Cátedra VII: Vectores

En esta clase comenzaremos un estudio más sistemático de la estructura del espacio-tiempo. Intentaremos deducir el concepto de vector a partir conceptos geométricos básicos e intrínsecos al espacio-tiempo, tales como *curvas* y *funciones*.

7.1 Espacios vectoriales

Antes de embarcarnos en el estudio de vectores definidos en el espacio-tiempo, refresquemos brevemente nuestra memoria y recordemos lo que es un espacio vectorial. En términos simples, un espacio vectorial real es un espacio habitado por objetos que pueden ser sumados y multiplicados por números reales. Es decir, si U y V son dos vectores, estos pueden ser individualmente multiplicados por dos números reales α y β respectivamente, y sumados para dar como resultado un tercer vector W que también habita el mismo espacio:

$$W = \alpha V + \beta W. \tag{7.1}$$

Recordemos también que un espacio vectorial tiene un origen único, que corresponde a un vector *cero*, que funciona como la identidad bajo la operación de suma de vectores. Usualmente, trabajamos con espacios vectoriales mediante el uso de *bases*. Una base es un conjunto de N vectores $\hat{e}_A$, con $A = 1, \dots, N$ cuyos elementos satisfacen:

$$\text{Si} \quad \alpha^A \hat{e}_A = 0 \quad \text{entonces} \quad \alpha^A = 0, \;\; A = 1, \dots, N. \tag{7.2}$$

Es decir, son linealmente independientes. Si tal base existe, entonces N corresponde a la dimensión del espacio vectorial. La propiedad anterior permite descomponer cualquier vector en términos de una base. Por ejemplo, podemos escribir

$$V = V^A \hat{e}_A, \qquad V^A \in \mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Evidentemente, a partir de una base dada $\hat{e}_A$, podemos definir una nueva base $\hat{e}_{B'}$. Es decir, podemos escribir una nueva base en términos de la antigua de la forma:

$$\hat{e}_{B'} = \Lambda^A{}_{B'} \hat{e}_A, \tag{7.4}$$

donde $\Lambda^A{}_{B'}$ es una matriz invertible de $N \times N$. En forma recíproca, también debe ser posible escribir la antigua base en términos de la nueva:

$$\hat{e}_A = \Lambda^{B'}{}_A \hat{e}_{B'}, \tag{7.5}$$

donde $\Lambda^A{}_{B'} \Lambda^{B'}{}_C = \delta^A_B$ y $\Lambda^{A'}{}_B \Lambda^B{}_{C'} = \delta^{A'}_{B'}$. Un vector puede ser expresado en la nueva base de la forma:

$$V = V^{A'} \hat{e}_{A'}, \qquad V^{A'} \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Dado que la base ha cambiado, también las componentes del vector han cambiado, sin embargo el vector sigue siendo el mismo objeto. A partir de esta simple observación, podemos relacionar las componentes de un vector relativa a una base $\{\hat{e}^A\}$, con las componentes del mismo vector relativa a otra base $\{\hat{e}^{A'}\}$. Esta viene determinada por las matrices Λ's de la forma:

$$V^{A'} = \Lambda^{A'}{}_{B} V^{B}, \qquad V^{A} = \Lambda^{A}{}_{B'} V^{B'}. \tag{7.7}$$

Terminemos recordando que es habitual (y aquí lo haremos) considerar espacios vectoriales dotados de una estructura adicional consistente en el producto interno, que permite la definición de la multiplicación de dos vectores. Para ello, tendremos que definir el concepto de métrica, lo que haremos más adelante.

7.2 La idea

Lo que queremos conseguir en esta clase es entender cómo surge el concepto de vector en un espacio tiempo. Veremos que un vector es un objeto que emerge en forma natural, interrelacionando eventos del espacio tiempo infinitesimalmente cercanos. La idea básica que intentaremos desarrollar es que en cada punto P del espacio-tiempo podemos definir un espacio vectorial T_P (usualmente llamado espacio tangente a P) en el cual viven los vectores cuyo *origen* corresponde al punto P. Como en todo espacio vectorial, un vector V puede ser descompuesto mediante el uso de una base, y por lo tanto, usualmente escribiremos

$$V = V^{\mu} \hat{e}_{\mu} \tag{7.8}$$

donde V^{μ} con $\mu = 0, \dots, 3$ son las componentes del vector. La base $\hat{e}_{\mu}$ puede parecer algo abstracta, pero lo único que hace es distinguir direcciones en el espacio tiempo. Por ejemplo, el elemento $\hat{e}_1$ de esta base puede ser entendido como el eje x^1 de nuestro sistema de coordenadas, por lo que V^1 es simplemente la componente del vector V proyectado en la dirección del eje x^1. Así mismo, el elemento $\hat{e}_0$ de la base puede entendido como el eje x^0, es decir el eje temporal de nuestro sistema de coordenadas.

La noción más importante que intentaremos adoptar durante esta clase es la siguiente: Una transformación de Lorentz equivale a un cambio de coordenadas del espacio tiempo y, a su vez, un cambio de coordenadas implica un cambio de bases. Como veremos, una transformación de Lorentz

$$dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} dx^{\nu'} \tag{7.9}$$

implica un cambio de bases de la forma

$$\hat{e}_{\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \hat{e}_{\mu}. \tag{7.10}$$

De este modo, desarrollaremos la noción de que un vector es un objeto que habita en el espacio tiempo en forma independiente de las coordenadas utilizadas para describirlo. En otras palabras

$$V = V^{\mu}\hat{e}_{\mu} = V^{\mu'}\hat{e}_{\mu'}. \tag{7.11}$$

Recordemos que este es precisamente el caso de un 4-vector tangente, visto en la clase anterior.

7.3 Curvas y funciones en el espacio-tiempo

Nos interesa entender qué clase de objetos pueden habitar el espacio tiempo. Para ello no contamos con muchas nociones más que aquellas que emergen del acuerdo consensuado de que el espacio-tiempo es básicamente una colección de eventos que pueden ser descritos en forma continua. Nos referiremos al espacio-teimpo de manera abstracta como $\mathcal{M}$. Un concepto fácil de aceptar, y que emerge en forma inmediata, es el concepto de curva, que en pocas palabras consiste en una colección de eventos $\gamma(\lambda) = \{P_\lambda\} \in \mathcal{M}$ ordenados en forma continua mediante la ayuda de algún parámetro λ. Por ejemplo, la trayectoria de una partícula puede ser entendida como una sucesión de eventos puntuales dispuestos uno tras otro en forma ordenada. En tal caso, y tal como vimos en la clase anterior, resulta natural definir una curva $\gamma(\tau)$ parametrizado por el tiempo propio τ de la partícula. En

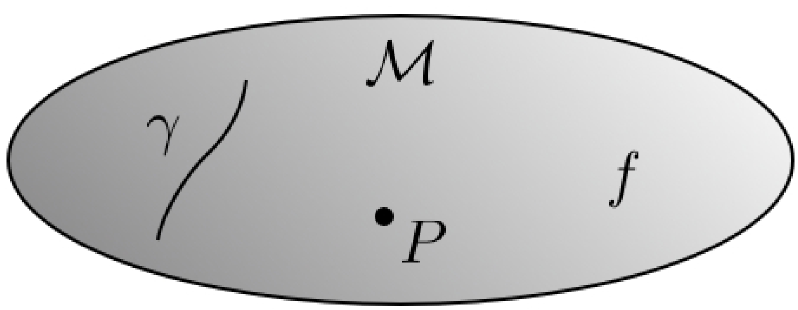

Figure 1: Representación del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ y algunos objetos naturales que le habitan. En este caso, tenemos una curva γ, un evento P y una función f definida sobre M.

forma más concreta, una curva es simplemente un mapa continuo desde la recta de los números reales $\mathbb{R}$ al espacio tiempo $\mathcal{M}$:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}. \tag{7.12}$$

Así como podemos definir mapas desde $\mathbb{R}$ a $\mathcal{M}$, también podemos definir mapas yendo desde $\mathcal{M}$ a $\mathbb{R}$. Tales mapas son simplemente funciones reales definidas sobre $\mathcal{M}$. Para evitar complicaciones innecesarias, en la presente discusión consideraremos únicamente mapas infinitamente diferenciables. Supongamos que f es uno de esos mapas, entonces podemos escribir:

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}. \tag{7.13}$$

Quizás lo mas importante de esta discusión es que tales conceptos no requieren la definición *a priori* de sistemas de coordenadas para referirnos a ellos. Por ejemplo, la función f bien puede tener distintos valores para distintos puntos $P \in \mathcal{M}$ sobre los cuales es evaluada, sin embargo no necesitamos especificar las coordenadas de P en forma explicita. Lo mismo es cierto para γ, cuya existencia no depende del hecho que podamos definir un conjunto de coordenadas sobre las cuales la curva se extiende. Más aún, dado que tenemos una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ y una función $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, estamos en nuestro legítimo derecho de definir una función desde $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ mediante la composición de ambos mapas:

$$f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{7.14}$$

Dado que la curva cuenta con un parámetro τ, podemos de hecho simplemente escribir $f(\tau) \equiv (f \circ \gamma)(\tau)$, y dado que ambos mapas son diferenciables, es posible definir la derivada $f'(\tau) = \frac{df}{d\tau}$ de $f(\tau)$ con respecto a τ de la forma usual, todo esto sin la necesidad de definir sistemas de coordenadas.

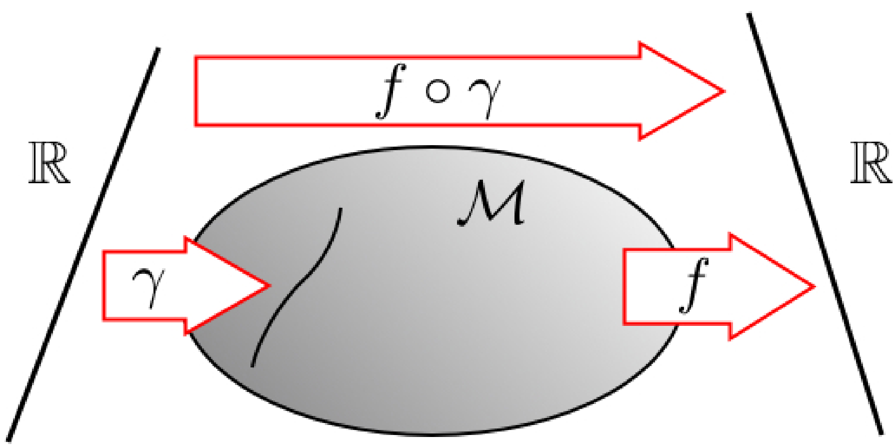

Figure 2: En términos concretos, una curva γ es un mapa $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ y una función escalar f es un mapa $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. También podemos definir un mapa $f(\tau) \equiv (f \circ \gamma)(\tau)$ que resulta de la composición de ambos mapas.

7.4 Sistemas de coordenadas

En la práctica, quizás debido a nuestras propias limitaciones, estamos condenados a introducir sistemas de coordenadas. Una forma abstracta, pero muy poderosa, de definir sistemas de coordenadas es mediante el uso de biyecciones[1] entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$, el espacio Cartesiano de n-dimensiones ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ n-veces). Como ya sabemos bien, $\mathbb{R}^n$ puede ser completamente descrito por coordenadas x^μ con $\mu = 0, \dots n-1$. Por lo tanto, si contamos con una biyección ϕ entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n \tag{7.15}$$

entonces por cada evento $P \in \mathcal{M}$ podemos asignar una (y solo una) coordenada x_P en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, dado que ϕ se trata de una biyección, entonces podemos definir al mapa inverso ϕ^{-1} entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$

$$\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M} \tag{7.16}$$

y por lo tanto, por cada coordenada x_P en $\mathbb{R}^n$ podemos asignar un (y solo un) evento $P \in \mathcal{M}$ (ver figura 3). Si tal biyección ϕ existe, nos referiremos a ésta como un sistema de coordenadas (o mapa coordenado) y diremos que n corresponde a la dimensión de $\mathcal{M}$. Por lo tanto, para un punto dado $P \in \mathcal{M}$ habrán n valores ordenados de $\phi(P)$ y, por definición, tales valores corresponderán a las coordenadas x_P en $\mathbb{R}^n$:

$$x_P^0 \equiv \phi^{(0)}(P), \tag{7.17}$$
$$x_P^0 \equiv \phi^{(1)}(P), \tag{7.18}$$
$$\vdots \tag{7.19}$$
$$x_P^{n-1} \equiv \phi^{(n-1)}(P). \tag{7.20}$$

Ahora que contamos con un sistema de coordenadas ϕ parametrizando a nuestro espacio tiempo $\mathcal{M}$ podemos de hecho estudiar funciones definidas sobre $\mathcal{M}$ de la forma usual, en la cual ya estamos acostumbrados. Por ejemplo, dada una función $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ podemos definir, en forma natural, una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a través de la composición de mapas (ver figura 4):

$$f(x_P^\mu) \equiv (f \circ \phi^{-1})(x_P^\mu) = f(P). \tag{7.21}$$

Esta construcción nos permite definir una derivada parcial $\partial_\mu f(P)$ de f en el punto $P \in M$:

$$\partial_\mu f(P) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\Big|_{x_P} \equiv \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu}\Big|_{x_P}. \tag{7.22}$$

[1] Recuerden que una biyección $\psi : M \to N$ entre dos conjuntos M y N es un un mapa que es (1) inyectivo (o uno a uno), y por lo tanto por cada elemento de N existe a lo mucho un elemento de M; y (2) sobreyectivo, y por lo tanto por cada elemento en N existe al menos un elemento de M.

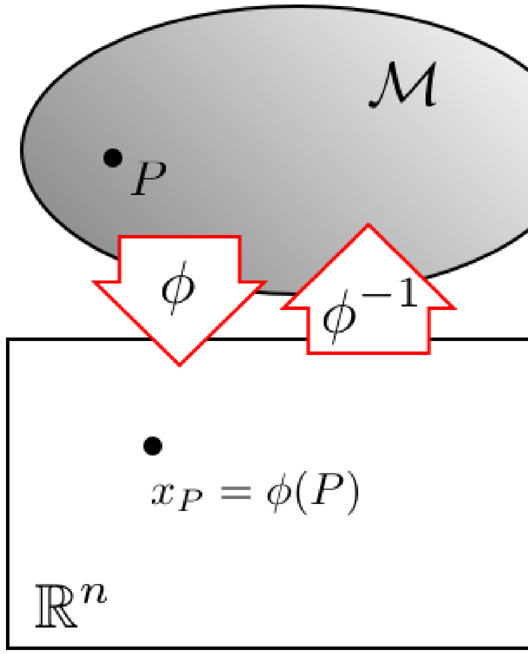

Figure 3: Un sistema de coordenadas puede ser entendido como una biyección entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$. Si tal biyección existe, entonces nos referimos a n como la dimensión de $\mathcal{M}$.

Algo similar ocurre para el caso de curvas definidas en $\mathcal{M}$: Dada una curva $\gamma(\tau) \in \mathcal{M}$, podemos definir, en forma natural, una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ cuyas componentes en $\mathbb{R}^n$ vienen dadas por (ver figura 4):

$$x^\mu(\tau) \equiv (\phi \circ \gamma)^\mu(\tau). \tag{7.23}$$

Noten que hasta el momento hemos dejado abierta la posibilidad de que n sea distinto de 4. Aunque hasta la fecha no hay ninguna indicación experimental de que el espacio tiempo tenga más dimensiones que las observadas, ciertas teorías fundamentales inevitablemente exigen la existencia de más dimensiones! Por lo que debemos tener nuestras mentes abiertas a dicha posibilidad. Aunque parezca descabellado, también hay teorías que sugieren que la naturaleza podría tener menos dimensiones que las observadas! En definitiva, lo único concreto es que resulta muy difícil estar del todo seguro si nuestras construcciones matemáticas son correctas o no, y lo saludable por ahora es aceptarlas como buenas aproximaciones.

Antes de continuar, una advertencia: La construcción que estamos desarrollando es estrictamente válido para espacio-tiempos planos. Dado un espacio-tiempo arbitrario $\mathcal{M}$, en general no es posible construir una biyección entre la totalidad de $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$. Este es el

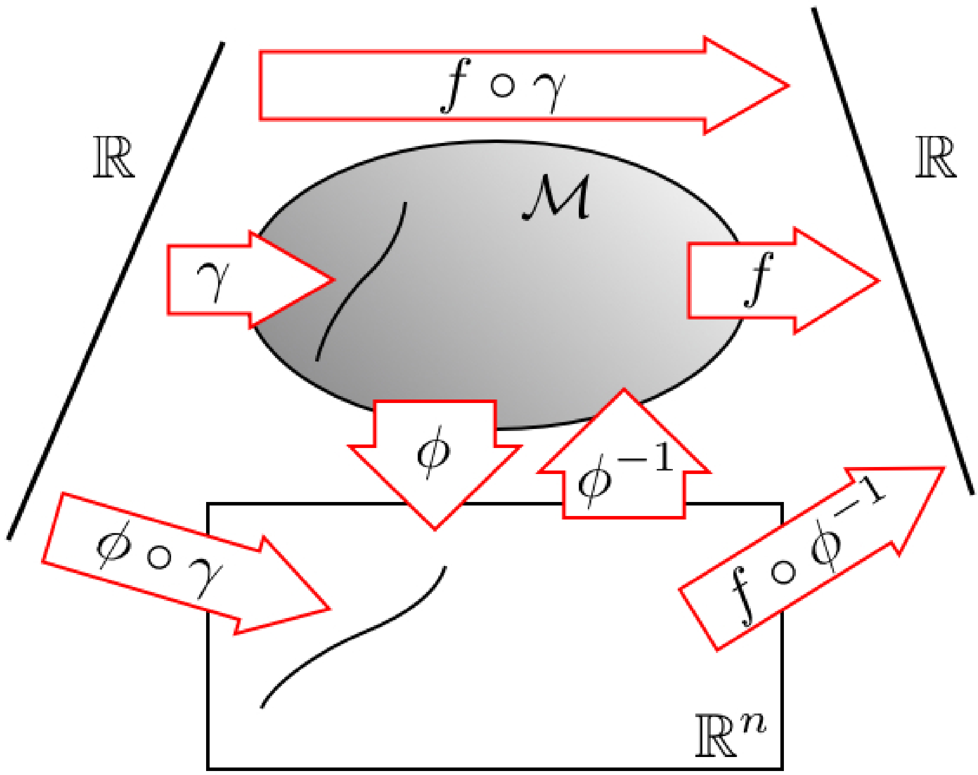

Figure 4: Ahora que contamos con un sistema de coordenadas ϕ podemos construir composiciones de mapas útiles para el estudio del espacio-tiempo $\mathcal{M}$.

caso típico de espacio-tiempos curvos, estudiado en Relatividad General, en donde para definir sistemas de coordenadas se requiere la noción más general de cartas locales.

7.5 Cambios de coordenadas

Dado un sistema de coordenadas ϕ en particular, bien podríamos querer definir otro sistema de coordenadas $\phi' : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ distinto a ϕ. Como ambos mapas tienen por imagen al mismo espacio $\mathbb{R}^n$, ciertamente podemos compararlos y establecer si son distintos o no. Junto a este segundo mapa podemos entonces realizar una construcción similar a la del primer mapa y escribir

$$x_P^{0'} \equiv \phi'^{(0)}(P), \tag{7.24}$$
$$x_P^{0'} \equiv \phi'^{(1)}(P), \tag{7.25}$$
$$\vdots \tag{7.26}$$
$$x_P^{n-1'} \equiv \phi'^{(n-1)}(P). \tag{7.27}$$

Al igual que antes, con este nuevo mapa podemos estudiar funciones y curvas definidas sobre $\mathcal{M}$ mediante la composición de mapas. Por ejemplo, en total analogía con las ecuaciones (7.21), (7.22) y (7.23), podemos escribir:

$$f(x_P^{\mu'}) \equiv (f \circ \phi'^{-1})(x_P^{\mu'}) = f(P), \tag{7.28}$$

$$\partial_{\mu'} f(P) = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu'}}\Big|_{x'_P} \equiv \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^{\mu'}}\Big|_{x'_P}, \tag{7.29}$$

$$x^{\mu'}(\tau) \equiv (\phi \circ \gamma)^{\mu'}(\tau). \tag{7.30}$$

Observen que si bien hemos introducido otro sistema de coordenadas para estudiar funciones definidas sobre $\mathcal{M}$, los valores de éstas no cambian. Sólo ha cambiado la forma de evaluarlas en $\mathbb{R}$. En otras palabras, tenemos

$$f(x_P^{\mu'}) = f(x_P^{\mu}) = f(P), \tag{7.31}$$

donde ciertamente $x_P^{\mu'} \neq x_P^{\mu}$. La expresión anterior es importante y debemos entenderla con cuidado, siempre recordando que hay composiciones de mapas de por medio para definir $f(x_P^{\mu'})$ y $f(x_P^{\mu})$ respectivamente. Lo que nos dice es que la función en si misma es un invariante bajo cambios de coordenadas. En el lenguaje moderno de teoría cuántica de campos, tales funciones son denominadas campos escalares, y cumplen un rol fundamental para la física teórica.

Para darle sentido a (7.31) notemos lo siguiente: Dado que ambos mapas ϕ y ϕ' son biyecciones entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$ podemos definir de forma natural mapas entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$. Tales mapas son simplemente composiciones de la forma

$$\phi' \circ \phi^{-1} : x_P^{\mu} \in \mathbb{R}^n \to x_P^{\mu'} \in \mathbb{R}^n, \tag{7.32}$$

$$\phi \circ \phi'^{-1} : x_P^{\mu'} \in \mathbb{R}^n \to x_P^{\mu} \in \mathbb{R}^n. \tag{7.33}$$

De este modo, dada una coordenada x_P en $\mathbb{R}^n$ podemos, con la ayuda de la composición $\phi' \circ \phi^{-1}$ mapearla a una (y sólo una) coordenada x'_P en $\mathbb{R}^n$. Obviamente lo contrario también es cierto (ver figura 5). En otras palabras, tenemos:

$$x_P^{\mu'} = \phi' \circ \phi^{-1}(x_P^{\mu}), \qquad x_P^{\mu} = \phi \circ \phi'^{-1}(x_P^{\mu'}). \tag{7.34}$$

Usualmente tales relaciones son expresadas en forma más sucinta:

$$x_P^{\mu'} = x^{\mu'}(x_P^{\mu}), \qquad x_P^{\mu} = x^{\mu}(x_P^{\mu'}). \tag{7.35}$$

Ahora que tenemos una composición de mapas coordenados podemos, por ejemplo, escribir la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}, \qquad \text{donde} \qquad \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[(\phi' \circ \phi^{-1})^{\nu'}(x_P) \right]. \tag{7.36}$$

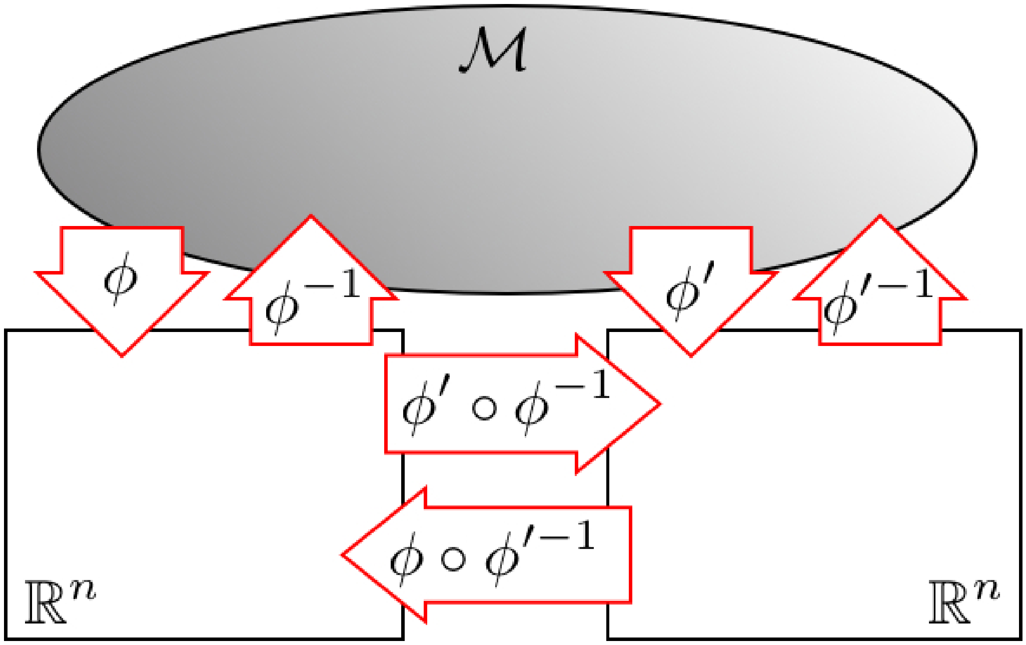

Figure 5: Dos sistemas de coordenadas distintos ϕ y ϕ' entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$ pueden ser compuestos para dar como resultados biyecciones entre $\mathbb{R}^n$ consigo mismo.

(Noten que estamos usando la convención de suma de índices de Eisntein). Así, contando con la regla de la cadena, podemos escribir expresiones tales como

$$\partial_\mu f(P) = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \partial_{\nu'} f(P). \tag{7.37}$$

En otras palabras, tras un laborioso trabajo de definir mapas coordenados, hemos deducido que el gradiante $\partial_\mu f$ de f en el punto P *transforma* de una forma particular bajo cambios de coordenadas. Dicha transformación consiste en una transformación lineal! Por supuesto, la lógica inversa también puede ser desarrollada, para llegar al resultado análogo:

$$\partial_{\mu'} f(P) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\nu} f(P). \tag{7.38}$$

Por último, dado que la función f es arbitraria, y dado que este análisis es asumido válido para todo punto $P \in \mathcal{M}$, podemos simplemente escribir:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\nu}. \tag{7.39}$$

Observen que también pudimos haber escrito:

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}} \partial_{\nu'}, \tag{7.40}$$

lo que es consistente con las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu'}} = \delta^{\mu'}_{\nu'} \qquad \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\rho'}}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{7.41}$$

7.6 Transformaciones de Lorentz revisadas una vez más

Para entender lo que hemos logrado, hagamos una pausa y pongamos los resultados anteriores en el contexto que nos interesa. Es decir, transformaciones de Lorentz. Ya sabemos que estas consisten en transformaciones de coordenadas que, cuando expresadas en forma diferencial, adquieren la forma:

$$dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} dx^{\nu'}, \qquad dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} dx^{\nu}, \tag{7.42}$$

donde $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$ y $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ son cantidades constantes (independientes de x^{μ} y/o $x^{\mu'}$). Estas relaciones corresponden precisamente a cambios de coordenadas, y por lo tanto podemos escribir

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}, \qquad \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}. \tag{7.43}$$

En otras palabras, las transformaciones de Lorentz pueden ser entendidas como un tipo particular de cambios de coordenadas usadas para describir al espacio tiempo $\mathcal{M}$. De esta forma, en el caso particular de las transformaciones de Lorentz, el gradiante $\partial_{\mu} f$ de una función f transforma de la manera:

$$\partial_{\mu'} f = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \partial_{\nu} f. \tag{7.44}$$

Resulta interesante contrastar este resultado con la expresión obtenida en la clase anterior para la transformación de la 4-velocidad. En dicha oportunidad, encontramos que

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}. \tag{7.45}$$

Observen que, multiplicando $u^{\mu'}$ con $\partial_{\mu'} f$ y sumando los indices repetidos, encontramos que:

$$u^{\mu'} \partial_{\mu'} f = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \Lambda^{\sigma}{}_{\mu'} u^{\nu} \partial_{\sigma} f = u^{\mu} \partial_{\mu} f, \tag{7.46}$$

en donde nos hemos permitido usar las relaciones de la ecuación (7.41) para escribir $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \Lambda^{\sigma}{}_{\mu'} = \delta^{\sigma}_{\nu}$. Esto quiere decir que $h = u^{\mu} \partial_{\mu} f$ transforma como una función *escalar*. Es decir, bajo transformaciones de Lorentz (transformaciones de coordenadas), $h = u^{\mu} \partial_{\mu} f$ cumple con la propiedad (7.31).

7.7 Vectores

Ya estamos en condiciones de juntar todos los elementos desarrollados en las secciones anteriores para definir el concepto de vector en forma adecuada. Partamos notando que una curva γ define en forma natural un operador sobre las funciones f definidas sobre $\mathcal{M}$, esto, gracias a que podemos construir la composición $f(\lambda) \equiv (f \circ \gamma)(\lambda)$. En otras palabras, dada una curva $\gamma(\lambda)$ con parámetro λ, y dada una función f, en un punto $P \in \mathcal{M}$ sobre el cual la curva pasa, podemos definir la siguiente operación:

$$f(P) \to \frac{df(P)}{d\lambda} \equiv \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda}. \tag{7.47}$$

El operador $\frac{d}{d\lambda}$ se denomina derivada direccional. Lo interesante de esta construcción es que el conjunto de todas las derivadas direccionales $\frac{d}{d\lambda}$ definidas sobre un punto P, corresponde a un espacio vectorial. En otras palabras, $\frac{d}{d\lambda}$ puede, y debe, ser pensado como un vector. Para convencernos de esto, notemos que, dadas dos curvas $\gamma_1(\lambda)$ y $\gamma_2(\eta)$, ambas pasando por un punto P, tendremos dos derivadas direccionales $\frac{d}{d\lambda}$ y $\frac{d}{d\eta}$ respectivamente. Luego, estas derivadas direccionales siempre pueden ser multiplicadas por números reales α y β, y luego sumadas para dar como resultado una tercera derivada direccional $\frac{d}{d\tau}$ coorespondiente a una tercera curva $\gamma_3(\tau)$, también pasando por P:

$$\frac{d}{d\tau} = \alpha \frac{d}{d\lambda} + \beta \frac{d}{d\eta}. \tag{7.48}$$

Para convencernos de que tal curva existe, observen que $\frac{d}{d\tau}$ definida de esta forma es independiente de la función sobre la cual opera y, además, cumple con la regla de Leibniz[2], por lo que corresponde a una derivada genuina. En particular, la dirección que define este nuevo operador debe ser distinta a las determinadas ya sea por $\frac{d}{d\lambda}$ o por $\frac{d}{d\eta}$. Por lo tanto, a lo largo de tal dirección siembre podemos construir una curva $\gamma_3(\tau)$ pasando por P (ver figura 6) cuya derivada direccional corresponde a $\frac{d}{d\tau}$. Al espacio vectorial definido por tales derivadas direccionales en P se le llama el *espacio tangente* T_P sobre P. Veamos ahora en forma más concreta qué tipo de objetos habita T_P. Para ello, notemos que la introducción de un sistema de coordenadas ϕ (tal como aquellos discutidos en las secciones

[2]Recordemos que la regla de Leibniz es una propiedad fundamental de una derivada. Esta nos dice que una derivada $\frac{d}{d\lambda}$ actuando sobre un producto de funciones $f \cdot g$, da como resultado la relación algebraica $\frac{d}{d\lambda}(f \cdot g) = \frac{df}{d\lambda} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{d\lambda}$.

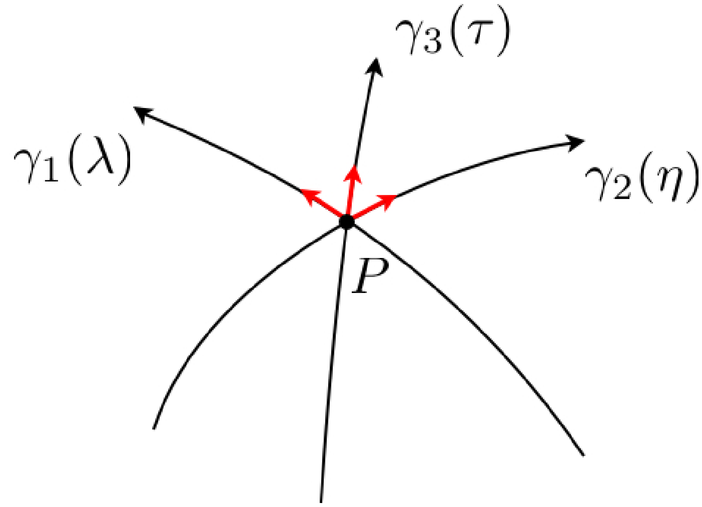

Figure 6: Dos curvas $\gamma_1(\lambda)$ y $\gamma_2(\eta)$ con parámetros λ y η pasando por P definen dos derivadas direccionales $\frac{d}{d\lambda}$ y $\frac{d}{d\eta}$. respectivamente. La multiplicación de estas por números reales y su suma siempre define una tercera derivada direccional $\frac{d}{d\tau}$ correspondiente a una curva $\gamma_3(\tau)$, también pasando por P.

anteriores) permite escribir la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\lambda} &= \frac{d(f\circ\gamma)}{d\lambda} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\left[(f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma)\right] \\ &= \frac{d(\phi\circ\gamma)^\mu}{d\lambda}\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \tag{7.49}$$

En la expresión anterior, en la primera igualdad simplemente usamos la definición de $f(\lambda) = f\circ\gamma$; en la segunda igualdad, introducimos de forma conveniente un sistema de coordenadas ϕ de nuestra elección; en la tercera igualdad usamos la regla de la cadena para explotar la presencia del sistema de coordenadas; finalmente, en la cuarta igualdad definimos $x^\mu(\lambda) = (\phi\circ\gamma)^\mu(\lambda)$ e identificamos $f(x^\mu) = f\circ\phi^{-1}$. Observen ahora que las derivadas parciales $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ conforman una base de derivadas direccionales sobre el cual $\frac{d}{d\lambda}$ puede ser expandido. En otras palabras, dado que la función f es arbitraria, tenemos:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu. \tag{7.50}$$

De esta manera, hemos deducido que $\frac{d}{d\lambda} \in T_p$ es un vector con componentes $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ en la base $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$ definida por el sistema de coordenadas ϕ (ver figura 7). Estas componentes de hecho ya nos son conocidas. En efecto, corresponden a las componentes del vector tangente a la curva $\gamma(\lambda)$ deducida en la clase anterior. Por lo mismo, es común simplemente referirse a $\frac{d}{d\lambda}$ como el vector tangente a la curva $\gamma(\lambda)$. Para finalizar, notemos como siempre que

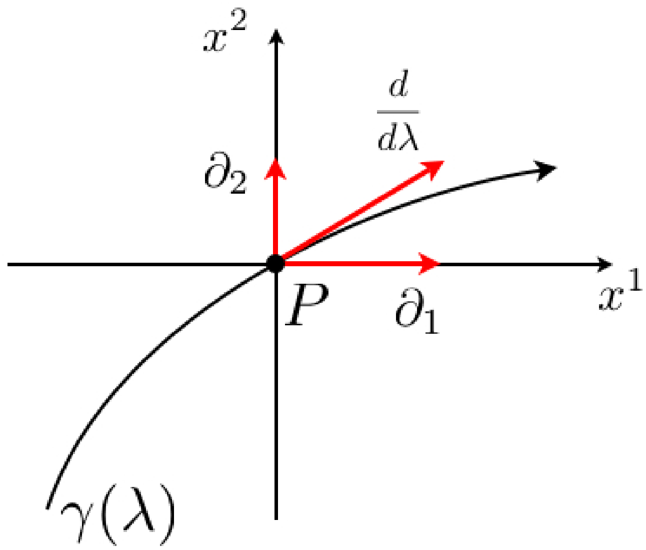

Figure 7: Gracias a la introducción de un sistema de coordenadas ϕ, podemos descomponer la derivada direccional $\frac{d}{d\lambda}$ usando la base $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$. Las componentes de $\frac{d}{d\lambda}$ ya son conocidas: corresponden a las componentes del vector tangente $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ a la curva $\gamma(\lambda)$.

bien pudimos haber comenzado con otro sistema de coordenadas ϕ'. Esto nos habría conducido al resultado

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}\partial_{\mu'}, \tag{7.51}$$

donde $\partial_{\mu'}$ son ahora derivadas parciales con respecto al nuevo sistema de coordenadas $x^{\mu'}$. Por lo tanto, usando el resultado (7.39) podemos deducir de que forma *transforman* las componentes de un vector en T_p bajo cambio de coordenadas:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}\partial_{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\partial_\nu. \tag{7.52}$$

Comparando con (7.50) vemos por lo tanto que necesariamente se satisface:

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}\frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}. \tag{7.53}$$

Desde luego, en el caso particular de una transformada de Lorentz (recordar la discusión de la sección 7.6), la matriz $\Lambda^\nu{}_{\mu'} \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}$ es una constante, por lo que finalmente obtenemos nuestra tan anhelada regla de transformación para vectores:

$$\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda}. \tag{7.54}$$

7.8 Mini-resumen

Recapitulando: Hemos definido el espacio tangente T_p a un punto $P \in \mathcal{M}$ como el espacio habitado por las derivadas direccionales definidas a partir de todas curvas pasando por P. En el proceso, confirmamos que T_p es un espacio vectorial, y que las derivadas direccionales corresponden a vectores tangentes de las curvas (lo que revela el origen del nombre para referirnos a T_p). Descubrimos también que la introducción de un sistema de coordenadas define una base natural para T_p (dado por las derivadas parciales $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$) y que un cambio de coordenadas induce un cambio de bases. Esto último se refleja en la forma que las componentes V^μ de un vector $V \in T_p$ transforman:

$$V^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'} V^{\mu'}. \tag{7.55}$$

Por supuesto, también tenemos la relación inversa

$$V^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}{}_{\mu} V^{\mu}, \tag{7.56}$$

donde $\Lambda^{\nu'}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\mu'} = \delta^{\nu'}_{\mu'}$. A partir de ahora, cuando hablemos de 4-vectores, nos referiremos exclusivamente a vectores que viven en T_p. En términos prácticos, esto significa que un vector tiene una dirección bien definida en el espacio-tiempo $\mathcal{M}$ y que dicha dirección siempre puede ser asociada a una curva pasando por P.