Cátedra VIII: Tensores

Después de una tortuosa introducción al concepto de vector, ya estamos en condiciones de definir tensores.

8.1 1-formas

Recordemos que un vector definido en un punto P del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ pertenece a un espacio vectorial T_P denominado espacio tangente a P. A partir de este espacio es posible definir un segundo espacio vectorial T_P^* denominado espacio cotangenge a P. Los objetos que habitan este espacio también son vectores, pero para distinguirlos de aquellos que viven en T_P, se les denomina 1-formas. Una 1-forma $\omega \in T_P^*$ se define como una función lineal que lleva a los elementos de T_P a la recta de los números reales. Es decir:

$$\omega : T_P \to \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Básicamente, esto significa que dado un vector $V \in T_P$ y una 1-forma $\omega \in T_P^*$, uno tiene $\omega(V) \in \mathbb{R}$. El que ω sea lineal significa que al actuar sobre un vector $aV + bW \in T_P$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple:

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W). \tag{8.2}$$

Por, otro lado, dado que T_P^* es un espacio vectorial, dos elementos ω y η pertenecientes a este espacio, cumplen con la propiedad

$$(a\omega + b\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(V), \tag{8.3}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Notemos que en particular $\omega \in T_P^*$ puede actuar sobre una base dada $\hat{e}_\mu$ definida en T_P. Usemos la siguiente notación para referirnos al resultado de la acción de ω sobre la base $\hat{e}_\mu$:

$$\omega_\mu = \omega(\hat{e}_\mu) \in \mathbb{R}. \tag{8.4}$$

Parte de la definición de T_P^* es el requisito de que su dimensión sea igual a la dimensión de T_P. Esto significa que existe una base en el espacio cotangente consistente en N elementos, donde $N = \dim(T_P) = \dim(T_P^*)$. Una elección natural para dicha base consiste en $\{\hat{\theta}^\mu\} \in T_P^*$, con $\mu = 1, \ldots, N$, donde la acción de estas 1-formas sobre los elementos de la base $\{\hat{e}_\mu\} \in T_P$ viene definida por la relación:

$$\hat{\theta}^\mu(\hat{e}_\nu) \equiv \delta^\mu_\nu. \tag{8.5}$$

Gracias a esta definición, uno siempre puede expandir una 1-forma arbitraria de la siguiente manera:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu. \tag{8.6}$$

Observen que ω_μ de la última expresión coincide con la que aparece en la definición de la ecuación (8.4). En efecto, observen que uno puede escribir:

$$\omega(\hat{e}_\mu) = \omega_\nu \hat{\theta}^\nu(\hat{e}_\mu) = \omega_\nu \delta^\nu_\mu = \omega_\mu. \tag{8.7}$$

Es decir, los ω_μ's corresponden a los elementos de ω en la base $\{\hat{\theta}^\mu\} \in T^*_P$. Veamos ahora un resultado inmediato de esta construcción. Dada un sistema de coordenadas ϕ, con coordenadas x^μ, se encuentra que la acción de una 1-forma ω sobre un vector V está dada por:

$$\omega(V) = \omega(V^\mu \hat{e}_\mu) = V^\mu \omega(\hat{e}_\mu) = V^\mu \omega_\nu \hat{\theta}^\nu(\hat{e}_\mu) = V^\mu \omega_\nu \delta^\nu_\mu = V^\mu \omega_\mu. \tag{8.8}$$

Es decir, la acción de una 1-forma ω sobre un vector V es equivalente a la contracción (suma usando la regla de Einstein) entre las componentes ω_μ con las componentes V^μ.

8.2 Cambios de coordenadas

El resultado (8.8) es muy simple y a la vez muy poderoso. Por ejemplo, sabemos que el valor de $\omega(V)$ no puede depender del sistema de coordenadas usado para evaluar dicha relación. Por lo tanto, el cálculo de la ecuación (8.8) puede ser repetido para otro sistema de coordenadas $x^{\mu'}$. Tal cálculo habría arrojado:

$$\omega(V) = V^{\mu'} \omega_{\mu'}. \tag{8.9}$$

Es decir, se tiene que:

$$V^\mu \omega_\mu = V^{\mu'} \omega_{\mu'}. \tag{8.10}$$

Claramente, en general $V^{\mu'} \neq V^\mu$ y $\omega_{\mu'} \neq \omega_\nu$, sin embargo sabemos que bajo un cambio de coordenadas $x^\mu \to x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\nu)$, las componentes de un vector V transforman de acuerdo a la regla:

$$V^\mu \to V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} V^\nu. \tag{8.11}$$

Introduciendo este resultado en la expresión (8.10), encontramos que

$$V^\mu \omega_\mu = \omega_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} V^\nu. \tag{8.12}$$

Dada que esta expresión es valida para todo V^μ, uno encuentra entonces que las componentes ω_μ y $\omega_{\mu'}$ de ω en las dos bases, vienen relacionadas por:

$$\omega_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \omega_{\mu'}. \tag{8.13}$$

Repitiendo este razonamiento, pero ahora con respecto a la transformación inversa, uno encuentra

$$\omega_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \omega_{\mu}. \tag{8.14}$$

Las ecuaciones (8.13) y (8.14) expresan la manera en que 1-formas transforman bajo cambios de coordenadas. Podemos usar estos resultados para inferir cómo transforma una base en T_P^* bajo cambios de coordenadas. Por ejemplo, al igual que con la base $\{\hat{e}_{\mu}\} \in T_P$ podemos definir una base $\{\hat{\theta}^{\mu}\} \in T_P^*$ satisfaciendo la relación (8.5), dada una $\{\hat{e}_{\mu'}\} \in T_P$ podemos definir una nueva base $\{\hat{\theta}^{\mu'}\} \in T_P^*$, esta vez satisfaciendo:

$$\hat{\theta}^{\mu'}(\hat{e}_{\nu'}) \equiv \delta^{\mu'}_{\nu'}. \tag{8.15}$$

Luego (y usando nuestro razonamiento habitual) dado que la existencia de una 1-forma ω no puede depender de la existencia de un sistema de coordenadas, podemos escribir

$$\omega = \omega_{\mu'} \hat{\theta}^{\mu'} = \omega_{\mu} \hat{\theta}^{\mu}. \tag{8.16}$$

Por lo tanto, usando la expresión (8.14), encontramos:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \omega_{\mu} \hat{\theta}^{\nu'} = \omega_{\mu} \hat{\theta}^{\mu}. \tag{8.17}$$

Dada que esta última relación es válida para toda 1-forma ω_{ω}, podemos entonces deducir cómo transforma la base de T_P^*:

$$\hat{\theta}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \hat{\theta}^{\nu'}. \tag{8.18}$$

Análogamente, uno también puede deducir:

$$\hat{\theta}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \hat{\theta}^{\nu}. \tag{8.19}$$

Para finalizar, observen que la disposición de los índices, tanto para las componentes como para las bases, en vectores y 1-formas, no son arbitrarias. En efecto, observen que las componentes ω_{μ} de una 1-forma ω transforman de igual manera que los elementos de la base $\{\hat{e}_{\mu}\}$ del espacio tangente. Mientras tanto, las componentes V^{μ} de un vector V, transforman de la misma manera que los elementos de la base $\{\hat{\theta}^{\mu}\}$ del espacio cotangente. Esta es precisamente la justificación del uso de la regla de suma de índices de Einstein.

8.3 Vectores vs 1-formas

Observen que hemos definido a las 1-formas como funciones lineales actuando sobre los elementos del espacio tangente T_P. De hecho, podemos adoptar el punto de vista alternativo, bajo el cual los vectores son son funciones lineales actuando sobre los elementos del espacio cotangente T_P^*. En otras palabras, dado un vector $V \in T_P$, podemos escribir $V : T_P^* \to \mathbb{R}$. Luego, dada una 1-forma $\omega \in T_P^*$, tenemos $V(\omega) = V^\mu \omega_\mu$. De esta manera, ambos espacios tienen propiedades equivalentes. Veremos más adelante que, de hecho, podemos definir un isomorfismo entre ambos espacios, mediante la definición de la métrica, que consiste en un mapa que relaciona a todo elemento en T_P con un y sólo un elemento en T_P^*.

8.4 Transformaciones de Lorentz

Nuestro interés central son las transformaciones de Lorentz, que como hemos visto, corresponden al caso particular en que

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}, \tag{8.20}$$

son cantidades constantes. Vale la pena repetir una vez más la regla de transformación bajo cambios de coordenadas para las 1-formas, pero esta vez con nuestra notación mas familiar de una transformación de Lorentz:

$$\omega_{\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \omega_\mu \qquad \text{y} \qquad \omega_\nu = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \omega_{\mu'}. \tag{8.21}$$

8.5 Interpretación geométrica de las 1-formas

Recuerden que en un sentido más abstracto, identificamos a un vector como un operador diferencial actuando sobre el espacio de funciones definidas sobre $\mathcal{M}$, a lo largo de una curva (la derivada direccional). Es decir, dada una curva $\gamma(\lambda)$ con parámetro λ, la derivada direccional

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu, \tag{8.22}$$

es un vector que vive en el espacio tangente T_P, donde las derivadas parciales $\hat{e}_\mu \equiv \partial_\mu$ corresponden a una base. Dada esta interpretación, en dicha base, las componentes de $\frac{d}{d\lambda}$ vienen dadas por $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$.

¿Que hay de las 1-formas? ¿Admiten éstas una interpretación similar? La respuesta es afirmativa: Uno puede pensar a las 1-formas como *gradiantes* de funciones. Por ejemplo, dada una función f definida sobre $\mathcal{M}$, decir que ésta define una 1-forma $\omega = df$ cuya acción sobre un vector $V = \frac{d}{\lambda}$ viene dada por:

$$\omega(V) = df(\frac{d}{d\lambda}) \equiv \frac{df}{d\lambda}. \tag{8.23}$$

Observen que esta definición satisface todas las propiedades de las 1-formas. En particular, observen que si expandimos $\frac{d}{d\lambda}$ en su base, obtenemos

$$df(\frac{d}{d\lambda}) = df(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}df(\partial_\mu) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu f. \tag{8.24}$$

Esto significa que, efectivamente, las componentes de una 1-forma f vienen dadas por el gradiante $\partial_\mu f$. Desde esta perspectiva, dado un sistema de coordenadas x^μ, la base $\hat{\theta}^\mu$ de T_P^* consiste en el conjunto de diferenciales $\hat{\theta}^\mu = dx^\mu$, de modo que

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{8.25}$$

Finalmente, esto nos permite escribir:

$$df = \partial_\mu f \, dx^\mu. \tag{8.26}$$

Es decir, la realización natural de una 1-forma es a través de gradiantes de funciones.

8.6 Tensores

Finalmente! Ya estamos en posición de definir lo que es un tensor. Estos son la generalización natural del concepto de vectores y 1-formas. Primero que nada recordemos que una 1-forma $\omega \in T_P^*$ es un mapa lineal que actúa sobre vectores del espacio T_P llevándolos a $\mathbb{R}$. Por otro lado, un vector $V \in T_P$ es un mapa lineal que actúa sobre 1-formas del espacio T_P^* llevándolos a $\mathbb{R}$. Un tensor T del tipo (k, l) es un mapa *multi-lineal* que pertenece al espacio producto $(T_P)^k \times (T_P^*)^l$ y que actúa sobre elementos del espacio producto $(T_P^*)^k \times (T_P)^l$ llevándolos a los números reales $\mathbb{R}$. Es decir:

$$T : \underbrace{T_P^* \times \cdots \times T_P^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{T_P \times \cdots \times T_P}_{l \text{ veces}} \to \mathbb{R}. \tag{8.27}$$

En la expresión anterior $\times$ denota un producto Cartesiano entre dos espacios. Por ejemplo, $T_P \times T_P$ es el espacio habitado por pares ordenados de vectores, mientras que $T_P^* \times T_P$ es el espacio habitado por pares ordenados consistentes en una 1-forma y un vector. El que T sea multilineal, significa que actúa linealmente en cada uno de sus argumentos. Por ejemplo, para el caso de un tensor T tipo $(1, 1)$, tenemos

$$T(a\omega + b\eta, cV + dW) = acT(\omega, V) + adT(\omega, W) + bcT(\eta, V) + cdT(\eta, W), \tag{8.28}$$

donde ω y η son 1-formas, V y W son vectores, y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Noten que podemos desde ya identificar algunos tensores conocidos. Por ejemplo, un tensor $(0, 0)$ corresponde simplemente a una función escalar. Por otro lado, un tensor $(1,0)$ corresponde a un vector, y un tensor $(0,1)$ corresponde a una 1-forma.

Para construir una base adecuada en el tipo de espacio producto que estamos considerando, resulta conveniente introducir el concepto de producto tensorial, simbólicamente denominado $\otimes$. De esta forma, si T es un tensor tipo (k,l) y S es un tensor tipo (m,n), entonces podemos definir un nuevo tensor $T \otimes S$ tipo $(k+m, l+n)$ de la manera:

$$\begin{aligned} &T \otimes S(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, \ldots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}, \ldots, V^{(l+n)}) \\ &\quad = T(\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \ldots, V^{(l)}) \times S(\omega^{(k+1)}, \ldots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \ldots, V^{(l+n)}). \end{aligned} \tag{8.29}$$

En la expresión anterior $\omega^{(i)}$, con $i = 1, \ldots, k+m$, y $V^{(j)}$, con $j = 1, \ldots, l+m$, denotan 1-formas y tensores (y no componentes de 1-formas y tensores). Dado dos tensores T y S, la operación anterior puede ser entendida de la siguiente manera: Primero, T actúa sobre el conjunto de k 1-formas y l vectores $\omega^{(i)}$, con $i = 1, \ldots, k$, y $V^{(j)}$, con $j = 1, \ldots, l$. Luego, S actúa sobre las restantes m 1-formas y n vectores $\omega^{(i)}$, con $i = k+1, \ldots, k+m$, y $V^{(j)}$, con $j = l+1, \ldots, l+n$. Finalmente las respuestas se multiplican. Observen que en general el producto tensorial no *conmuta*, es decir

$$T \otimes S \neq S \otimes T. \tag{8.30}$$

Habiendo definido $\otimes$, podemos definir una base para el espacio de tensores tipo (k,l). Para esto, basta tomar como base el producto tensorial de las bases individuales para vectores $\hat{e}_\mu$ y 1-formas $\hat{\theta}^\nu$. Es decir, una buena base para $(T_P)^k \times (T_P^*)^l$ consiste en

$$\hat{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}. \tag{8.31}$$

Esto quiere decir que un tensor arbitrario T, puede ser expresado de la manera

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \hat{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{\nu_l}, \tag{8.32}$$

donde $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ son las componentes del tensor. Típicamente uno se refiere a $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ simplemente como el tensor. Para finalizar esta sección, recordemos que una forma más geométrica de expresar una base es mediante la notación $\partial_\mu \equiv \hat{e}_\mu$ y $dx^\nu = \hat{\theta}^\nu$, lo que nos permite escribir:

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l}. \tag{8.33}$$

8.7 Cambio de coordenadas y transformaciones de Lorentz

Habiendo definido lo que es un tensor, debemos constatar una de las propiedades más importante de los tensores. Al igual que con vectores y uno formas, uno puede deducir la forma en que transforman las componentes de los tensores al conocer como transforman las bases. Recordemos que las bases individuales transforman de la manera

$$\hat{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \hat{e}_{\nu}, \qquad \hat{e}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} \hat{e}_{\nu'}, \qquad \hat{\theta}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \hat{\theta}^{\nu}, \qquad \hat{\theta}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \hat{\theta}^{\nu'}. \tag{8.34}$$

Esto nos permite deducir la siguiente regla general para la transformación de componentes de tensores:

$$T^{\mu_1' \cdots \mu_k'}{}_{\nu_1' \cdots \nu_l'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l'}} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}. \tag{8.35}$$

Recordemos que en el caso particular de transformaciones de Lorentz, dos sistemas de coordenadas x^{μ} y $x^{\mu'}$ vienen relacionadas a través de

$$dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} dx^{\nu'}, \qquad dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} dx^{\nu}, \tag{8.36}$$

por lo que $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}$ y $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}$ son constantes, y finalmente encontramos:

$$T^{\mu_1' \cdots \mu_k'}{}_{\nu_1' \cdots \nu_l'} = \Lambda^{\mu_1'}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu_k'}{}_{\mu_k} \Lambda^{\nu_1}{}_{\nu_1'} \cdots \Lambda^{\nu_l}{}_{\nu_l'} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}. \tag{8.37}$$

La ecuación anterior nos revela la regla algebraica relacionando las componentes de un tensor dado T en dos sistemas de referencia inerciales. Es decir, si un tensor T es observado tener componentes $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ en cierto sistema de referencia inercial K con coordenadas x^{μ}, entonces inmediatamente podemos calcular con qué componentes $T^{\mu_1' \cdots \mu_k'}{}_{\nu_1' \cdots \nu_l'}$ es observado el mismo tensor pero en otro sistema de referencia inercial K' con coordenadas $x^{\mu'}$ (y relacionado con el primer sistema de referencia K mediante la transformación de Lorentz Λ).

8.8 Comentarios sobre la posición de los índices

Por su definición, queda clara la importancia de la posición de los índices en un tensor. Un índice ubicado en la parte superior de un tensor transforma como un vector, mientras que un indice en la parte inferior de un tensor transforma como una 1-forma.

Es importante advertir que un par de bases ordenadas de la forma $\hat{e}_{\mu} \otimes \hat{e}_{\nu}$ es distinto al par ordenado $\hat{e}_{\nu} \otimes \hat{e}_{\mu}$, para ciertos valores de μ y ν. Esto quiere decir que, en general, es importante tener en cuenta la posición de los índices. Por ejemplo, dado un tensor T del tipo $(3, 2)$, con componentes $T^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha\beta}$, en general tendremos:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha\beta} \neq T^{\nu\mu\rho}{}_{\alpha\beta} \neq T^{\nu\mu\rho}{}_{\beta\alpha}. \tag{8.38}$$

Por otro lado, observen que hemos introducido tensores teniendo algo de cuidado en como ordenamos índices. Por ejemplo, definimos un tensor ordenando, de izquierda a derecha, primero todos sus índices superiores, y luego, todos sus índices inferiores. Esto es ciertamente arbitrario, y en general podemos definir tensores con componentes ordenas de forma distinta. Por ejemplo, podemos definir un tensor S tipo $(1,1)$ tal que

$$S = S_\mu{}^\nu \, \hat{\theta}^\mu \otimes \hat{e}_\nu. \tag{8.39}$$

Es decir, en este caso hemos definido un tensor con respecto a la base $\hat{\theta}^\mu \otimes \hat{e}_\nu$ en lugar de la base $\hat{e}_\nu \otimes \hat{\theta}^\mu$. En nuestro estudio, nos permitiremos hablar de tensores en su versión más general, y nos interesaremos en tensores tanto del tipo $T^\mu{}_\nu$ como del tipo $S_\mu{}^\nu$.

8.9 La delta de Kronecker

En el pasado definimos a la delta de Kronecker como un símbolo con índices δ^μ_ν tal que $\delta^\mu_\nu = 1$ si $\mu = \nu$, y $\delta^\mu_\nu = 0$ si $\mu \neq \nu$, y comprobamos que ésta se escribe de manera idéntica en todos los sistemas de referencia. Noten que la delta de Kronecker puede ser pensada como las componentes del tensor unidad $\mathbb{I}$, un tensor de tipo $(1,1)$ definido por:

$$\mathbb{I} = \delta^\mu{}_\nu \partial_\mu \otimes dx^\nu, \tag{8.40}$$

donde $\partial_\mu \equiv \hat{e}_\mu$ y $dx^\nu = \hat{\theta}^\nu$ son las bases. Observen que en la expresión anterior hemos tenido cuidado en ordenar los índices de forma que el índice superior aparezca a la izquierda del índice inferior. Hemos hecho esto para no alejarnos de la notación introducida para definir tensores. Esta notación también nos permite escribir $\delta^\mu{}_\nu$ en forma matricial, en donde identificamos el índice de la izquierda con filas, y el de la derecha con columnas:

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.41}$$

Noten que $\mathbb{I}$ actuando sobre una 1-forma $\omega = \omega_\rho dx^\rho$ puede así ser entendida cómo:

$$\mathbb{I}(\omega, \ \ ) = \delta^\mu{}_\nu \partial_\mu(\omega) \otimes dx^\nu = \delta^\mu{}_\nu \omega_\rho \partial_\mu(dx^\rho) \otimes dx^\nu = \delta^\mu{}_\nu \omega_\rho \delta^\rho{}_\mu dx^\nu = \omega_\mu dx^\mu = \omega. \tag{8.42}$$

Observen que hemos dejado vacía la entrada para el vector. De igual forma, uno puede ver que $\mathbb{I}(\ \ , V) = V$ (donde hemos dejado vacía la entrada para la 1-forma). Dado que $\mathbb{I}(\omega, \ \ ) = \omega$ y $\mathbb{I}(\ \ , V) = V$ son relaciones independientes del sistema de referencia, podemos ver por qué las componentes de la delta son escritos identicamente en cualquier sistema de referencia.

Observen que también podemos definir un tensor unidad del tipo $(1,1)$ pero con la base invertida. Es decir:

$$\mathbb{I} = \delta_\nu{}^\mu dx^\nu \otimes \partial_\mu, \tag{8.43}$$

Donde ${\delta_\nu}^\mu$ tiene la misma forma matricial de (8.41). En tal caso, es fácil ver que $\mathbb{I}(\ \ ,\omega) = \omega$ y $\mathbb{I}(V,\ \ ) = V$. Dado que tanto ${\delta^\mu}_\nu$ como ${\delta_\nu}^\mu$ tienen la misma forma, usualmente no vale la pena distinguir entre ellas, uno simplemente escribe δ^μ_ν.

8.10 La métrica

Hasta el momento hemos identificado a la métrica $\eta_{\mu\nu}$ como un objeto con índices griegos con la utilidad de simplificar la notación del intervalo espacio temporal:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{8.44}$$

Como es de esperar, la métrica tiene un rol bastante central en el estudio de la relatividad especial. Consiste en un mapa, que permite establecer una relación, de uno a uno, entre elementos del espacio tangente T_P (es decir, vectores) y elementos del espacio cotangente T_P^* (el espacio de las 1-formas), y en su versión más general, la métrica es distinguida con el símbolo g.

Se define a la métrica g como un tensor del tipo $(0,2)$ con dos propiedades: Primero, es simétrica: Es decir, su acción sobre dos vectores A y B satisface

$$g(A,B) = g(B,A). \tag{8.45}$$

Noten que por ser g un tensor de tipo $(0,2)$, entonces podemos escribir:

$$g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu, \tag{8.46}$$

donde $g_{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica. Luego, la propiedad (8.45) quiere decir que

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \tag{8.47}$$

La segunda propiedad consiste en exigir que el determinante de $g_{\mu\nu}$ sea distinto de cero. Esto quiere decir que podemos definir la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$, denominada $g^{\mu\nu}$, de modo que

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu, \qquad \text{y} \qquad g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{8.48}$$

Dado que tanto $g_{\rho\nu}$ como δ^μ_ν son componentes de tensores, por consistencia, necesariamente $g^{\mu\nu}$ es un tensor tipo $(2,0)$. Estas dos propiedades nos permiten definir varias operaciones importantes. La primera de ellas, es la existencia de un producto escalar entre dos vectores. Dado dos vectores A y B, este producto consiste precisamente en

$$A \cdot B \equiv g(A,B) = g_{\mu\nu} dx^\mu(A) \otimes dx^\nu(B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \tag{8.49}$$

Observen que el producto satisface $A \cdot B = B \cdot A$.

La segunda operación, es que definir, por cada elemento V del espacio tangente T_P, un y solo un elemento ω del espacio cotangente, y vise versa. Por ejemplo, dado un vector B, vemos que podemos definir una 1-forma β de la manera:

$$\beta \equiv g(B, \ ) = g_{\mu\nu} dx^\mu(B) \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} B^\rho dx^\mu(\partial_\rho) \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} B^\rho \delta^\mu_\rho dx^\nu = g_{\mu\nu} B^\mu dx^\nu. \quad (8.50)$$

Es decir, la 1-forma β tiene por componentes $B^\mu g_{\mu\nu}$:

$$\beta_\nu = B^\mu g_{\mu\nu}. \quad (8.51)$$

Noten que, dado que g es simétrico, también pudimos haber escrito

$$\beta \equiv g(\ , B) = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu(B) = g_{\mu\nu} B^\rho dx^\mu \otimes dx^\nu(\partial_\rho) = g_{\mu\nu} B^\rho dx^\mu \delta^\nu_\rho = g_{\mu\nu} B^\nu dx^\mu, \quad (8.52)$$

lo que es completamente equivalente. Dado que $g^{\mu\nu}$ es invertible, β_μ está únicamente definido a partir de B^μ. Por lo mismo, en general uno simplemente utiliza la siguiente notación:

$$B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu. \quad (8.53)$$

Es decir, dado un vector B^μ, existe una 1-forma que denominamos simplemente B_μ. Observen adicionalmente que:

$$B^\mu = g^{\mu\nu} B_\nu. \quad (8.54)$$

Por lo que, dado una 1-forma B_μ, podemos definir de forma única, un vector B^μ.

Resulta conveniente pensar en la métrica como un objeto que permite subir y bajar índices. Es decir, dado un tensor T tipo $(2,0)$, con componentes $T^{\mu\nu}$, podemos definir un único tensor T tipo $(1,1)$ pero ahora con componentes $T^\mu{}_\nu$ con la ayuda de la métrica:

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu\rho} g_{\rho\nu}. \quad (8.55)$$

En forma análoga, también podemos definir un único tensor T tipo $(1,1)$ pero ahora con componentes $T_\mu{}^\nu$:

$$T_\mu{}^\nu = T^{\rho\nu} g_{\rho\mu}. \quad (8.56)$$

Por último, también podemos definir un único tensor T tipo $(0,2)$ con componentes $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = T^{\rho\sigma} g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}. \quad (8.57)$$

Dado que todos estos tensores están relacionados de forma unívoca, podemos permitirnos pensar que todos ellos son un mismo tensor T, y por ello usamos el mismo símbolo T para referirnos a cada caso. Esta misma situación puede ser aplicada para casos más complicados. Por ejemplo, podemos escribir expresiones del tipo:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha\beta} = g^{\nu\sigma} T^\mu{}_\sigma{}^\rho{}_{\alpha\beta}. \quad (8.58)$$

Por último, noten ahora que un producto entre dos vectores puede ser expresado de la forma:

$$A \cdot B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu. \quad (8.59)$$

8.11 Métrica Minkowskiana

Si bien hemos definido lo que es la métrica en general (y en forma algo abstracta), en la práctica debemos especificar cual es su forma. En el caso de relatividad especial estamos interesados en describir la geometría de espacios Minkowskianos, en donde, por definición, la métrica adquiere la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.60}$$

Por supuesto, existen otras posibilidades que están fuera del alcance de este curso, sin embargo, este caso es de tanta relevancia, que existe un símbolo reservado exclusivamente para estos espacios. Ustedes ya conocen a dicho símbolo:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.61}$$

De paso, vemos inmediatamente que la inversa de la métrica, tiene por componentes

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.62}$$

Para ver que todo nuestro esfuerzo en definir la métrica tiene sentido, observen lo siguiente. Pensemos en dos eventos separados por infinitesimales dx^μ. Estos infinitesimales definen un vector infinitesimal $dx = dx^\mu \hat{e}_\mu$. Luego, el intervalo temporal al cuadrado ds^2 consiste en el producto al cuadrado de dicho vector. Dado que la métrica es el objeto que nos permite definir el producto, debemos escribir:

$$ds^2 = g(dx, dx) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{8.63}$$

Aquí vemos que en efecto, debemos elegir $\eta_{\mu\nu}$ de la forma descrita en (8.61). Más aún, observen que la métrica, como tensor, puede ser expresada de la forma:

$$g = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \tag{8.64}$$

Por dicho motivo, en ocasiones, resulta útil pensar en ds^2 como un tensor en si mismo, y referirse a ds^2 como la métrica, e incluso escribir:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \tag{8.65}$$

No se confundan: Observen que en la expresión (8.63), los dx^μ se refieren a infinitesimales de coordenadas, mientras que tanto en (8.64) como en (8.65) los dx^μ se refieren a las bases del espacio T_P^*.