

Cátedra V: Transformaciones de Lorentz III

En esta clase continuaremos con el estudio de las transformaciones de Lorentz. En particular, analizaremos en forma más acuciosa cómo las transformaciones de Lorentz nos revelan la estructura geométrica del espacio-tiempo.

5.1 Calibrando los orígenes

Hasta el momento hemos estudiado las transformaciones de Lorentz actuando sobre diferencias de coordenadas caracterizando dos eventos arbitrarios P_1 y P_2 en el espacio tiempo. Por simplicidad, en este análisis hemos utilizado sistemas de referencia inerciales con ejes convenientemente alineados. Es decir, hemos convenido en que si hay dos observadores inerciales O y O' en movimiento relativo, entonces el observador O usa un sistema de referencia K en el cual el observador O' se mueve en la dirección positiva de su eje x , mientras que el observador O' usa un sistema de referencia K' en el cual el observador O se mueve en la dirección negativa de su eje x' .¹

Por otro lado, en ningún momento nos hemos visto en la necesidad de hacer coincidir los orígenes de ambos sistemas de referencia. Esto debido al hecho que estamos describiendo diferencias de coordenadas, por lo que poco importa donde están centrados los orígenes. Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia \tilde{K} y \tilde{K}' con coordenadas \tilde{x}^μ y $\tilde{x}^{\mu'}$ respectivamente. Las diferencias $\Delta\tilde{x}^\mu = \tilde{x}_2^\mu - \tilde{x}_1^\mu$ y $\Delta\tilde{x}^{\mu'} = \tilde{x}_2^{\mu'} - \tilde{x}_1^{\mu'}$ caracterizando a dos eventos P_1 y P_2 en ambos sistemas están pues relacionadas de la forma:

$$\Delta\tilde{x}^0 = \gamma(\Delta\tilde{x}^{0'} + \beta\Delta\tilde{x}^{1'}), \quad (5.1)$$

$$\Delta\tilde{x}^1 = \gamma(\Delta\tilde{x}^{1'} + \beta\Delta\tilde{x}^{0'}), \quad (5.2)$$

$$\Delta\tilde{x}^2 = \Delta\tilde{x}^{2'}, \quad (5.3)$$

$$\Delta\tilde{x}^3 = \Delta\tilde{x}^{3'}. \quad (5.4)$$

Noten que el símbolo \sim sobre las coordenadas no cumple ningún rol especial (la razón por la cual hemos introducido esta notación será evidente en un momento). Hagamos una redefinición de estas coordenadas de la forma siguiente

$$x^\mu \equiv \tilde{x}^\mu - \tilde{a}^\mu, \quad x^{\mu'} \equiv \tilde{x}^{\mu'} - \tilde{a}^{\mu'}, \quad (5.5)$$

donde $\tilde{a}^\mu = (\tilde{a}^0, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \tilde{a}^3)$ y $\tilde{a}^{\mu'} = (\tilde{a}^{0'}, \tilde{a}^{1'}, \tilde{a}^{2'}, \tilde{a}^{3'})$ son cantidades constantes arbitrarias. Esta redefinición de las coordenadas corresponde a una traslación espacio-temporal. Noten que consiste en una redefinición tanto de las coordenadas espaciales \tilde{x}^i y $\tilde{x}^{i'}$ como de las

¹Como veremos en esta clase, si bien parece que ambos ejes (el eje x^1 y el eje $x^{1'}$) están alineados el uno con el otro, desde el punto de vista 4-dimensional, no lo están.

coordenadas temporales \tilde{x}^0 y $\tilde{x}^{0'}$ de ambos sistemas de referencia \tilde{K} y \tilde{K}' . Las coordenadas x^μ y $x^{\mu'}$ son las coordenadas de dos nuevos sistemas de referencia K y K' relacionados por traslaciones a \tilde{K} y \tilde{K}' respectivamente. Es fácil verificar que estas traslaciones no afectan a las diferencias de coordenadas de cualquier par de eventos. Es decir:

$$\Delta x^\mu = \Delta \tilde{x}^\mu, \quad \Delta x^{\mu'} = \Delta \tilde{x}^{\mu'}. \quad (5.6)$$

Para proceder, escojamos de forma conveniente $\tilde{a}^\mu = \tilde{x}_1^\mu$ y $\tilde{a}^{\mu'} = \tilde{x}_1^{\mu'}$ donde \tilde{x}_1^μ y $\tilde{x}_1^{\mu'}$ corresponden a las coordenadas del evento P_1 registradas en \tilde{K} y \tilde{K}' respectivamente. En términos de estas nuevas coordenadas, las relaciones (5.1)-(5.4) adquieren la siguiente forma:

$$x_2^0 = \gamma(x_2^{0'} + \beta x_2^{1'}), \quad (5.7)$$

$$x_2^1 = \gamma(x_2^{1'} + \beta x_2^{0'}), \quad (5.8)$$

$$x_2^2 = x_2^{2'}, \quad (5.9)$$

$$x_2^3 = x_2^{3'}. \quad (5.10)$$

Observen que lo único que hemos hecho es simplemente elegir sistemas de coordenadas K y K' con ambos orígenes centrados en P_1 (ver figura siguiente). Evidentemente ésta es una elección arbitraria, pero será útil para estudiar la estructura del espacio-tiempo en forma más detallada. Por último, recordemos que estamos considerando que ambos eventos son completamente arbitrarios. En particular, el evento P_2 podría tener cualquier coordenada x^μ en el sistema K ($x^{\mu'}$ en el sistema K') por lo que nos olvidaremos del subíndice “2” y simplemente escribiremos

$$x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x^{1'}), \quad (5.11)$$

$$x^1 = \gamma(x^{1'} + \beta x^{0'}), \quad (5.12)$$

donde también hemos ignorado las coordenadas x^2 y x^3 . De este modo, x^μ corresponde a la coordenada de cualquier evento registrado en K con respecto a su origen (lo mismo para $x^{\mu'}$ en K'). Por completitud, escribamos también las relaciones inversas:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (5.13)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0). \quad (5.14)$$

5.2 Relacionando sistemas de coordenadas

Nuestro propósito es adquirir una idea más profunda de la estructura del espacio tiempo. Si bien hemos insistido que los sistemas de coordenadas son meramente formas arbitrarias de registrar eventos, el estudio de cómo dos sistemas de coordenadas están relacionados

nos resultará tremendamente provechoso. Como de costumbre, ignoremos por el momento las coordenadas x^2 y x^3 (antiguamente y y z) y consideremos únicamente lo que pasa en el plano x^0 - x^1 . Aprovechando la notación introducida en la clase anterior, escribamos simplemente

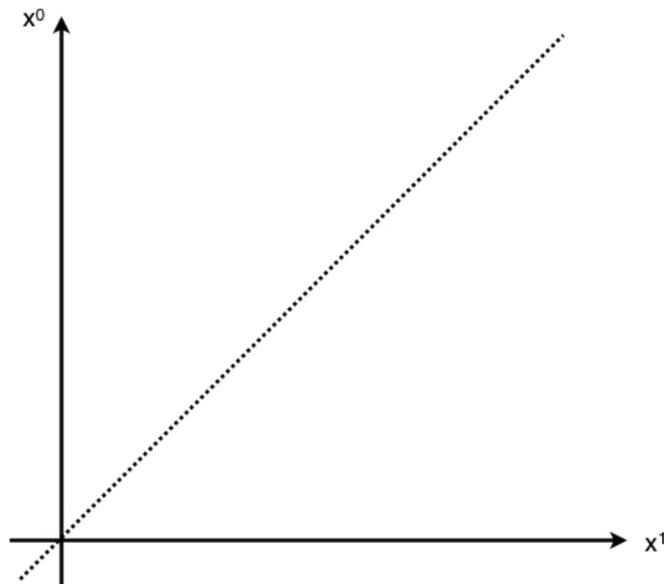
$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \Lambda(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

y

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \Lambda(-\theta) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Estas transformaciones relacionan a cualquier par de coordenadas (x^0, x^1) en K con otro par de coordenadas $(x^{0'}, x^{1'})$ en K' . (Un evento cualquiera P registrado en K' con coordenadas $(x^{0'}, x^{1'})$ será por lo tanto registrado con coordenadas (x^0, x^1) en K).

Dado que las relaciones (5.11)-(5.12) tienen inversas bien definidas, éstas pueden ser pensadas como mapas de uno a uno (biyecciones) entre dos espacios \mathbb{R}^2 . Es posible, por lo tanto, graficar ambos sistemas de coordenadas en un sólo diagrama! Veamos como hacer esto. Partamos considerando el sistemas de coordenadas K de la forma usual. Es decir, con los ejes x^0 y x^1 perpendiculares el uno con respecto al otro (ver figura siguiente). Hemos también graficado la diagonal $x^0 = x^1$ que consiste en la trayectoria rectilínea



seguida por una señal a partir del origen. Sobre este diagrama, intentemos ahora graficar la posición de los ejes $x^{0'}$ y $x^{1'}$ del sistema de referencia K' . Esto corresponde a graficar un conjunto de eventos caracterizados por ciertas condiciones. Por ejemplo, el eje $x^{0'}$

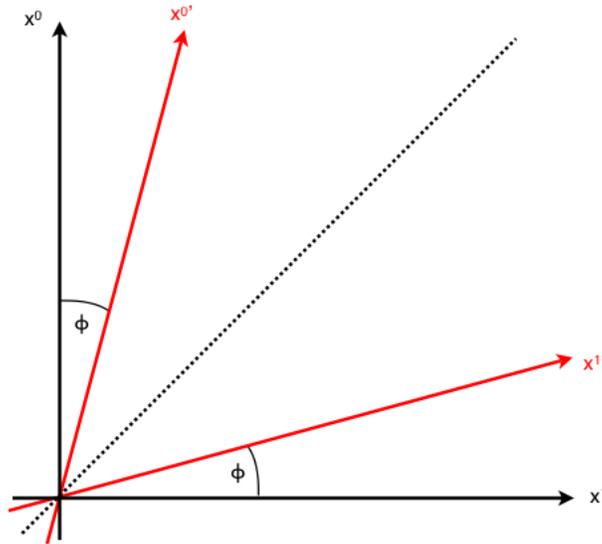
corresponde a un conjunto de eventos caracterizados por la condición $x^{1'} = 0$. Utilizando esta condición junto a la relación (5.16), podemos concluir que tal conjunto de eventos está caracterizado por

$$-\sinh \theta x^0 + \cosh \theta x^1 = 0. \quad (5.17)$$

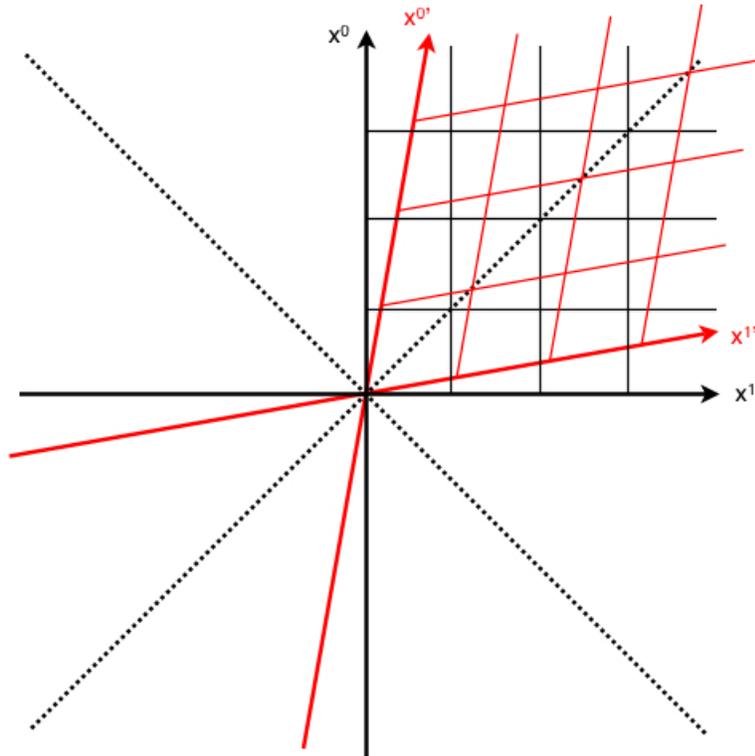
En otras palabras tenemos una línea en el plano x^0 - x^1 en K respetando la ecuación $x^0 = (\tan \theta)^{-1} x^1$. Esta línea se intersecta con el origen y tiene un ángulo ϕ con respecto al eje x^0 dado por $\tan \phi = \tanh \theta$ (ver figura siguiente). Recordemos que $\tan \theta = v/c$ donde v es la velocidad relativa de nuestros observadores usuales. Para graficar el eje $x^{1'}$ podemos proceder en forma análoga. En efecto, el eje $x^{1'}$ corresponde al conjunto de eventos caracterizados por la condición $x^{0'} = 0$, y tal condición arroja la ecuación

$$\cosh \theta x^0 - \sinh \theta x^1 = 0. \quad (5.18)$$

Esta es una línea en el plano x^0 - x^1 en K respetando la ecuación $x^0 = \tan \theta x^1$. Esta línea se intersecta con el origen y tiene el mismo ángulo ϕ anterior pero esta vez con respecto al eje x^1 (ver figura siguiente). Vemos entonces que es posible graficar los ejes



$x^{0'}$ y $x^{1'}$ del sistema K' en el sistema de referencia K . De hecho podemos comparar ambos sistemas de referencia de forma exhaustiva. Para ello podemos continuar con el procedimiento anterior para graficar el *cuadrículado* del sistema K' sobre el *cuadrículado* del sistema de coordenadas K , tal como lo muestra la siguiente figura. Con esta forma de graficar, podemos ubicar eventos en forma simultánea en ambos sistemas de referencia.



Ejercicio 1. Discuta como se grafica las coordenadas de K sobre el sistema de coordenadas K' . Es decir, realice la operación inversa.

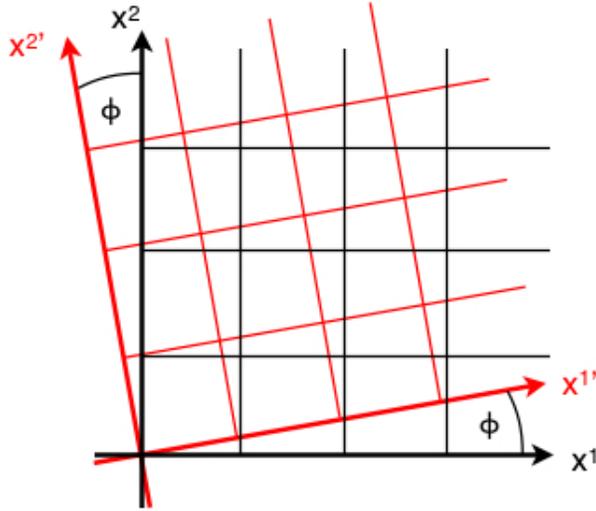
Resulta instructivo reconocer que el análisis anterior puede ser repetido también para el caso más familiar de una rotación. Si dos sistemas de referencia están relacionados mediante una rotación en un ángulo ϕ , podemos graficar ambos sistemas de referencia en forma simultánea (ver figura siguiente).

5.3 Superficies invariantes

Recordemos que el intervalo espacio-temporal Δs^2 es un invariante bajo transformaciones de Lorentz. Dado que en el presente análisis estamos interesados en la posición de los eventos con respecto al origen, este invariante puede ser escrito de la forma:

$$\Delta s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2, \tag{5.19}$$

donde el par (x^0, x^1) corresponden a las coordenadas del evento en cuestión. Está claro que hay una infinitud de eventos todos a la misma distancia desde el origen. En otras palabras, para un valor fijo $\Delta s^2 = a$, la ecuación anterior puede ser entendida como la



ecuación de una curva caracterizada por eventos equidistantes del origen. Esta curva cumple con la ecuación

$$x^0 = \pm \sqrt{(x^1)^2 - a}, \quad (5.20)$$

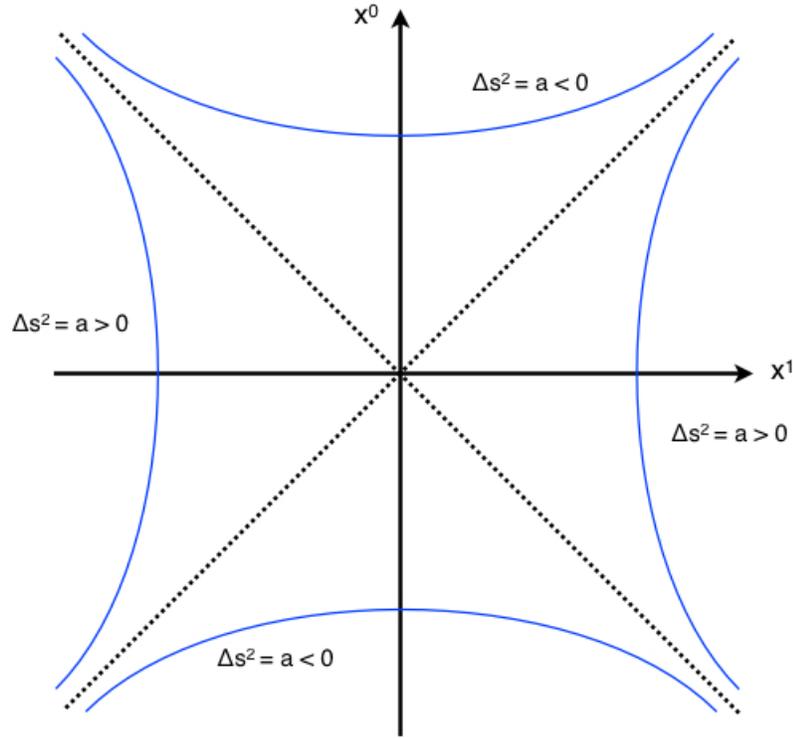
la que corresponde a la ecuación de una hipérbola. La siguiente figura muestra las curvas obtenidas para distintos signos de a . Por ejemplo, si $a < 0$, entonces los eventos sobre la curva están separados del origen por un intervalo tipo tiempo y por lo tanto deben estar o en el futuro absoluto del origen (que corresponde a la parte superior del cono) o en el pasado absoluto del origen (que corresponde a la parte inferior del cono). Estas corresponden a las hipérbolas superiores e inferiores de la figura siguiente. En forma similar, si $a > 0$, entonces los eventos de la curva están separados del origen por un intervalo tipo espacio. En la figura, estas son las curvas fuera del cono de luz.

5.4 Boosts

Hay una forma de visualizar transformaciones de Lorentz mediante su acción sobre eventos en un sistema de coordenadas en particular (digamos K) dando como resultado eventos en el mismo sistema de coordenadas (K). Para ser más precisos, uno puede visualizar a una transformación de Lorentz como un mapa relacionando distintas coordenadas en el mismo sistema de referencia. Veamos esto en más detalle a continuación.

Consideremos un evento P_1 ubicado en la posición $(x_1^0, x_1^1) = (a, 0)$ del sistema de coordenadas K (con $a > 0$), y consideremos la acción de una transformación de Lorentz sobre este punto.

$$\begin{pmatrix} x_2^0 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_1^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cosh \theta \\ \sinh \theta \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

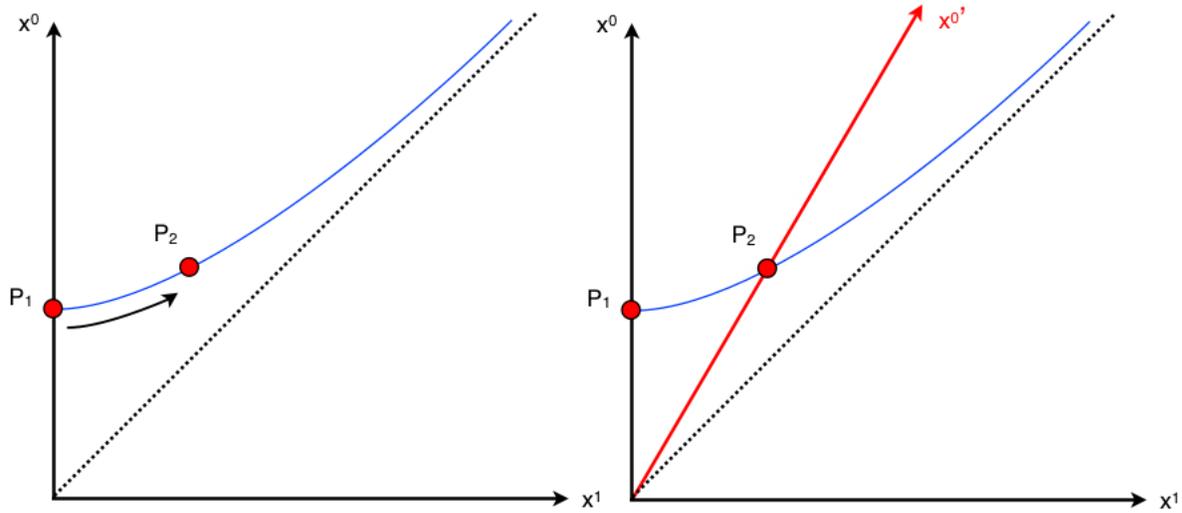


El segundo evento P_2 , definido de esta forma, tiene coordenadas $(x_2^0, x_2^1) = (a \cosh \theta, a \sinh \theta)$ correspondiente a un punto ubicado sobre la curva invariante caracterizada por $\Delta s^2 = -a$. Es decir, la acción de la transformación a consistido en mover el evento P_1 a la posición del evento P_2 a lo largo de la superficie invariante (ver siguiente figura). Por supuesto, ambos eventos están a la misma distancia del origen. Más aún, apoyados por la discusión de la Sección 5.2, sabemos que existe un sistema de coordenadas K' en el cual el evento P_2 está precisamente ubicado en las coordenadas $(x_2^{0'}, x_2^{1'}) = (a, 0)$. En efecto, las coordenadas de K' están directamente relacionadas con las coordenadas de K mediante las transformaciones:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \Lambda(-\theta) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

por lo que al reemplazar $(x_2^0, x_2^1) = (a \cosh \theta, a \sinh \theta)$ al lado derecho de la última ecuación, obtenemos de vuelta $(x_2^{0'}, x_2^{1'}) = (a, 0)$. Es decir, un observador O' registra al evento P_2 en su sistema de referencia K' de la misma forma en la cual un observador O registra al evento P_1 en su sistema de referencia K .

La acción de mapear un evento en el espacio-tiempo a otro evento dentro del mismo espacio-tiempo mediante una transformación de Lorentz comúnmente se denomina *boost*. Nos ayuda a visualizar la manera en que dos puntos del espacio-tiempo, ubicados a la



misma distancia desde el origen, están relacionados. En particular, nos ayuda a comparar de forma simultánea como un mismo evento es registrado por dos observadores inerciales utilizando sistemas de referencia distintos.

Observen que no es importante que uno de los eventos esté sobre el eje de un sistema de referencia (lo que hemos considerado por simplicidad). Por ejemplo, sería posible ahora definir un tercer evento P_3 en K a partir de la acción de $\Lambda(\theta_2)$ sobre las coordenadas de P_2 también en K , donde $\theta_2 \neq \theta$ es un nuevo parámetro. Al igual que antes, siempre habrá un observador O'' que registre este nuevo evento en las coordenadas $(x_3^{0''}, x_3^{1''}) = (a, 0)$ de su propio sistema K'' . Por otro lado, también habrá un observador O''' que registre tal evento en la posición $(x_3^{0'''}, x_3^{1'''}) = (a \cosh \theta, a \sinh \theta)$ de su sistema de coordenadas K''' .

Ejercicio 2. Considere esta discusión para el caso en que el evento P_1 está ubicado en la posición $(x_1^0, x_1^1) = (0, a)$. Definiendo un evento P_2 mediante la acción de $\Lambda(\theta)$ sobre las coordenadas de P_1 : ¿Hacia que dirección de la superficie invariante se ubica el evento P_2 con respecto al evento P_1 ?

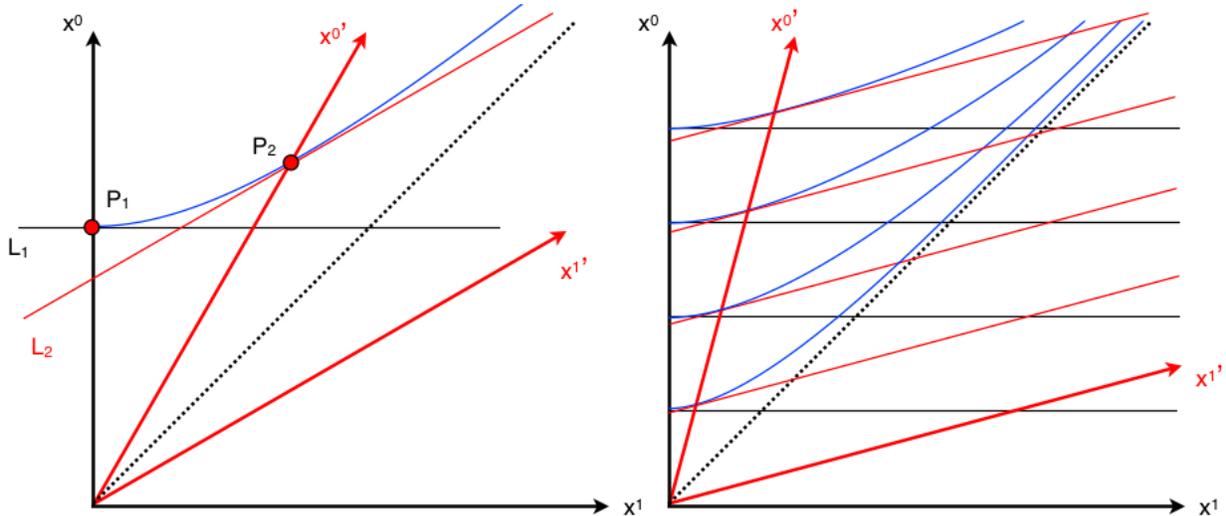
Ejercicio 3. Observe que un boost define líneas de flujo en todo el espacio-tiempo. Es decir, a partir de cualquier punto P en el espacio-tiempo con coordenadas (x_P^0, x_P^1) , usted puede generar una curva $\gamma = \gamma(\theta)$ parametrizada por θ , siguiendo la trayectoria $(x^0(\theta), x^1(\theta)) = \Lambda(\theta)(x_P^0, x_P^1)$. Confeccione un diagrama en el cual se aprecie las líneas de flujo generadas por la transformación $\Lambda(\theta)$ en todo el espacio tiempo. ¿Cómo cambia la situación si la transformación usada para generar las líneas de flujo es $\Lambda(-\theta)$?

5.5 Más sobre la comparación de sistemas de coordenadas

Podemos juntar los resultados desarrollados en las secciones anteriores para entender como las superficies invariantes están relacionados con el cuadrículado de dos sistemas de referencia, cuando éstos son graficados en un mismo diagrama (tal como lo hicimos en la Sección 5.2). Para ello, partamos considerando a los usuales sistemas de referencia K y K' con coordenadas relacionadas mediante

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

y consideremos un evento P_1 ubicado en la posición $(x_1^0, x_1^1) = (a, 0)$. Ya sabemos como visualizar la superficie invariante (una hipérbola) pasando sobre este evento (ver figura anterior). Resulta claro que podemos definir una recta L_1 pasando por P_1 y que sea tangente a la superficie invariante. La ecuación de esta recta es simplemente $x^0 = a$, la que es paralela al eje x^1 (ver siguiente figura). Por otro lado, hemos visto que un evento P_2 con coordenadas $(x_2^0, x_2^1) = (a \cosh \theta, a \sinh \theta)$ es registrado por el observador O' en las coordenadas $(x_2^{0'}, x_2^{1'}) = (a, 0)$. En su propio sistema de coordenadas este observador también puede dibujar la superficie invariante y una recta L_2 pasando por P_2 tangente a la mencionada superficie. La ecuación de dicha recta $x^{0'} = a$, la que es paralela al eje $x^{1'}$. Esto quiere decir que, necesariamente, al graficar L_2 en el sistema de referencia K , ésta debe continuar siendo tangente a la superficie, paralela a $x^{1'}$ (ver figura siguiente). Esto



se puede comprobar facilmente al insertar la ecuación de la recta L_2 (dada por $x^{0'} = a$) en la expresión (5.23) para obtener la ecuación de dicha recta en el sistema de coordenadas

K. La ecuación, en forma paramétrica, viene dada por:

$$(x^0, x^1) = (\cosh \theta a + \sinh \theta x^1, \sinh \theta a + \cosh \theta x^1), \quad (5.24)$$

donde x^1 es el parámetro. De otro modo, eliminando el parámetro, la ecuación viene dada por

$$x^0 = x^1 \tanh \theta + \frac{a}{\cosh \theta}, \quad (5.25)$$

la que efectivamente es tangente a la curva invariante $x^0 = \sqrt{(x^1)^2 + a}$. Esto nos permite ver como las unidades del cuadrículado de ambos sistemas de referencia son afectados por las transformaciones de Lorentz en un mismo diagrama (ver figura anterior).