usando los resultados de la Sección 9.1 es posible deducir fácilmente la transformada inversa, la que viene dada por:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \delta^{k'}_j \beta_k \\ -\gamma \beta^i \delta^{k'}_j (P^i_k + \gamma \beta^i \beta_k / \beta^2) & \end{pmatrix}. \quad (9.63)$$