Física Moderna FI-3102
Tarea 3: Tensores

Fecha: Viernes 28 de Agosto 2009

INDICACIONES: Fecha de Entrega: Viernes 4 de Septiembre, 15:00 horas en la oficina de la Sra. Carmen Belmar. Si entrega la tarea después de esta hora tendrá un punto menos.

PROBLEMA 1

a.- La transformación de Lorentz que lleva de un sistema K a otro K', ambos inerciales, puede ser representado mediante el cambio de coordenadas

$$\Delta x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \Delta x^{\nu'} \tag{0.1}$$

donde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ puede ser pensada como una matriz de 4×4 en donde los indices μ y ν' corresponden a filas y columnas respectivamente. Usted ya sabe que en el caso particular de que el sistema K' que se mueve con velocidad v en la dirección x del sistema K, entonces $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ corresponde a un boost y puede ser expresado de la forma

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v$ (con $c = 1$). A partir de este resultado escriba la representación matricial de $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \equiv \eta^{\mu'\nu'}\eta_{\nu\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$, donde ahora los indices μ' y ν corresponden a filas y columnas respectivamente. Indique si la matriz es simétrica, antisimétrica o simplemente esta propiedad no está definida. ¿Cuál es la representación matricial de la equación $\Lambda^{\mu'}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$?

b.- Considere ahora el caso en que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ corresponde a una rotación en torno al eje x^3. En este caso usted ya sabe que ésta transformación puede ser representada en forma matricial como

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

Repita lo solicitado en la parte anterior (parte a) de este problema.

c.- Demuestre que a partir del invariante $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ se cumple que $\Lambda^{\mu}{}_{\rho'}\Lambda^{\rho'}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Muestre que este resultado implica que $\det(\Lambda) = \pm 1$. ¿Cual es el signo de las matrices consideradas en las partes anteriores?

d.- El tensor totalmente anti-simétrico (Levi-Civita) $\epsilon_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}$ se evalúa como sigue. Si dos de sus índices son iguales, su valor es 0. Si sus índices están ordenados como $\{0\,1\,2\,3\}$ o cualquier otra permutación par de ellos, toma un valor igual a $+1$. Si es una permutación impar del orden correlativo, su valor es -1. Calcule explícitamente el valor de este tensor en el sistema K', que se mueve con respecto a K con una velocidad v en la dirección de $+x$.

PROBLEMA 2

a.- Dadas las componentes $T_{\mu\nu}$ de un tensor arbitrario, se define la parte simétrica de tal tensor como $T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$ y la parte anti-simétrica como $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}[T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}]$. Observe que $T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$. Considere un tensor-$(2,0)$ X y un vector V con componentes:

$$X^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad V^{\mu} = (-1, 2, 0, -2). \tag{0.4}$$

Calcule las siguientes cantidades:

$$X^{\mu}{}_{\nu}, \qquad X_{\mu}{}^{\nu}, \qquad X^{(\mu\nu)}, \qquad X^{[\mu\nu]}, \qquad X^{\lambda}{}_{\lambda}, \qquad V^{\mu}V_{\mu}, \qquad V_{\mu}X^{\mu}{}_{\nu}. \tag{0.5}$$

b.-Considere el siguiente tensor que en un sistema K tiene por componentes:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & V_1 & V_2 & V_3 \\ -V_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ -V_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ -V_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

Observe que es un tensor anti-simétrico. Escriba este tensor en un sistema de referencia K rotado en un ángulo θ con respecto a K' alrededor del eje x^3 (le será útil recordar la expresión (0.3) del problema anterior). Discuta la forma en que transforman V_i y U_i.

PROBLEMA 3

Suponga que Ud. está solitario en una nave en el espacio infinito. Sólo existe una estrella que puede usar de referencia. Tiene en su poder un set de tres giróscopos que le permiten comparar direcciones. La nave se impulsa mediante unos motores iónicos con los que Ud. puede impulsar a la nave en diferentes direcciones.

Usando la estrella como referencia, por ejemplo, si Ud. se da una velocidad ($-V_0$) en el eje x, (un "boost" en la dirección $-x$ con velocidad V_0), la estrella parecerá moverse en la dirección $+x$, con una velocidad V_0.

a.- Inicialmente la nave está en reposo con respecto a la estrella. Usando las transformaciones de Lorentz dadas, aplique un impulso inicial (un boost) en la dirección $+x$ y posteriormente un impulso igual en la dirección $+y$, ambas con la misma velocidad V_0. La 4-velocidad inicial a la cual se aplica la primera transformación de Lorentz es: $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Demuestre que la velocidad final *NO* apunta en la dirección esperada: 45^0 con respecto a la dirección inicial. (Puesto de otra forma, la estrella NO se mueve en la dirección esperada).

b.- Encuentre un valor para la velocidad del impulso ("boost") en la dirección y, V_1 ($\neq V_0$) tal que la estrella se mueva en la dirección (45^o).

c.- Considere ahora la siguiente situación: Inicialmente la nave está en reposo con respecto a la estrella. En dicho sistema la 4-velocidad de la nave está dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Aplique los siguientes boost sucesivos: V_0 en el eje x, V_0 en el eje y, V_0 apuntando en la dirección del eje $-x$, y V_0 en el eje $-y$. Cual es el valor del 4-vector final?

d.- Considere ahora la siguiente situación: Inicialmente la nave está en reposo con respecto a la estrella. En dicho sistema la 4-velocidad de la nave está dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Aplique los siguientes boost sucesivos: V_0 en el eje x, V_1 en el eje y, V_1 apuntando en la dirección del eje $-x$, y V_0 en el eje $-y$. Si V_1 es el valor obtenido en la parte b de este problema: ¿Cual es el valor del 4-vector final?

e.- El punto anterior puede ser pensado como la aplicación de una sola transformación ${\Lambda^{\nu'}}_\mu$ sobre el 4-vector original u^μ. Calcule explícitamente la representación matricial de esta transformación. ¿A qué tipo de transformación corresponde?